муниципальное автономное общеобразовательное

учреждение

средняя общеобразовательная школа № 45

Методическое пособие для учащихся 10 классов

«Комбинации многогра
в прикладных задач

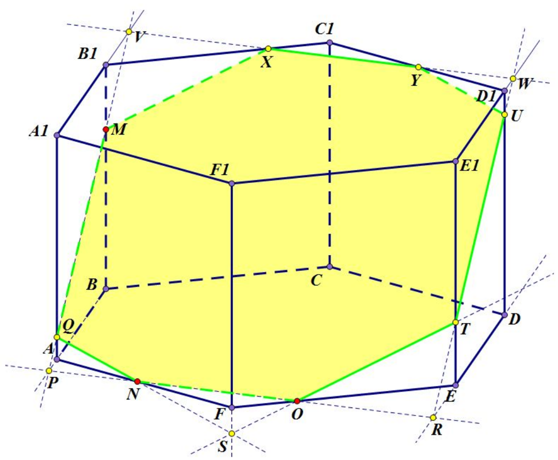
Составил

учитель математики

высшей категории

Гавинская Елена

Вячеславовна.



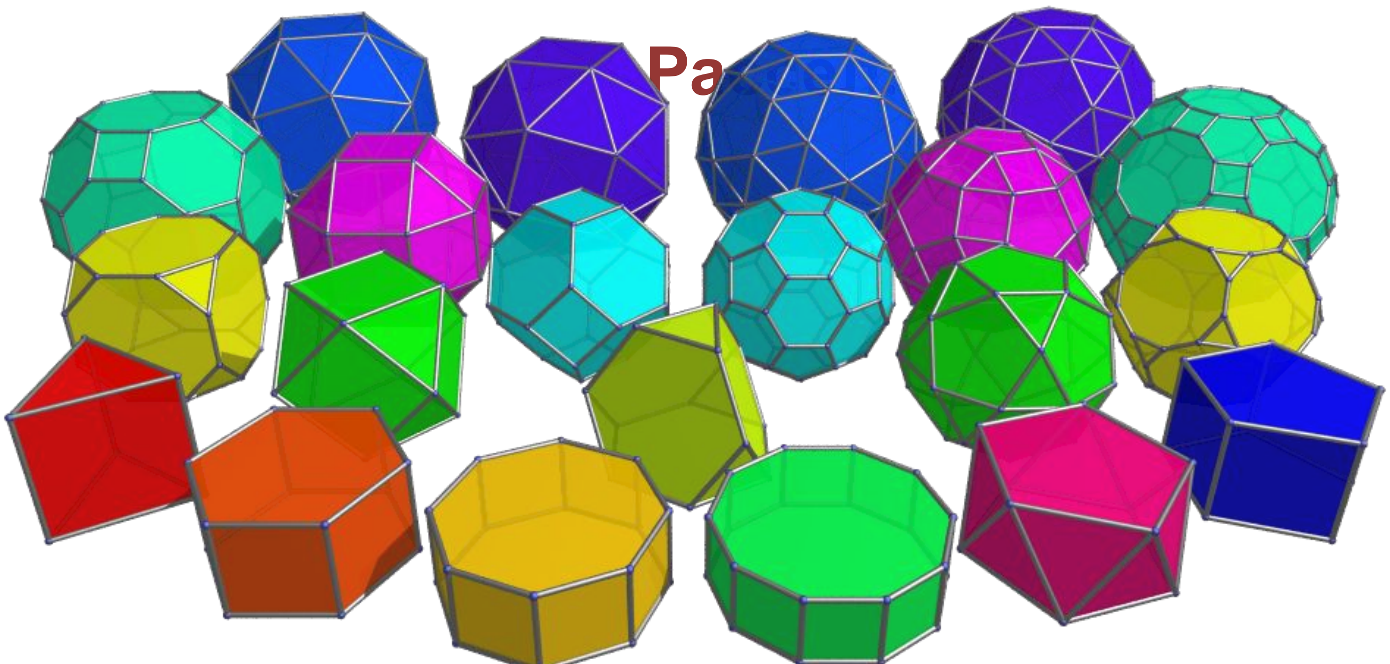
г.Калининград

2016-2017 учебный год

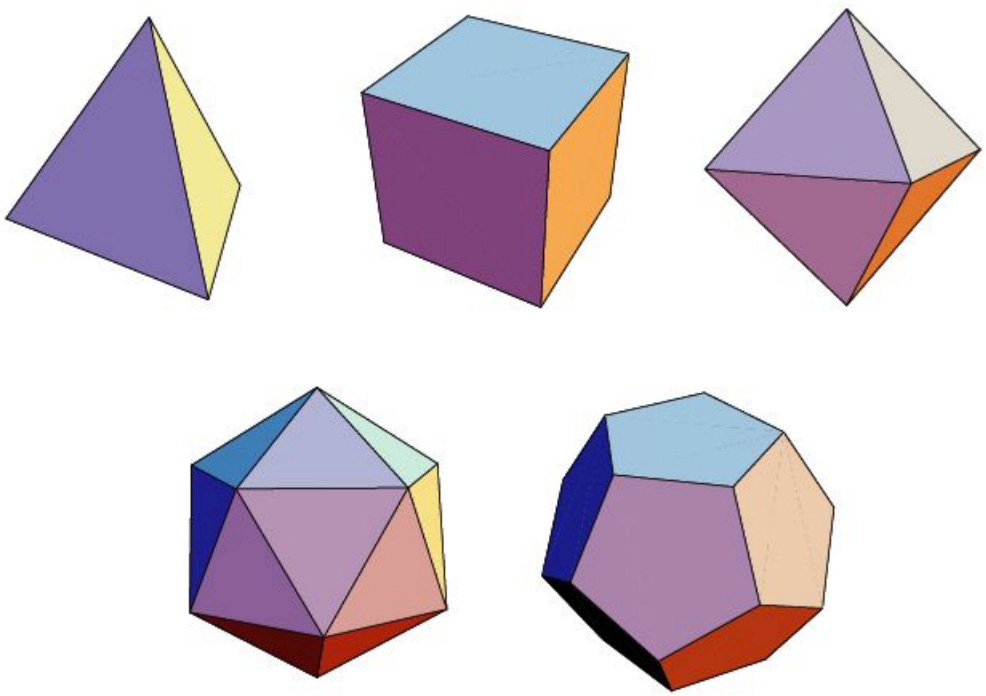
Математика владеет не только истинной, но и высшей красотой - красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.

