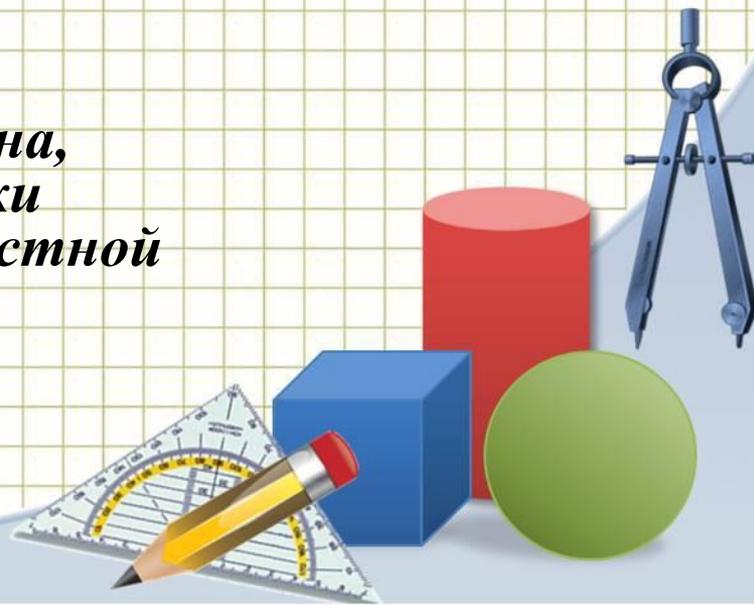


Стереометрия

Аксиомы стереометрии

*Перминова Елена Витальевна,
преподаватель математики
ГБПОУ СО «Свердловский областной
педагогический колледж»*

г. Екатеринбург



Геометрия

Планиметрия

Стереометрия

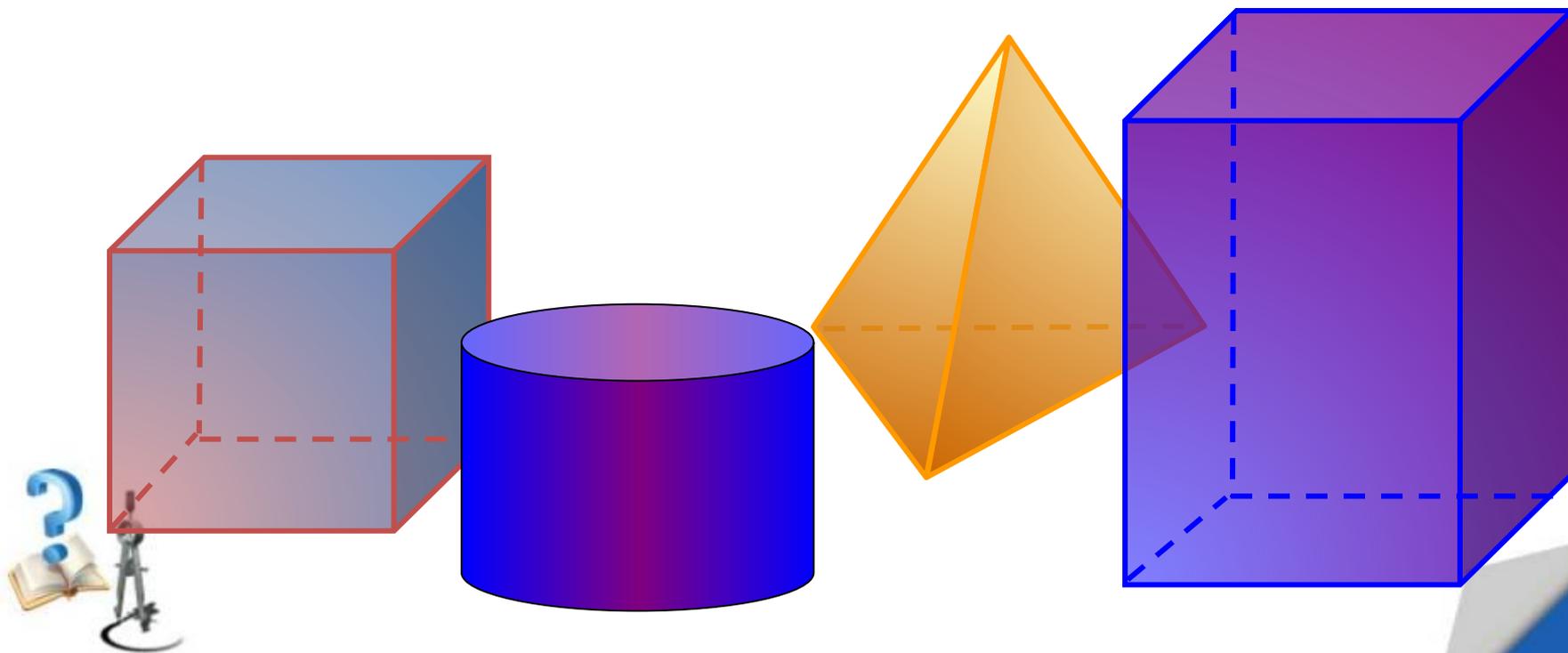


stereos

телесный, твердый,
объемный,
пространственный

Стереометрия

это подраздел геометрии, изучающий свойства фигур в пространстве



stereos

Пространство - это множество, элементами которого являются точки и в котором выполняется система аксиом стереометрии, описывающая свойства точек, прямых и плоскостей



Для изучения стереометрии

Надо научиться делать чертежи и уметь читать их.

Правильный чертеж поможет понять, представить и проиллюстрировать содержание задачи.

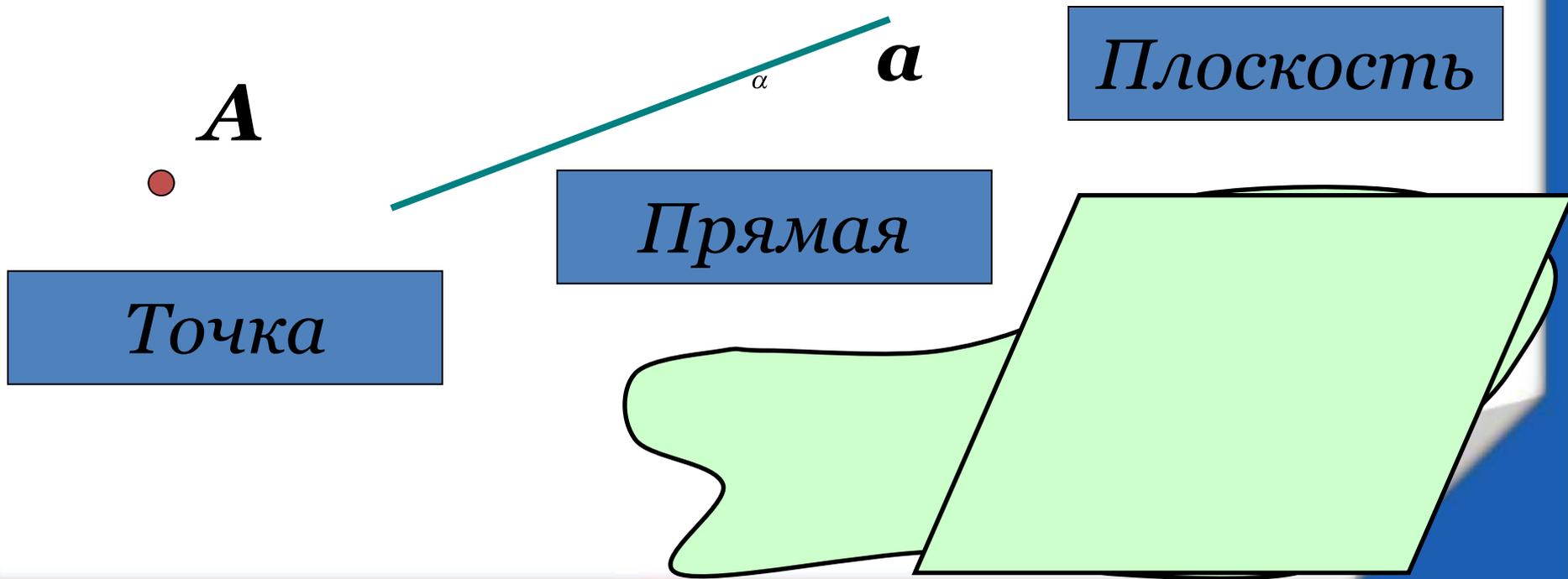
Ключ к изучению стереометрии - пространственное воображение в сочетании с логикой мышления.