Бертран

Ра



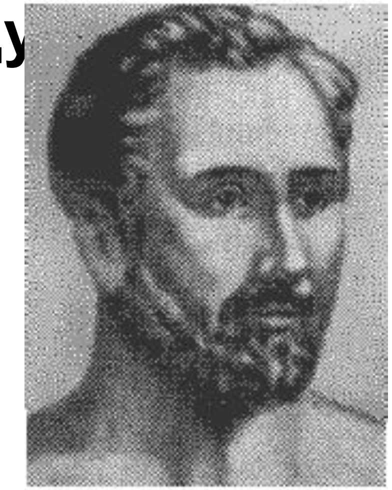
Тема «Многогранники» - одна из основных тем в школьном курсе геометрии. В ней, по образному выражению академика А.Д. Александрова ,сочетаются «Лед» и «Пламя», т.е. живое воображение и строгая



Сведения из истории о правильных многогранниках.

Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках находится в трактате Платона (427-347 до н.э.) «Тимаус». Поэтому правильные многогранники также называются **платоновыми телами** (хотя известны они были задолго до Платона). Каждый из правильных многогранников, а всего их пять, Платон ассоциировал с четырьмя «земными» элементами: земля (куб), вода (икосаэдр), огонь (тетраэдр), воздух (октаэдр), а также с «неземным» элементом-вселенной (додекаэдр). Знаменитый математик и астроном Кеплер построил модель Солнечной системы как ряд последовательно вписанных и описанных правильных многогранников и сфер.

Начиная с 7 века до нашей эры, в Древней Греции создаются философские школы , в которых происходит постепенный переход от практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства. Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики- это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых ду



Пифагор

(580 – 500 до н.э.)

Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем и Платон, полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды. Согласно их мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел.

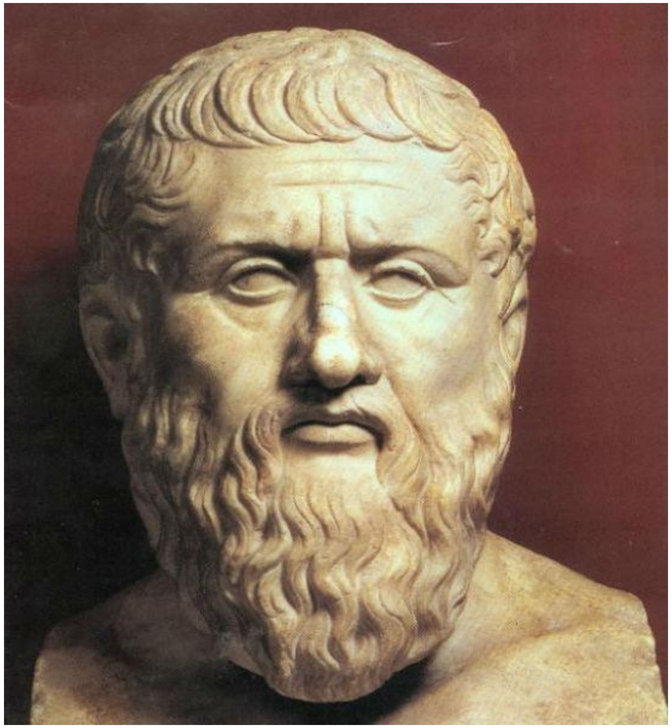
ОГОНЬ-ТЕТРАЭДР.

ВОЗДУХ-ОКТАЭДР.

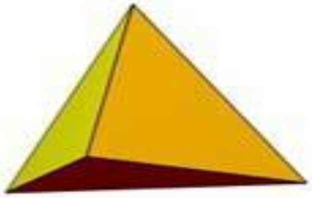
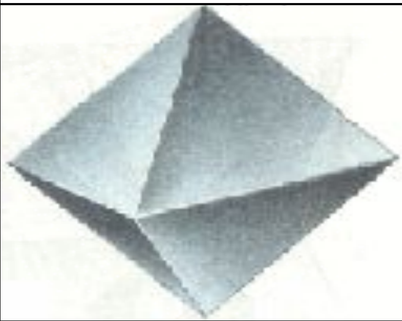
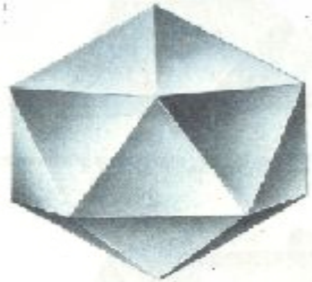
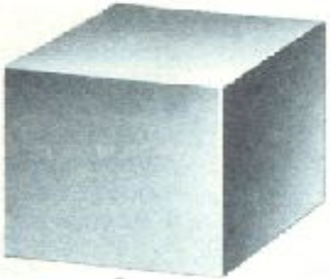
ВОДА-ИКОСАЭДР.

ЗЕМЛЯ-ГЕКСАЭДР (КУБ).

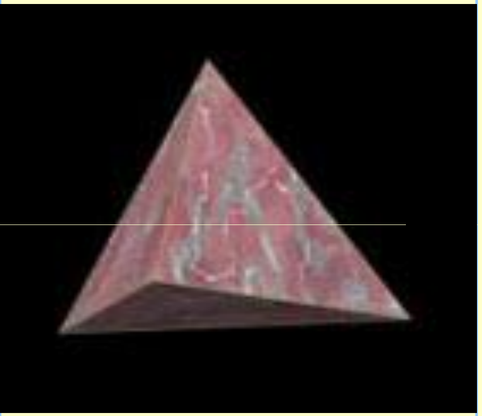
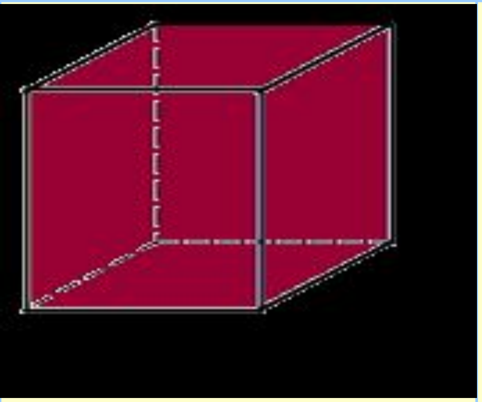
ВСЕЛЕННАЯ-ДОДЕКАЭДР.

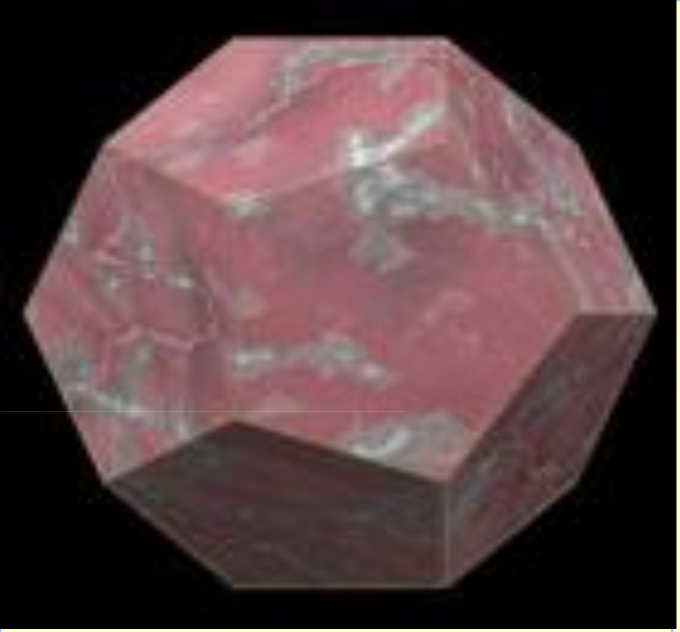


Платон

	**ОГОНЬ**	**ТЕТРАЭДР**	
	**ВОЗДУХ**	**ОКТАЭДР**	
	**ВОДА**	**ИКОСАЭДР**	
	**ЗЕМЛЯ**	**ГЕКСАЭДР (КУБ)**	
	**ВСЕЛЕННАЯ**	**ДОДЕКАЭДР**	

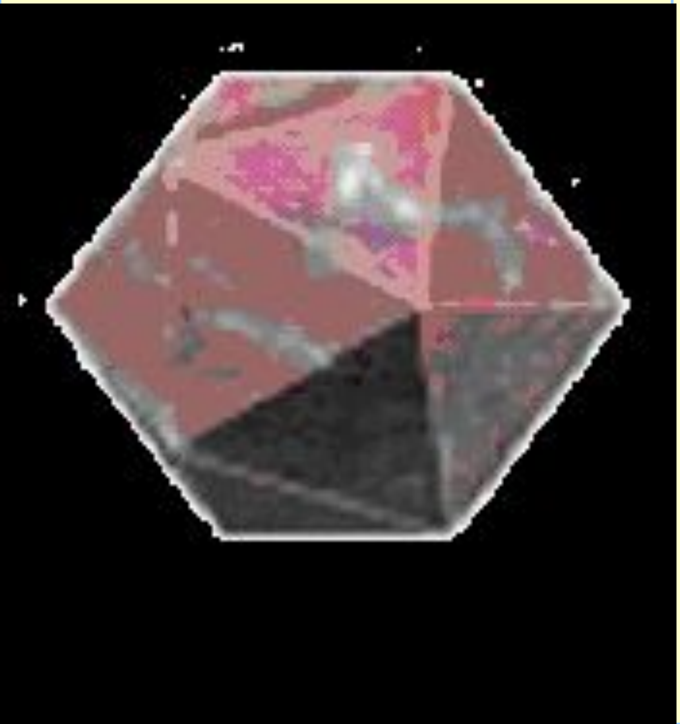
ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА

	**ТЕТРАЭДР**	Тетраэдр составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов. Таким образом, тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.
	**КУБ**	Куб составлен из шести квадратов. Каждая его вершина является вершиной трех квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов. Таким образом, куб имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер
	**ОКТАЭДР**	Октаэдр составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов. Таким образом, октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.



ДОДЕКАЭДР

Додекаэдр составлен из двенадцати равносторонних пятиугольников. Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градусов. Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер



ИКОСАЭДР

Икосаэдр составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов. Таким образом икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер .

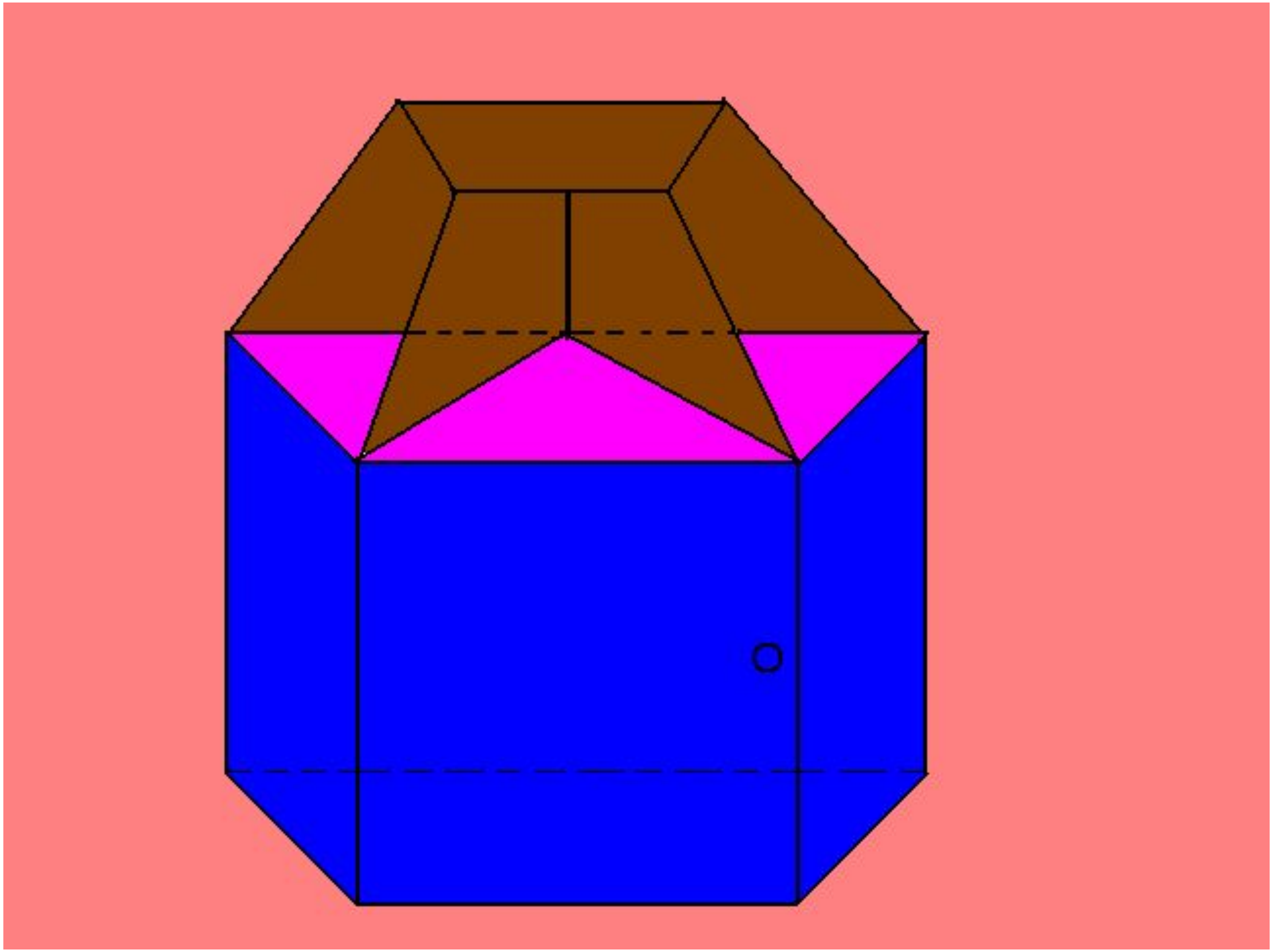
ИТАК, ПРОБЛЕМА.

В небольшой квартире очень мало места, некуда складывать книги, различные старые вещи, но, в то же время, громоздкие полки сужают пространство и не всегда вписываются в интерьер комнаты. Мелкие безделушки и статуэтки разбросаны по углам, но, к счасть … промиссное решение!

Решение поставленной проблемы.

Итак, спец-предложение: какая – то гипотетическая компания по разработке интерьера и новой мебели выпустила компактную полку-тумбочку, которая не займет слишком много места в квартире и будет необычным дополнением к образу комнаты. В ней поместятся некоторые книги, журналы и ненужные вещи, которые жалко выкинуть, также в верхней ее части можно расположить статуэтки, рамки для фотографий и многое другое.

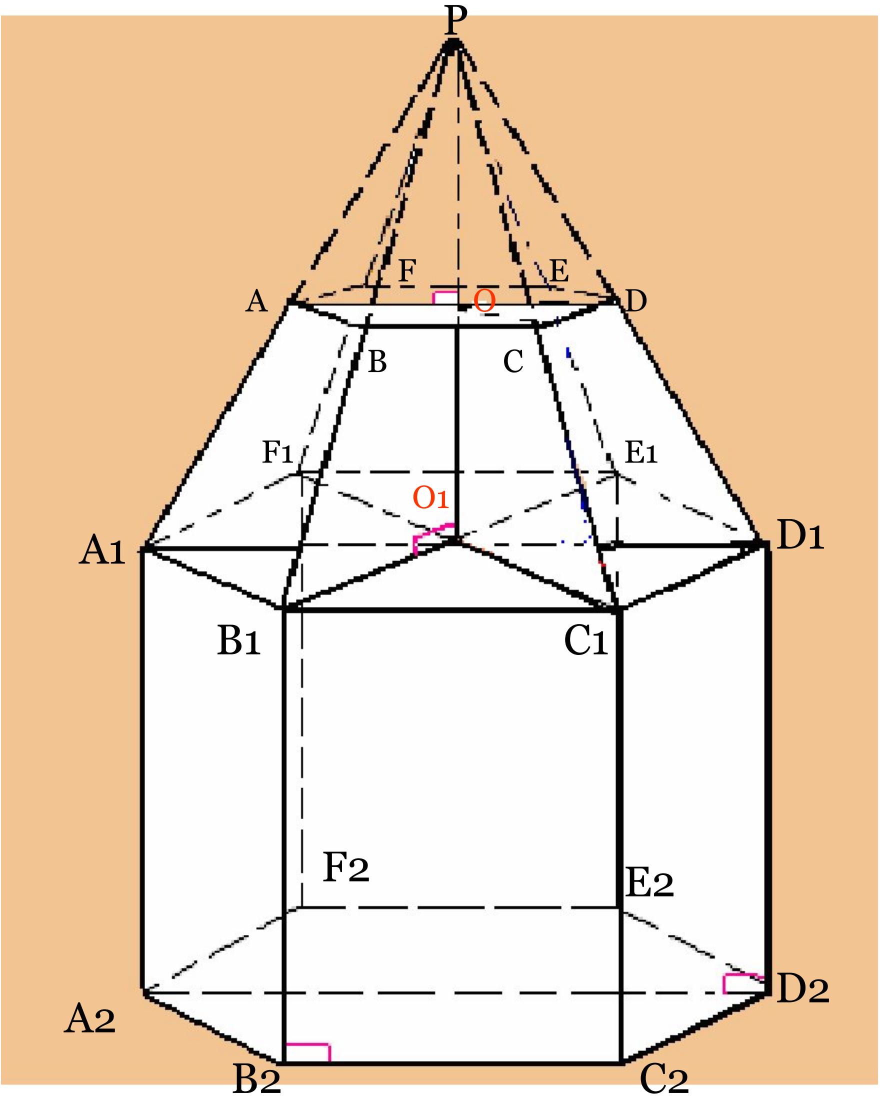
Общий вид изделия.