Стереометрия

-Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

Основные фигуры в пространстве:



Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» объемный, пространственный, «метрео» – мерить.

Основные фигуры: точка, прямая, плоскость.



СТЕРЕОМЕТРИЯ

точка A, B, C, \dots

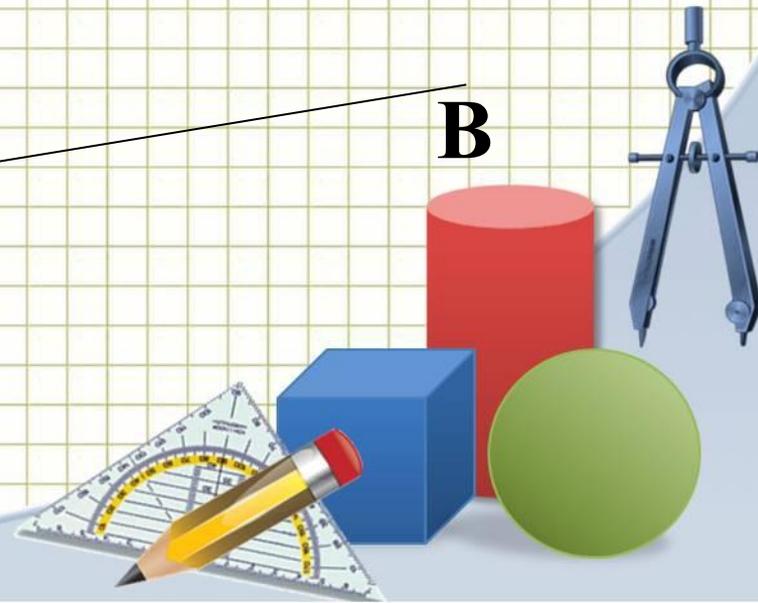
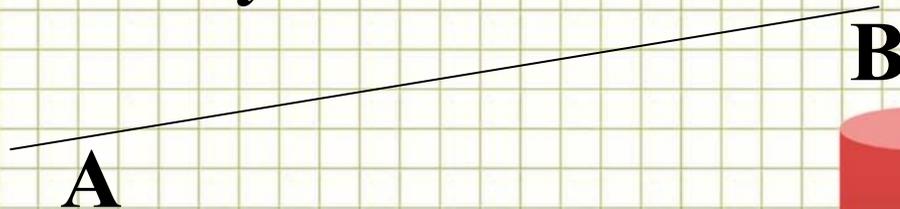
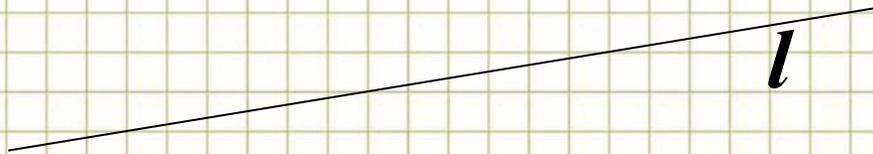
прямая a, b, c, \dots
или AB, BC, CD, \dots

плоскость $\alpha, \beta, \gamma,$

Для обозначения точек как и в планиметрии используют прописные латинские буквы:

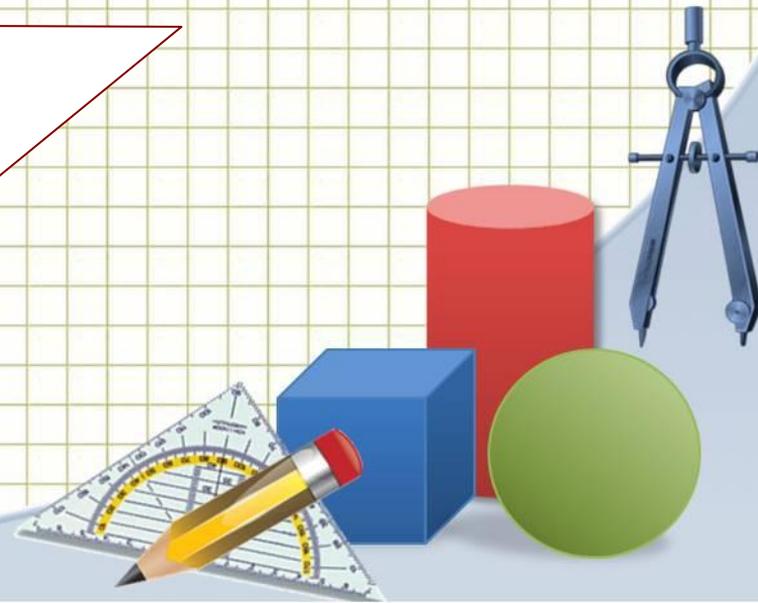
• F

Прямую обозначают одной строчной латинской буквой и двумя прописными латинскими буквами:



Плоскость в стереометрии обозначают греческими буквами, например: α β γ

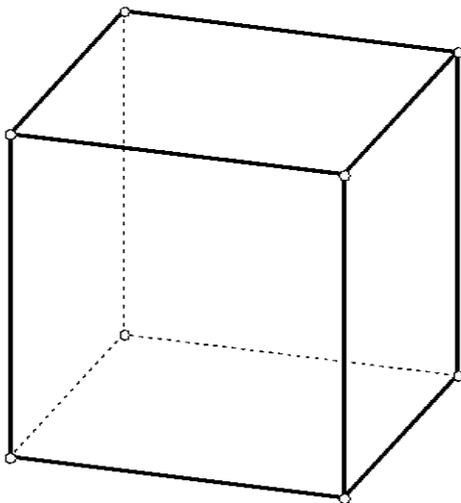
А на рисунках чаще всего плоскость изображают в виде параллелограмма. Но следует понимать и представлять себе данную геометрическую фигуру как неограниченную во все стороны.



Основные фигуры в пространстве

• A

Прописные латинские буквы A, B, C,

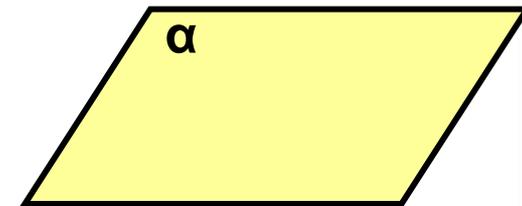


куб

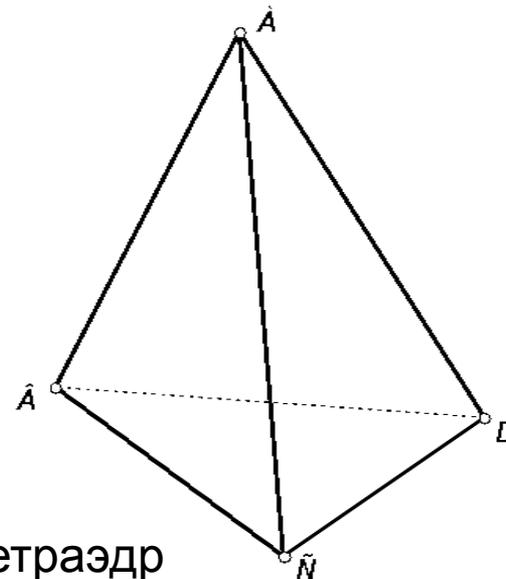
a



Строчные латинские буквы a, b, c, d, e, ...