Практическая задача.

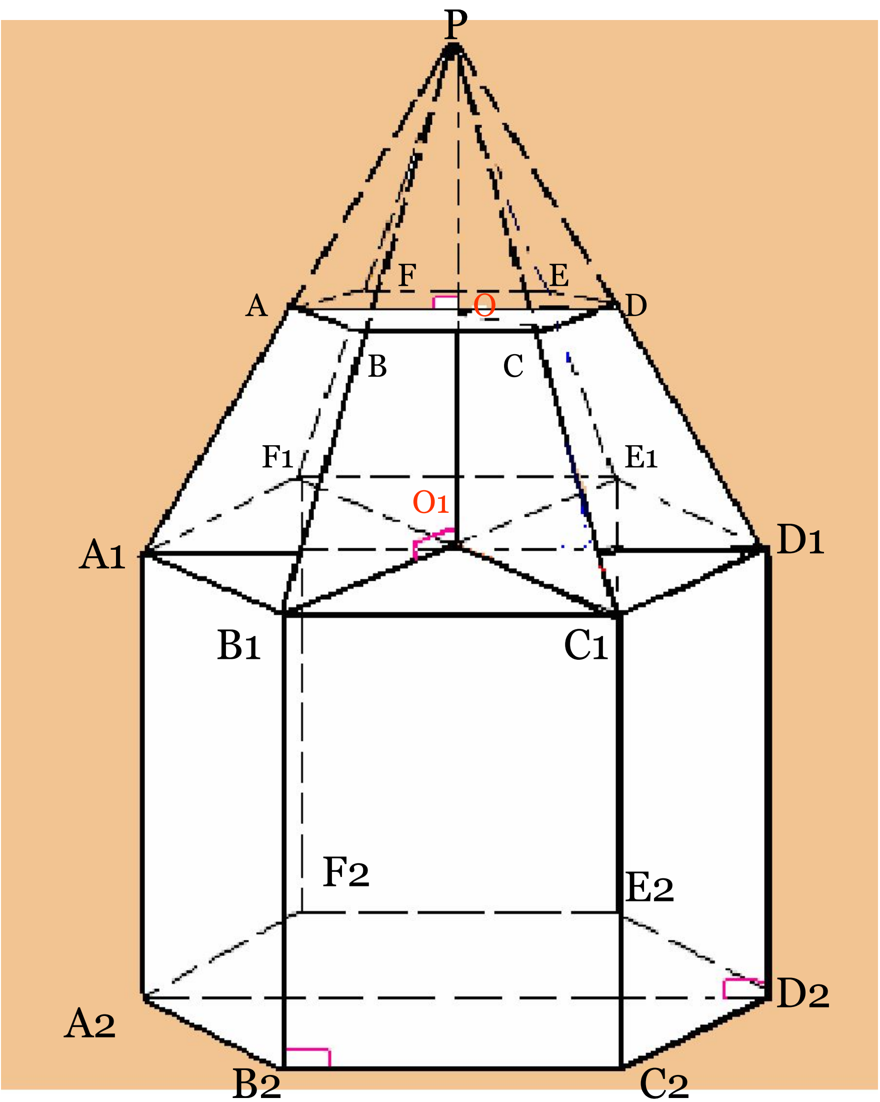
Для того, чтобы производители смогли затратить необходимое количество материала, который потребуется для изготовления нашей полки - тумбочки, нам необходимо высчитать площадь ее полной поверхности.

Геометрическая задача.



В правильной усеченной пирамиде $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ проведено диагональное сечение- AA_1D_1D, а в правильной шестиугольной призме $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ - $A_1D_1D_2A_2$. Нижнее основание пирамиды $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ является верхним основанием для призмы. Высота пирамиды OO_1=35 см, сторона нижнего основания пирамиды-A_1B_1=32 см, а верхнего- AB=18см. Боковое ребро пирамиды-AA_1=60см, боковое ребро призмы B_1B_2=70 см. Найти площадь полной поверхности призмы, т.е.(Sполн.призмы), площадь сечений, площадь верхнего основания усеченной пирамиды и площадь $ABCDA_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ (площадь изделия).

Исходные данные.



Дано:

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$-правильная усеченная пирамида,

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$-правильная призма, $A_1D_1D_2A_2$ и AADD-диагональные сечения, B_1B_2=70см, A_1B_1=32см, AA_1=60см, AB=18см, OO_1 перпендикулярен $(A_1B_1C_1)$, OO_1=35см.