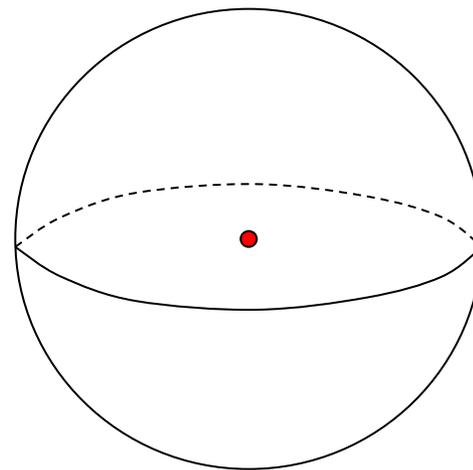
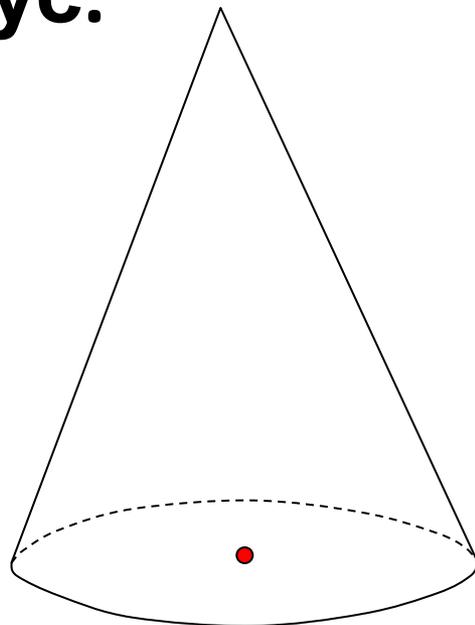
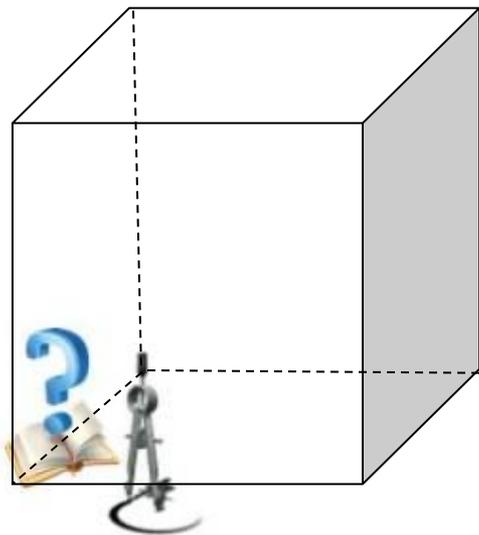


Греческие буквы α, β, γ, λ, ...



тетраэдр

Наряду с основными фигурами мы будем рассматривать геометрические тела и их поверхности. Такие, как: куб, параллелепипед, призма, пирамида. А также тела вращения: шар, сфера, цилиндр, конус.



Основные понятия стереометрии

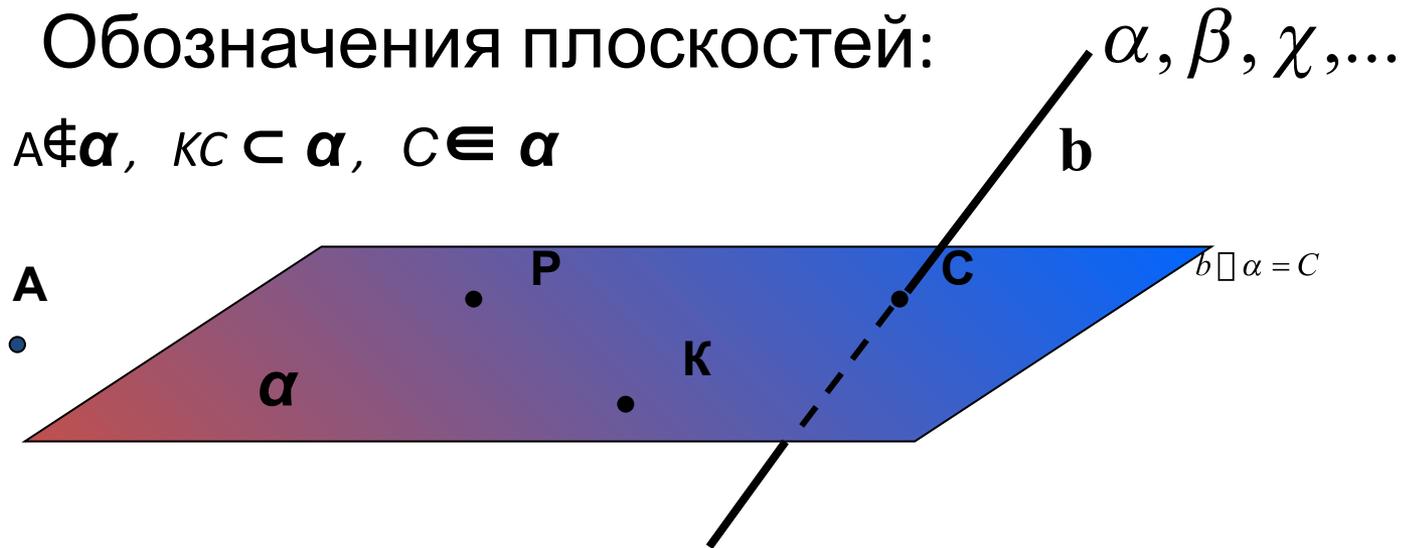
Обозначение точки: $A; B; C; M \dots$

Обозначение прямой: $a; b, c, h$ или $AB, BC \dots$

Плоскости - это фигуры, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.

Обозначения плоскостей:

$A \notin \alpha, KC \subset \alpha, C \in \alpha$

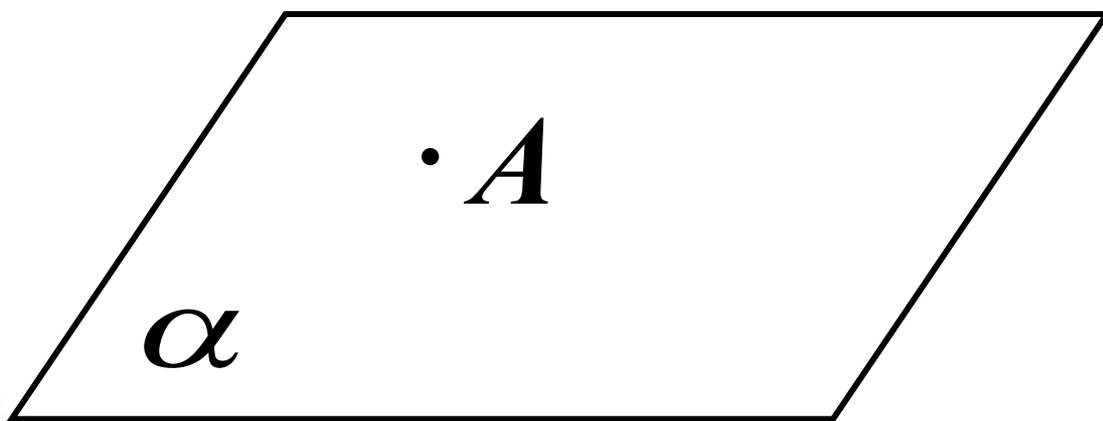


Прочти чертеж

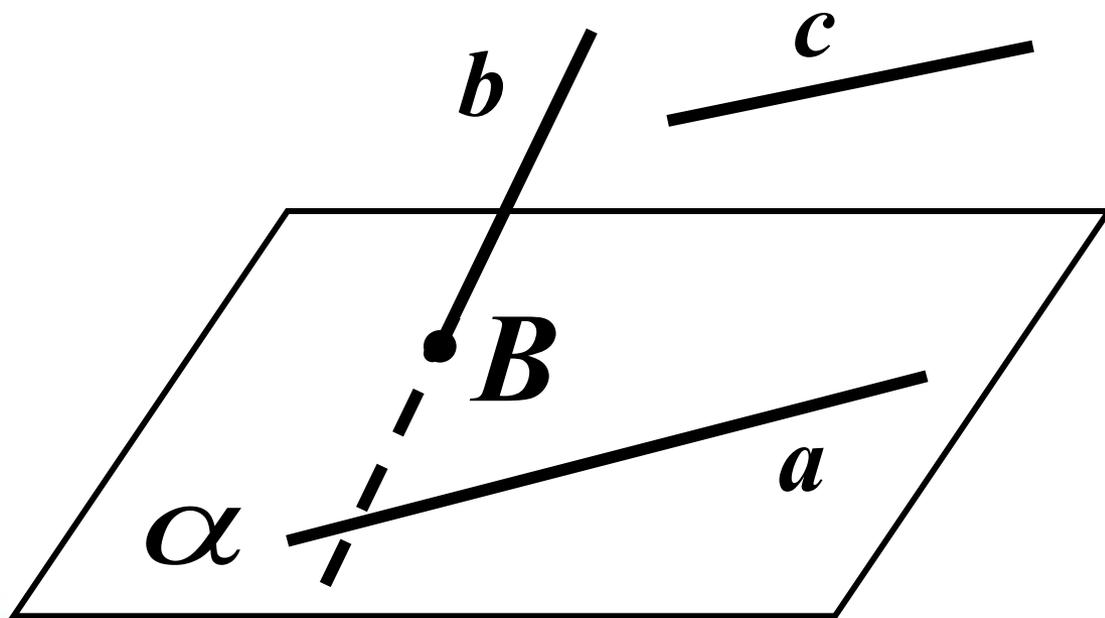
• C

$A \in \alpha$

$C \notin \alpha$



Прочти чертеж



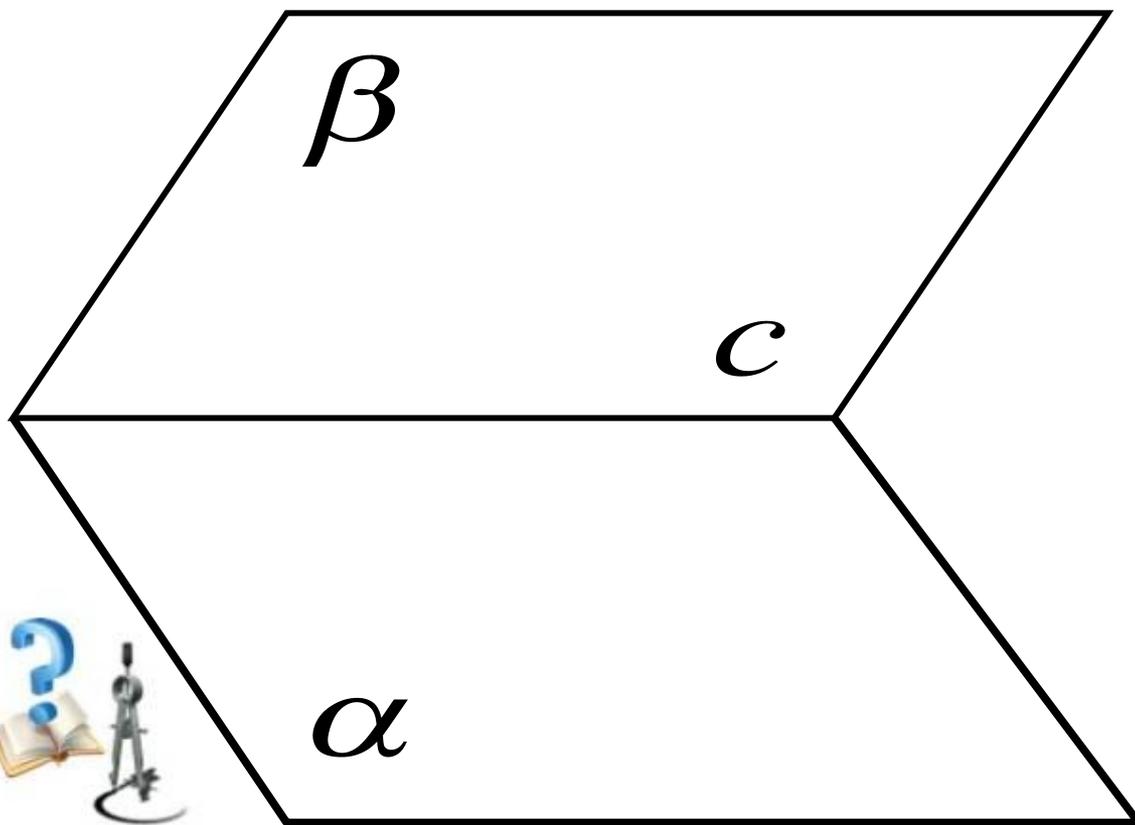
$$a \in \alpha$$

$$b \cap \alpha = B$$

$$c \notin \alpha$$



Прочти чертеж



$$\alpha \cap \beta = c$$

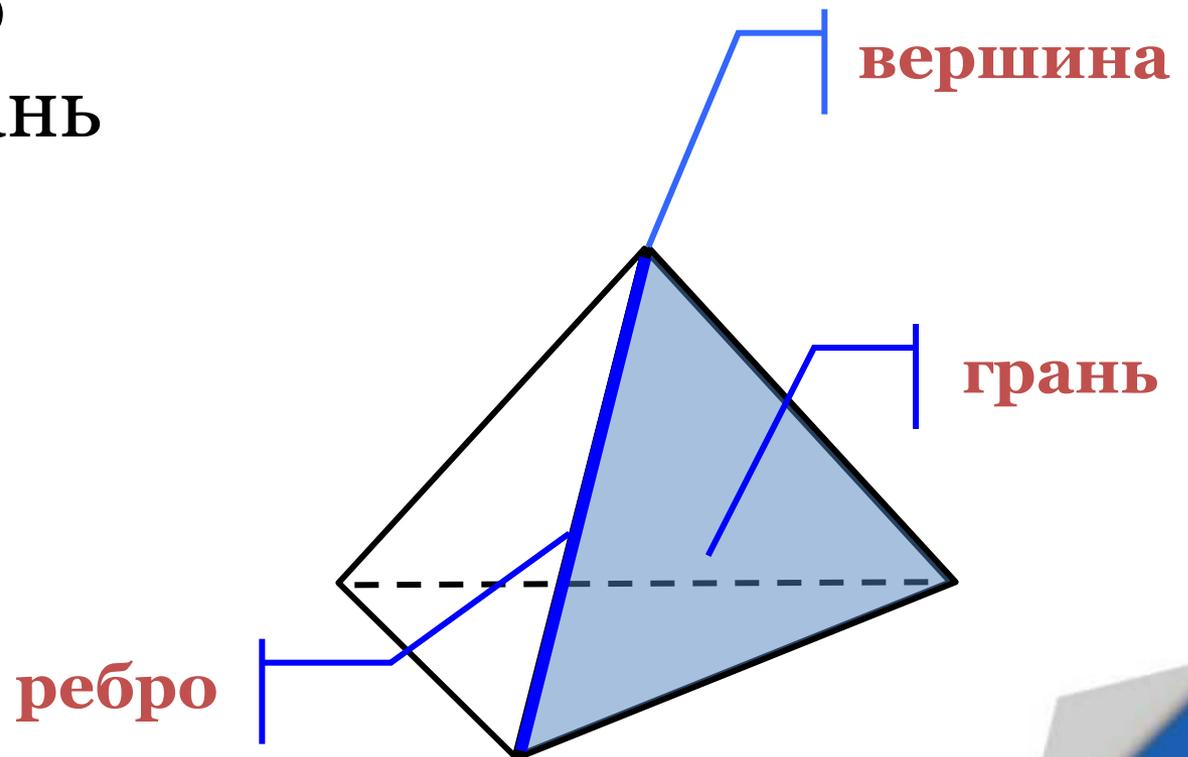


Геометрические понятия

Точка – вершина

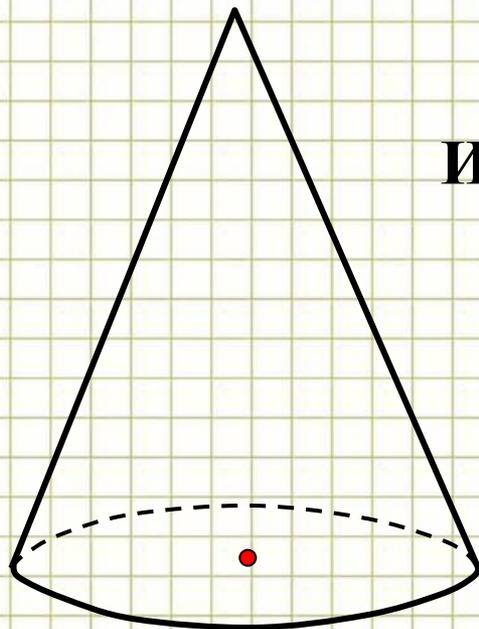
Прямая – ребро

Плоскость – грань

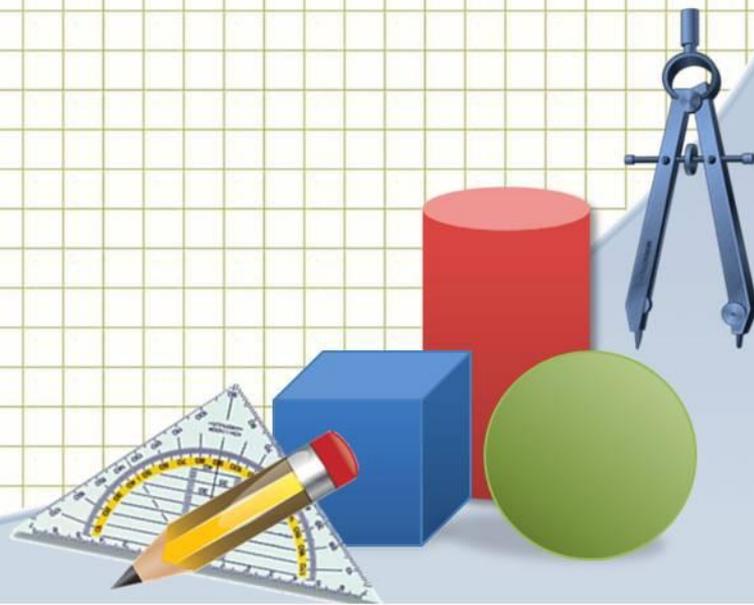


При изучении в курсе стереометрии геометрических тел пользуются их плоскими изображениями на чертеже.

Изображением пространственной фигуры служит ее проекция на плоскость.



Изображения конуса