Найти: а)Sполн.призмы,

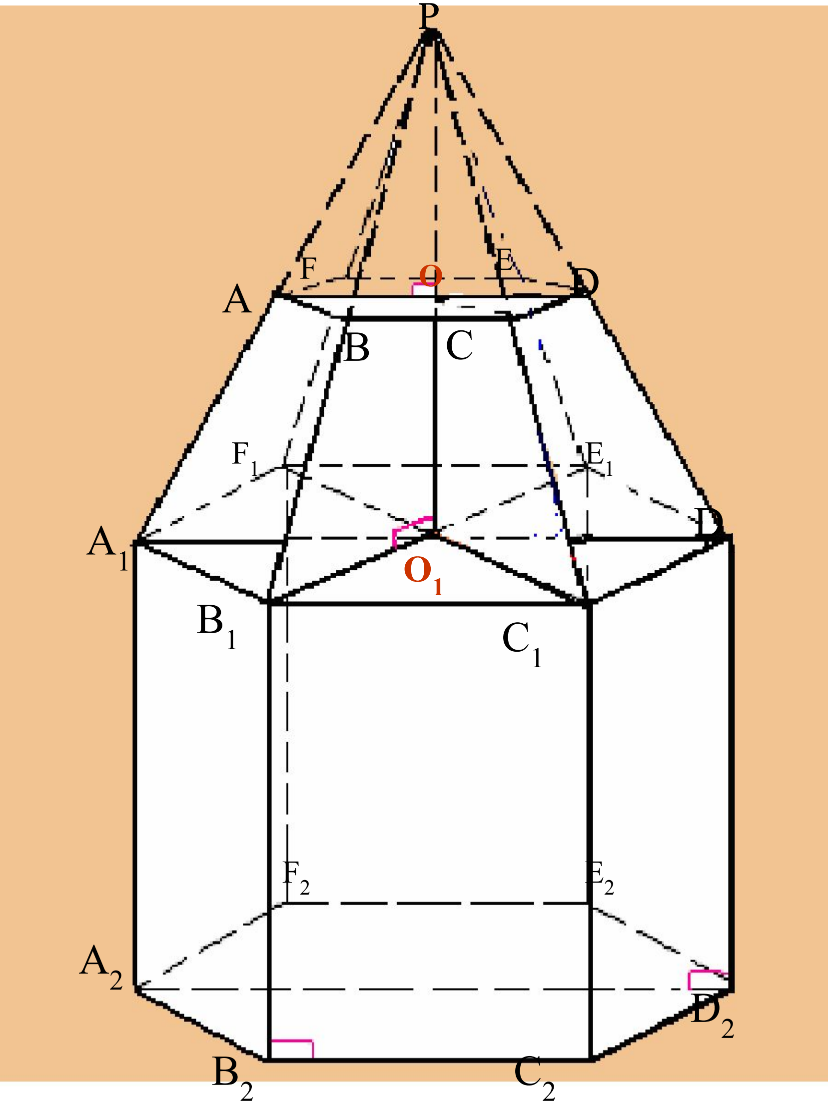
Sсечений,

S_{ABCDEF}.

б) Sполн.$ABCDA_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$

(Sизделия)

Решение.



1)Sполн.призмы =$SA_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$=
=Sбок+2$SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$

2)Достроим усеченную пирамиду $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ до пирамиды $PA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

а)Т.к.$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$-правильная усеченная пирамида, то $PA_1B_1C_1D_1E_1F_1$-правильная пирамида (по построению) и PABCDEF-правильная пирамида.

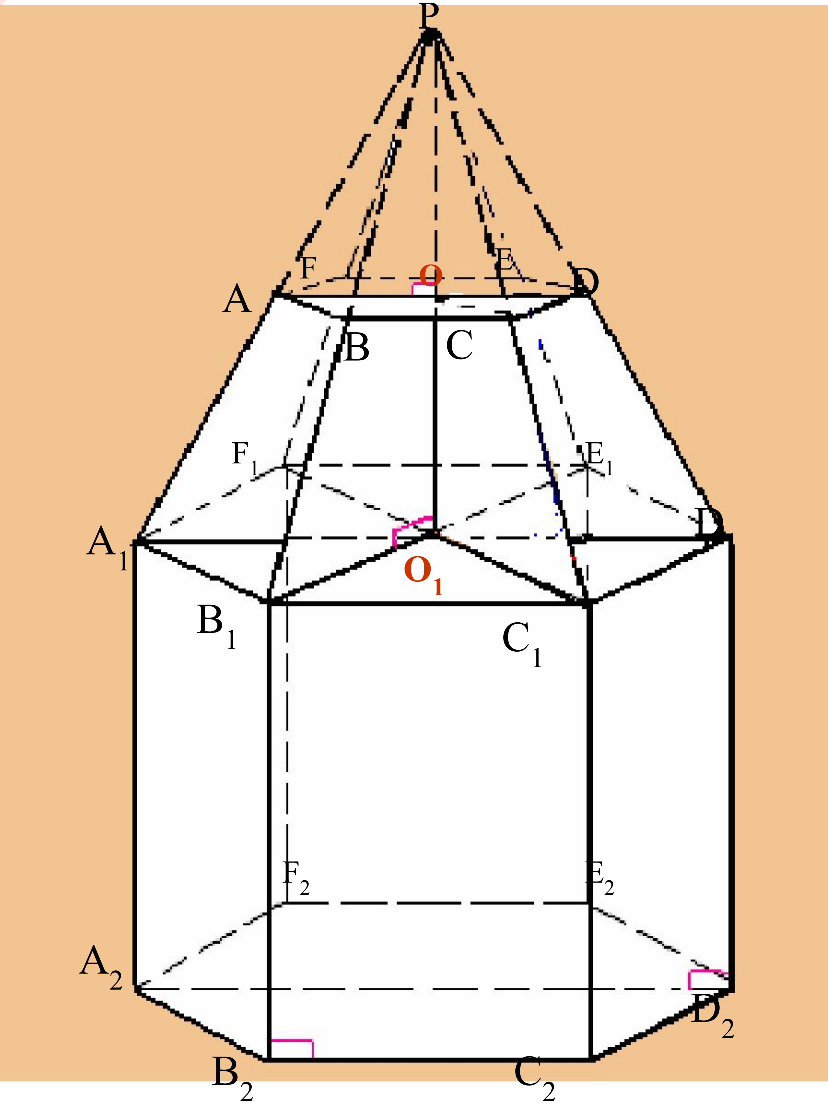
б) Из т.O_1 проведем O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1, O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1

3)а) Т.к. $OO_1 \perp (A_1B_1C_1)$ (по условию), то $OO_1 \perp O_1A_1$, $OO_1 \perp O_1B_1$ (по определению).
б) $B_1B_2 \perp (A_2B_2C_2)$(по определению правильной призмы).