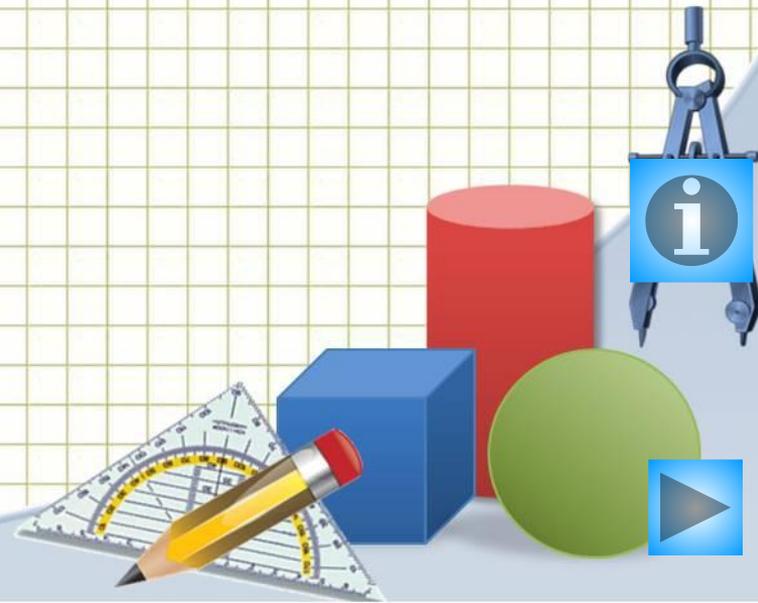
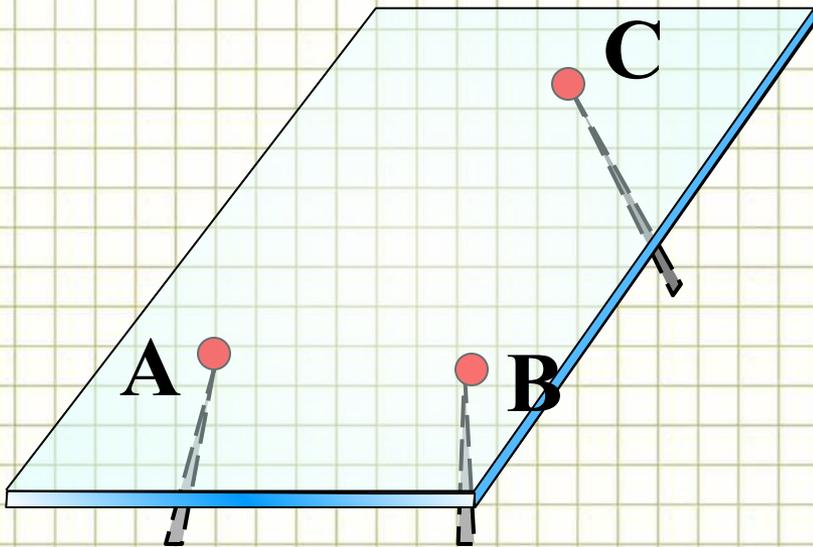
Изучая свойства геометрических фигур – воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит прикладное значение геометрии.

Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.



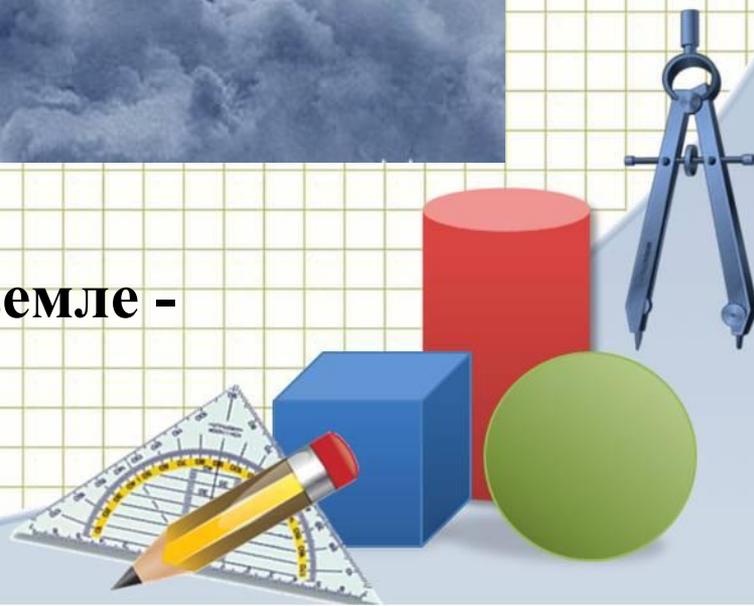
Основные свойства точек, прямых и плоскостей выражены в аксиомах. Существует множество аксиом стереометрии, в учебнике вам представлены три:

A_1 . Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



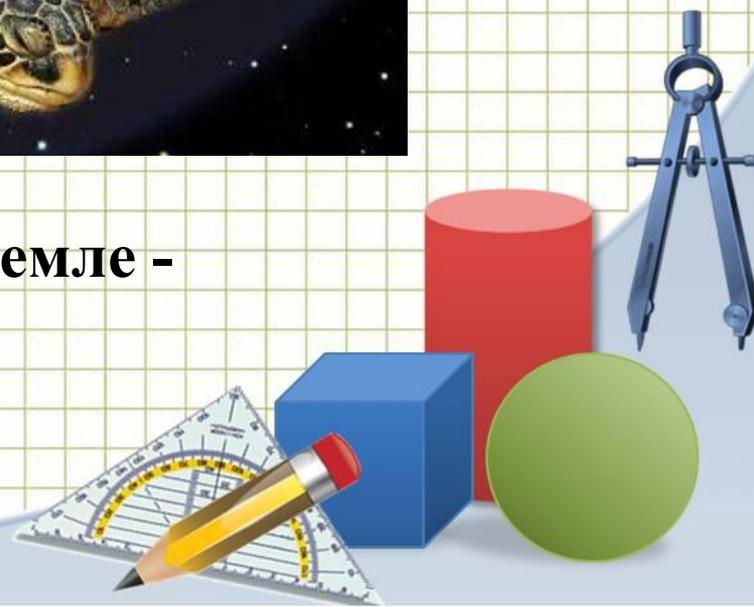


**Древнее представление о земле -
пример к аксиоме A_1**

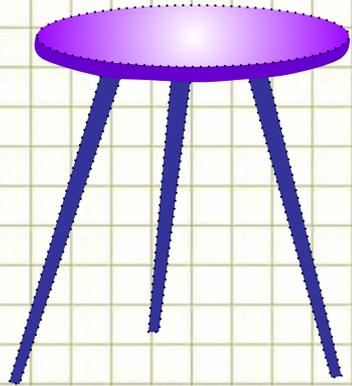




Древнее представление о земле -
пример к аксиоме A_1



Самый простой пример к аксиоме A_1 из повседневной жизни:

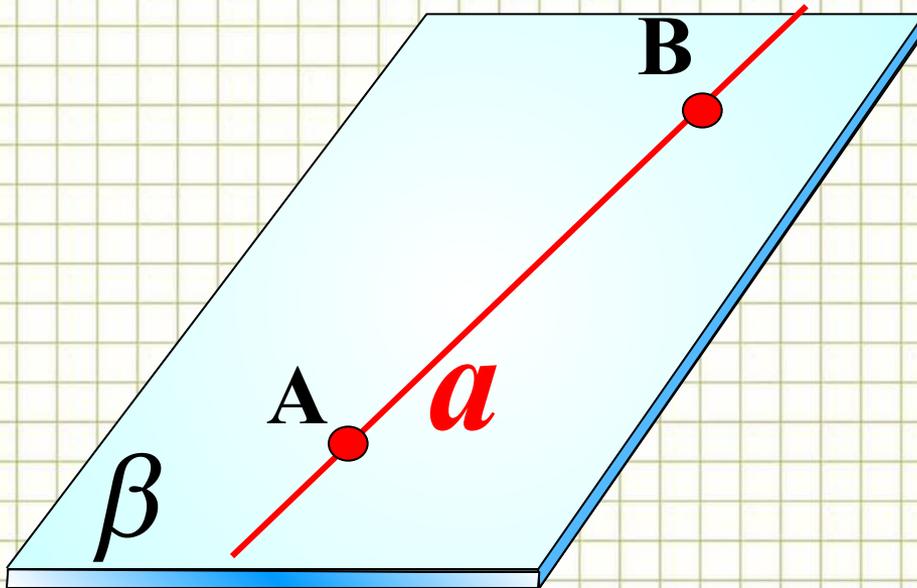


Табурет с тремя ножками всегда идеально встанет на пол и не будет качаться. У табурета с четырьмя ножками бывают проблемы с устойчивостью, если ножки стула не одинаковые по длине.

Табурет качается, т. е. опирается на три ножки, а четвертая ножка (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.



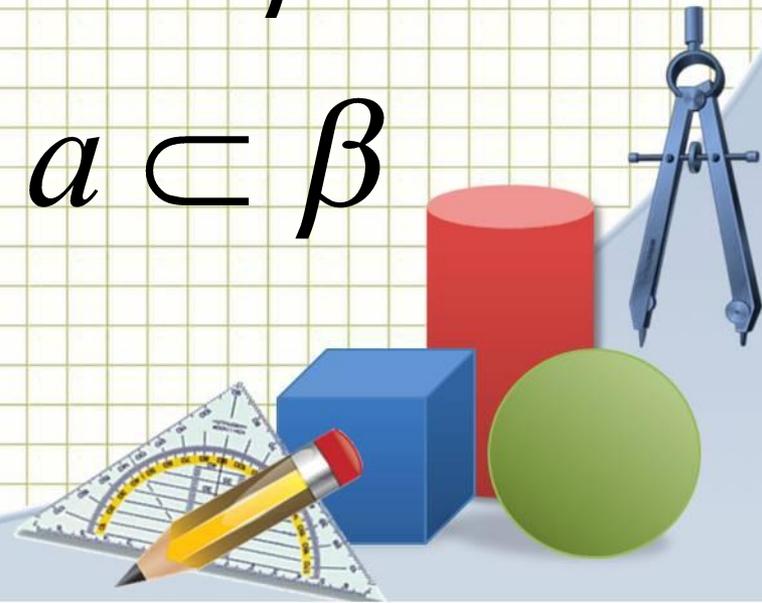
A_2 . Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.



$$A \in \beta$$

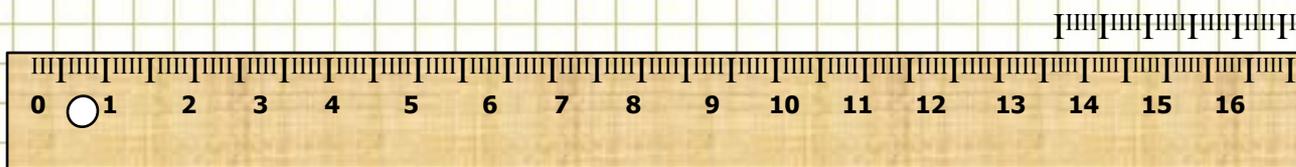
$$B \in \beta$$

$$a \subset \beta$$

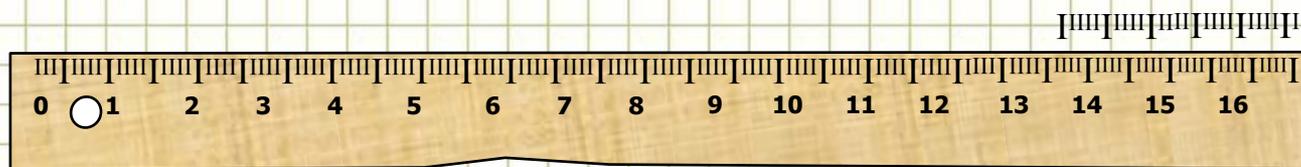


Свойство, выраженное в аксиоме A_2 , используется для проверки «ровности» чертежной линейки.

Линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола.

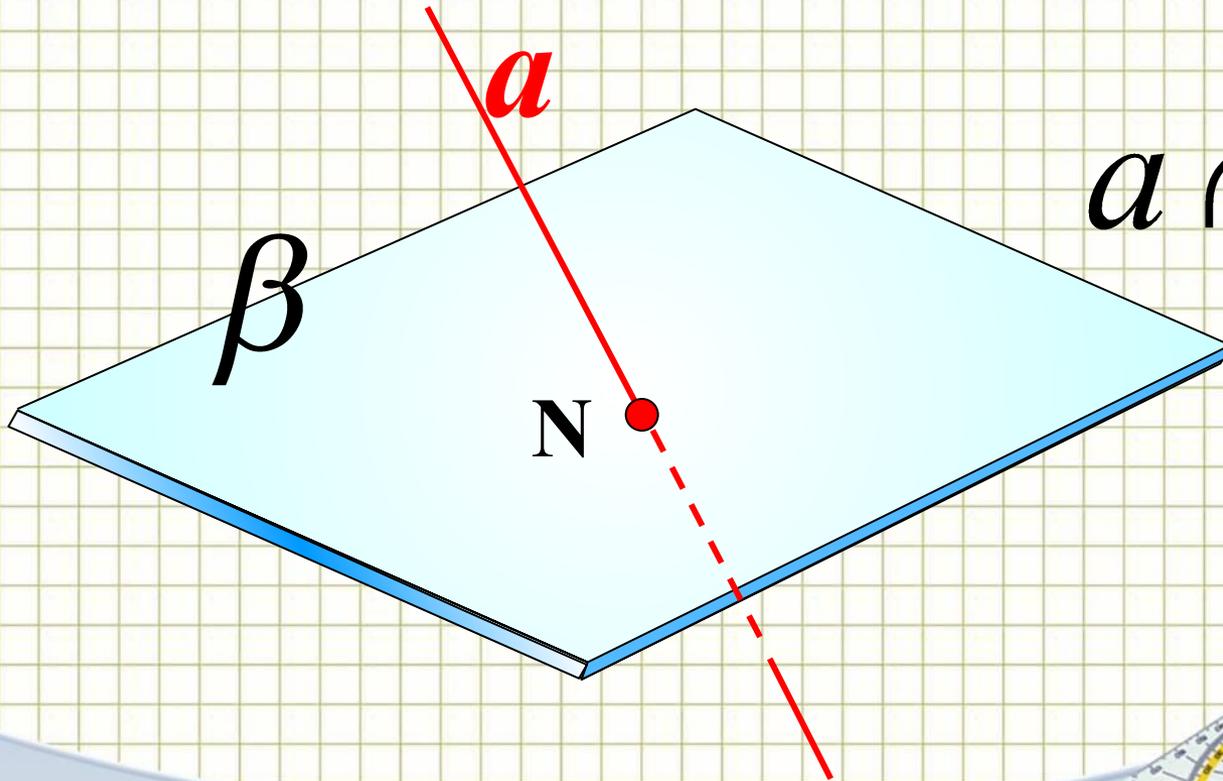


Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.