4)Т.к $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$-правильная призма (по условию), то Sполн.призмы=Pосн · h+ + 2$SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$= a · n · B_1B_2+ 2 (3a^2 $\sqrt{3}$/2) =
=32 · 6 · 70+2(3 · 32^2 · $\sqrt{3}$/2)=13440+ 3 · $\sqrt{3}$ · 1024=
=3072 $\sqrt{3}$ +13440=3072($\sqrt{3}$+4,375) ($см^2$)=1,88 ($м^2$)

5)Т.к. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и ABCDEF- правильные шестиугольники(по определению прав. усеченной пирамиды), то R_1=AB, $R_2=A_1B_1$.

6) ΔPO_1B_1= ΔPO_1C_1= ΔPO_1D_1=… ΔPO_1A_1 (т.к. $PB_1=PC_1$= =…=PA_1, (по св-ву правильной пирамиды), PO_1- общая, $PO_1 \perp O_1B_1$, $P_1O_1 \perp O_1C_1$... $P_1O_1 \perp O_1A_1$(т.к. PO-продолжение OO_1(по построению))
⇒ $O_1B_1=O_1C_1=O_1D_1…=O_1A=R_2$, значит, R_2=32(см)(по катету и гипотенузе).



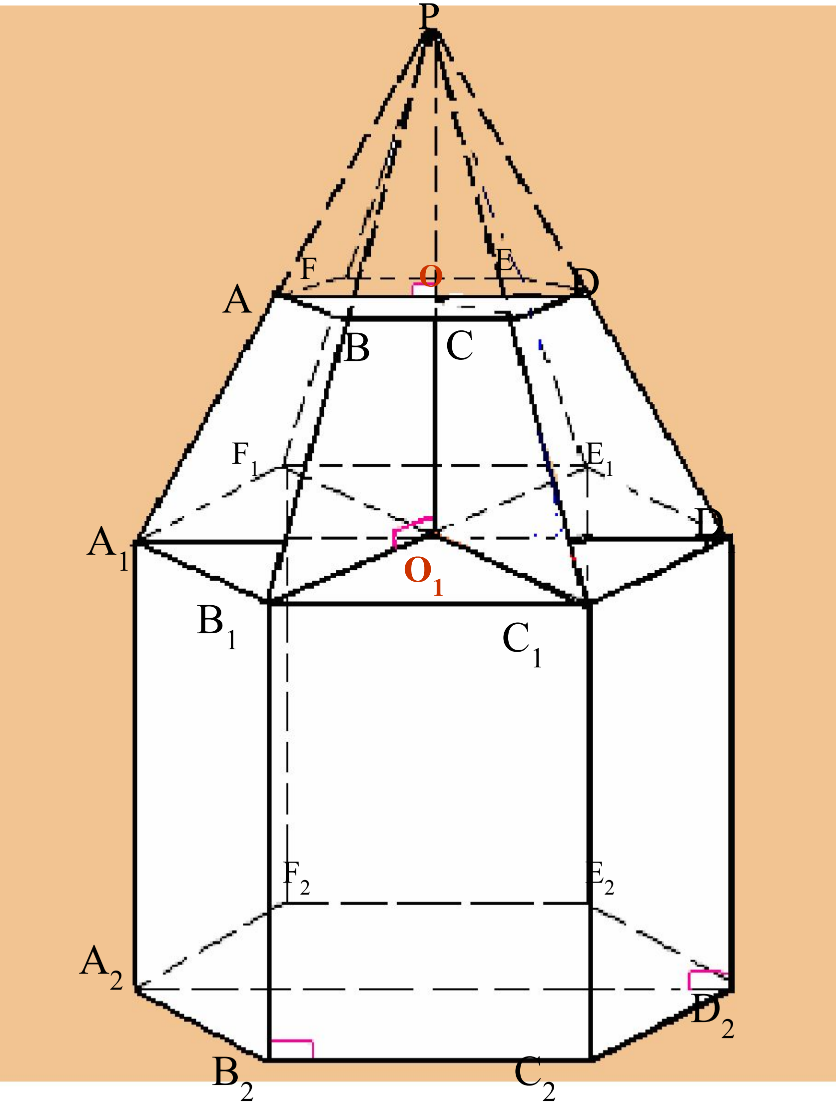
7) $\Delta POA = \Delta POB = \ldots = \Delta POF$(т.к. PO-общая, $PO \perp OA$, $PO \perp OB$, … $PO \perp OF$(PO-продолжение OO_1), $PA=PB=\ldots=PF$)(по св-ву прав. пирамиды) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $OA=OB=\ldots=OF=R_1$, значит, $R_1=18$(см).