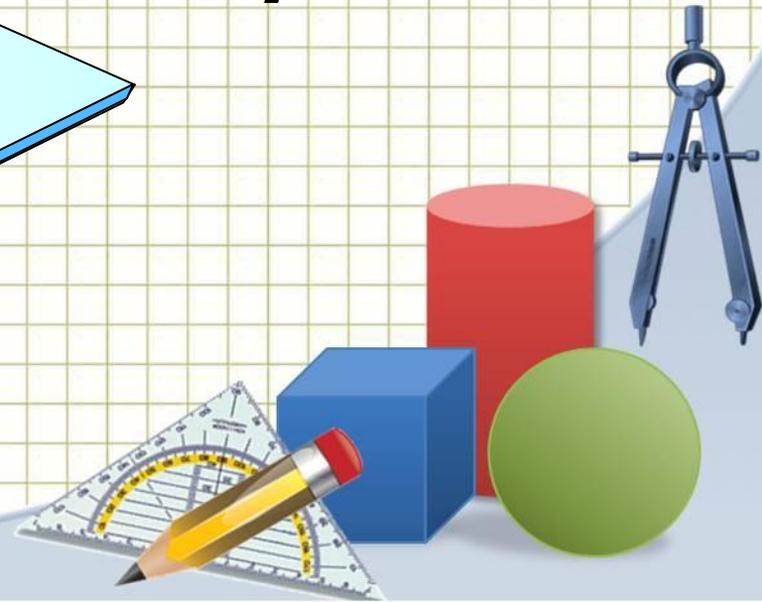


Следствия из аксиомы A_2 :

1. Если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.
2. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



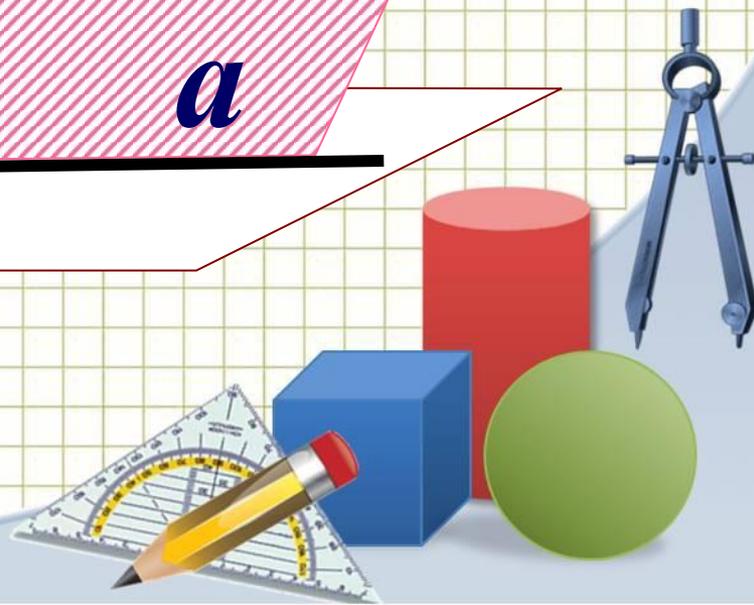
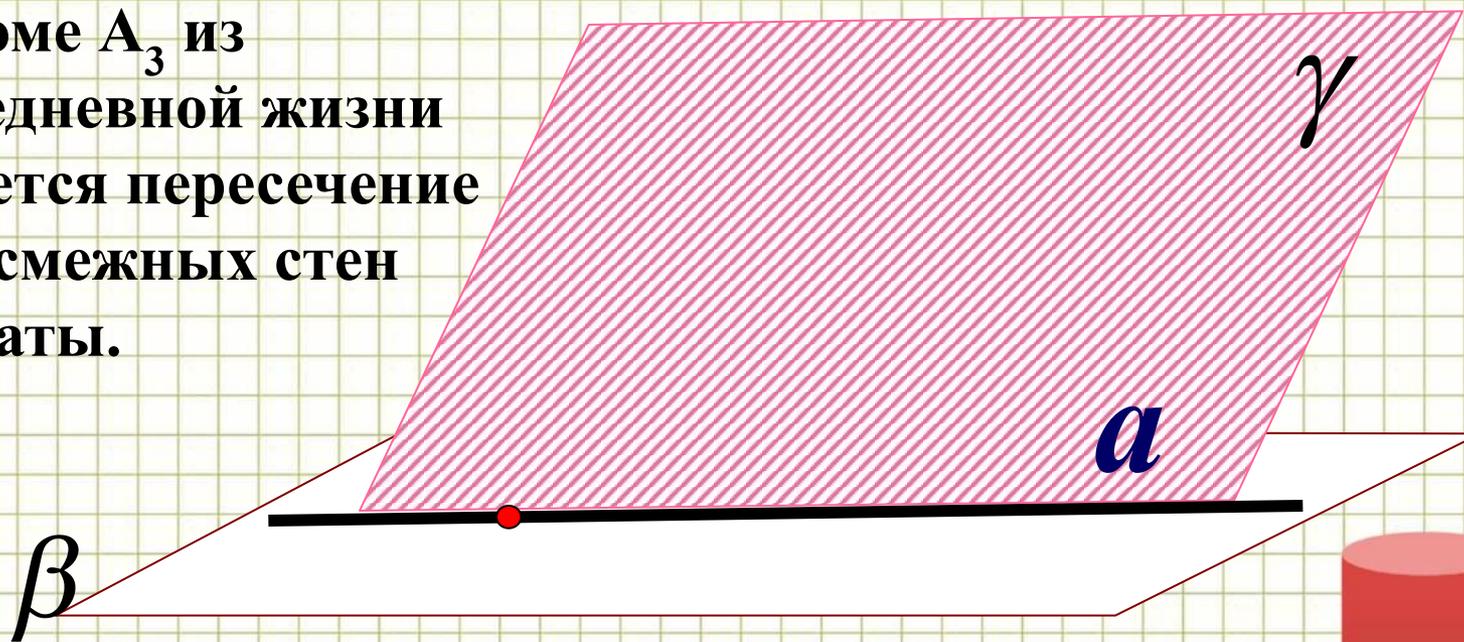
$$a \cap \beta = N$$



A_3 . Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Самый простой пример к аксиоме A_3 из повседневной жизни является пересечение двух смежных стен комнаты.