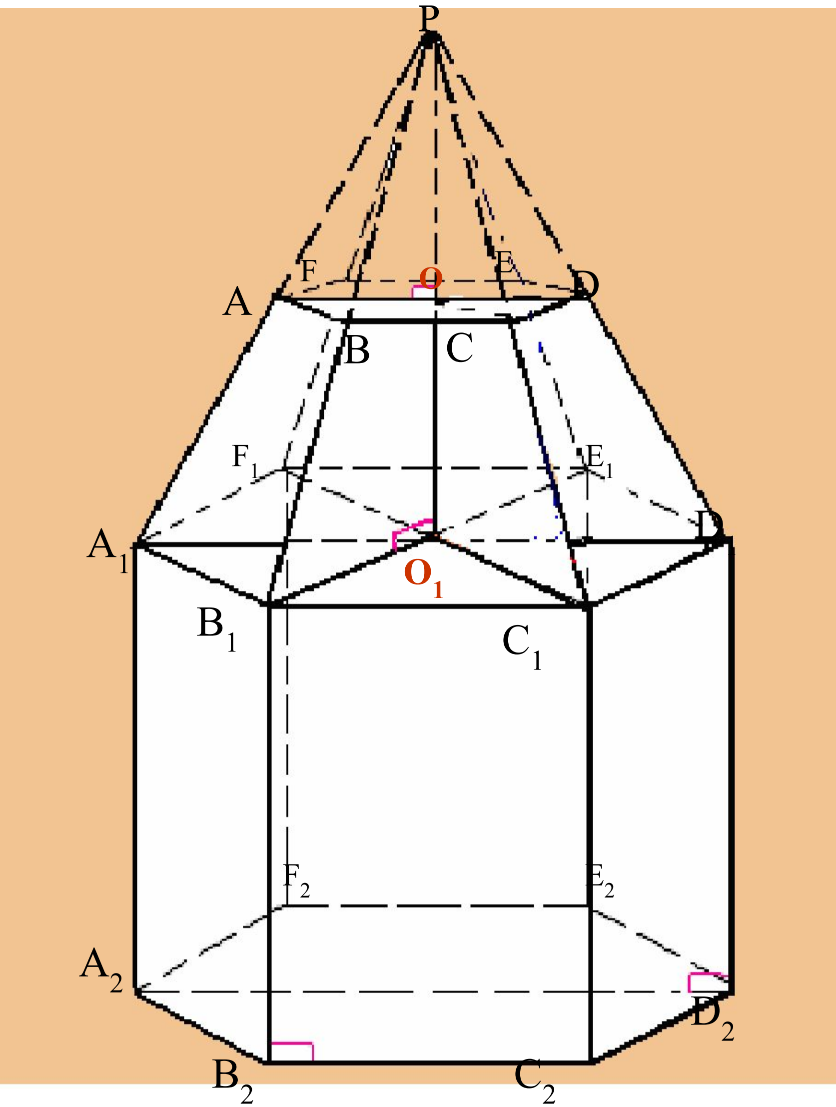
8) $S_{ABCDEF}= 3\sqrt{3}/2 \cdot R_1^{\,2}$; $S_{ABCDEF}=3\sqrt{3}/2 \cdot 18^2=486\sqrt{3}$ (см^2)=0,084(м^2)

9) а)(ABC) $\parallel$ $(A_1B_1C_1)$ (доказали)
$AA_1D_1D \cap (ABC)=AD$,
$AA_1D_1D \cap (A_1B_1C_1)=A_1D_1$ $\Bigg\} \Longrightarrow$
$\Rightarrow AD \parallel A_1D_1$(по св-ву) но, $AA_1 \cap DD_1=P$ (по построению) $\Longrightarrow$
AA_1D_1D-трапеция, т.е. $S_{AA_1D_1D}$ =
$= \frac{1}{2}(AD+A_1D_1)OO_1$(где $OO_1 \perp A_1D_1$(по определению)),т.е. Sсечения1=
$= \frac{1}{2}(2\cdot 18+2\cdot 32)35=1750$(см^2)=0,175(м^2) .

б) $A_1A_2=D_1D_2$, $A_1A_2 \parallel D_1D_2$(по св-ву призмы) $\Longrightarrow$
$\Rightarrow A_1A_2D_2D_1$-параллелограмм(по признаку),
но $D_1D_2 \perp (A_2B_2C_2)$ (по св-ву), значит, $D_1D_2 \perp A_2D_2$(по определению) $\Longrightarrow A_1A_2D_2D_1$ - прямоугольник(по определению), т.е.
$S_{A_1A_2D_2D_1}=A_1A_2 \cdot A_2D_2$, т.е.
Sсечения2=70 $\cdot$2$\cdot$ 32=4480(см^2)=0,448(м^2)

Чтобы найти площадь полной поверхности нашего изделия, т. е. площадь фигуры $ABCDA_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, нам необходимо вычислить половину от площади полной поверхности призмы, т.к. по условию задачи у нас проведено диагональное сечение этой фигуры, которое делит ее на две равные части, затем сложить площади граней OBB_1O_1, OCC_1O_1 с ½ верхнего основания усеченной пирамиды и, прибавив к этой площади- площади наших двух сечений, мы получим площадь полной поверхности изделия.





10) Аналогично, как и в действии 9)а) можно доказать, что грани OBB_1O_1, OCC_1O_1,- трапеции, значит, их площади рассчитываются по формуле $S=0,5(a+b)h$.

11) Трапеции OBB_1O_1,OCC_1O_1-равные, т.к. все их стороны равны друг другу(OO_1-общая,$OB=OC$,$O_1B_1=O_1C_1$,$BB_1=CC_1$(док-ли)), значит, $S_{OCC_1O_1}= 0,5\ (OC+O_1C_1)OO_1$(т.к. $OO \perp O_1C_1$ (доказали))

Sтрап.= 0,5(18+32)35=875 (см^2)=0,875 (м^2) .

12)$S_{ABCDEF}=3\cdot 18^2\cdot \sqrt{3}/2=486\sqrt{3}$(см^2)=0,084(м^2).

13)$S_{ABCDA_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2}$=0,5Sпризмы + +$S_{AA_1D_1D}$+$S_{A_1A_2D_2D_1}$ + 0,5 S_{ABCDEF}++2$S_{OCC_1O_1}$;

Sизд.=0,94+0,175+ 0,448+ 0,042+2 · 0,875=3,415(м^2).

Ответ:3,415 м^2

ЗНАЧИТ,
площадь полки-тумбочки
равна 3,415 м^2.

"Когда мы стремимся искать неведомое нам, то становимся лучше, мужественнее и деятельнее тех, кто полагает, будто неизвестное нельзя найти и незачем искать."

ПЛАТОН.