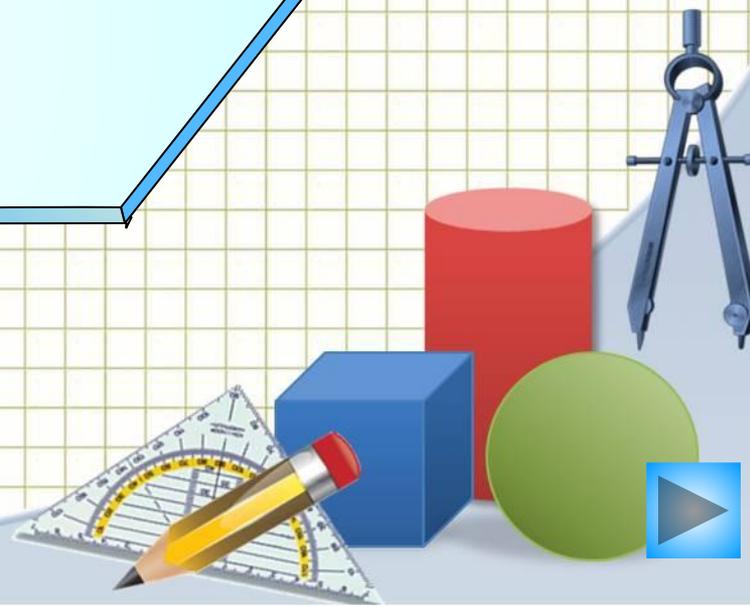
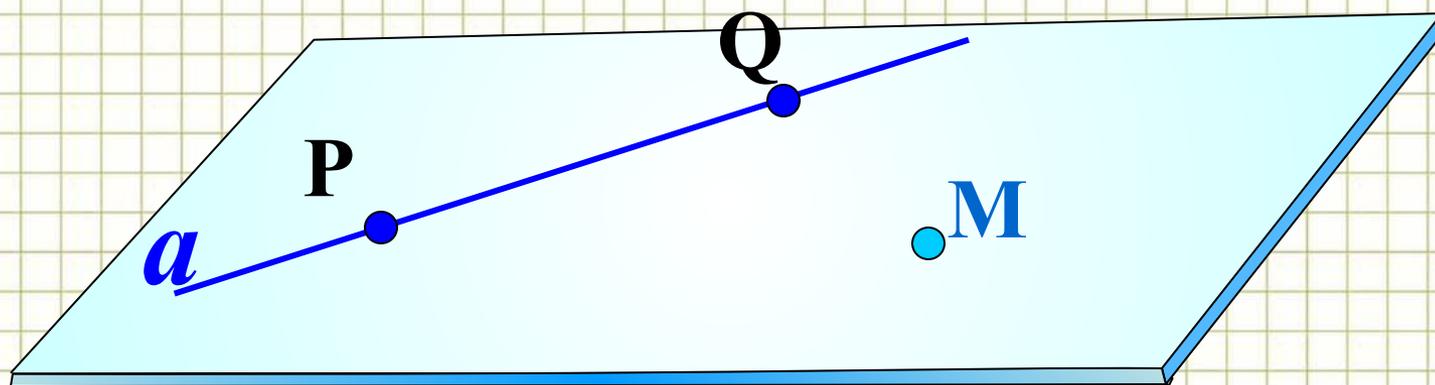
$$\beta \cap \gamma = a$$



Следствия из аксиом

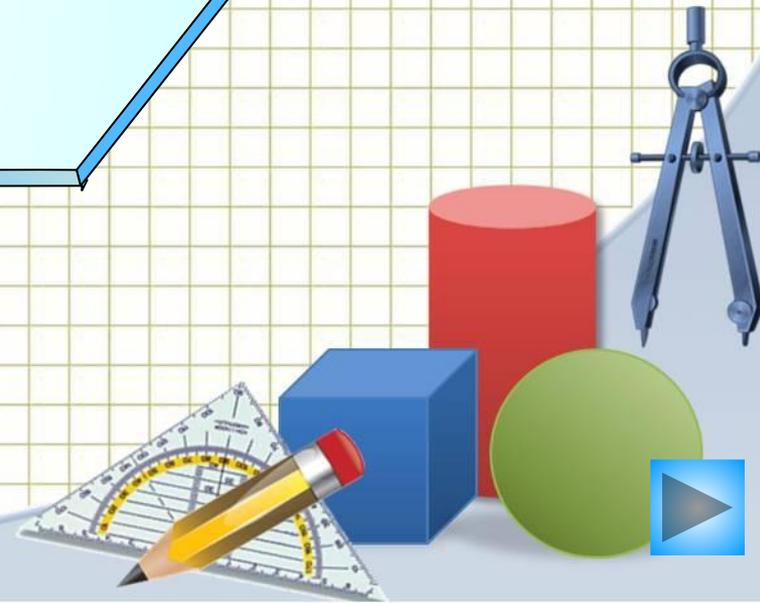
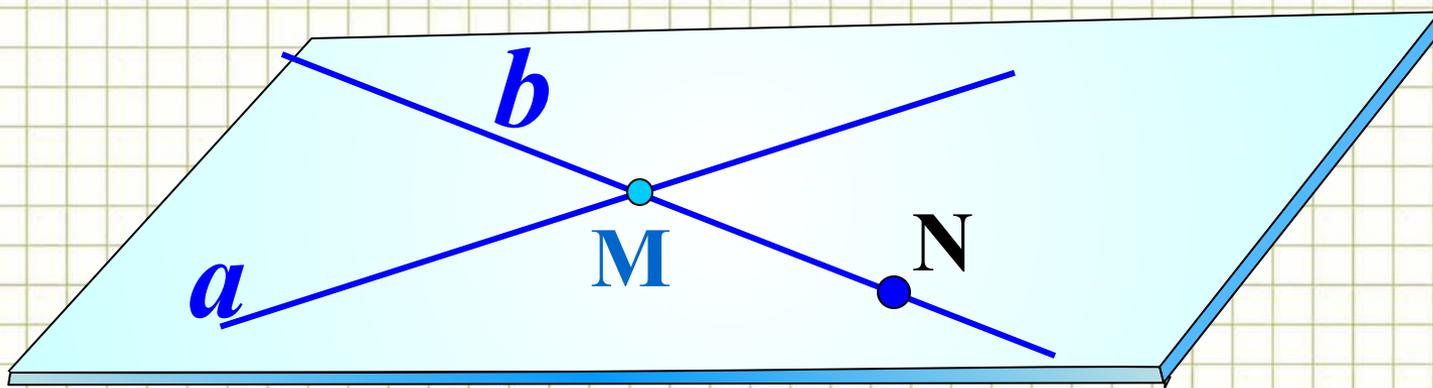
Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



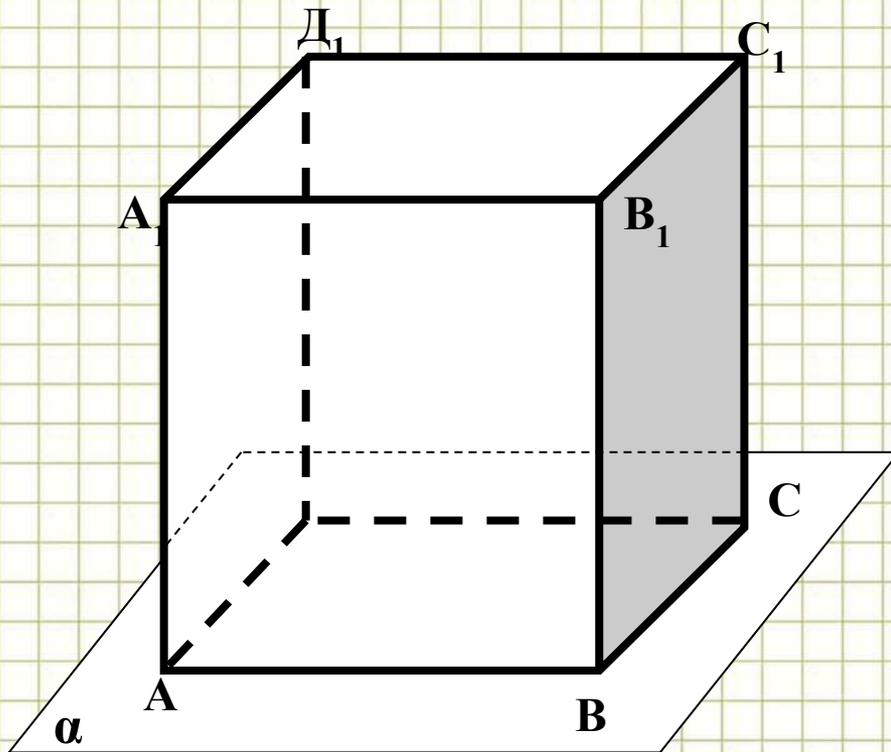
Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна



Устная работа.

Задача 1.



Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

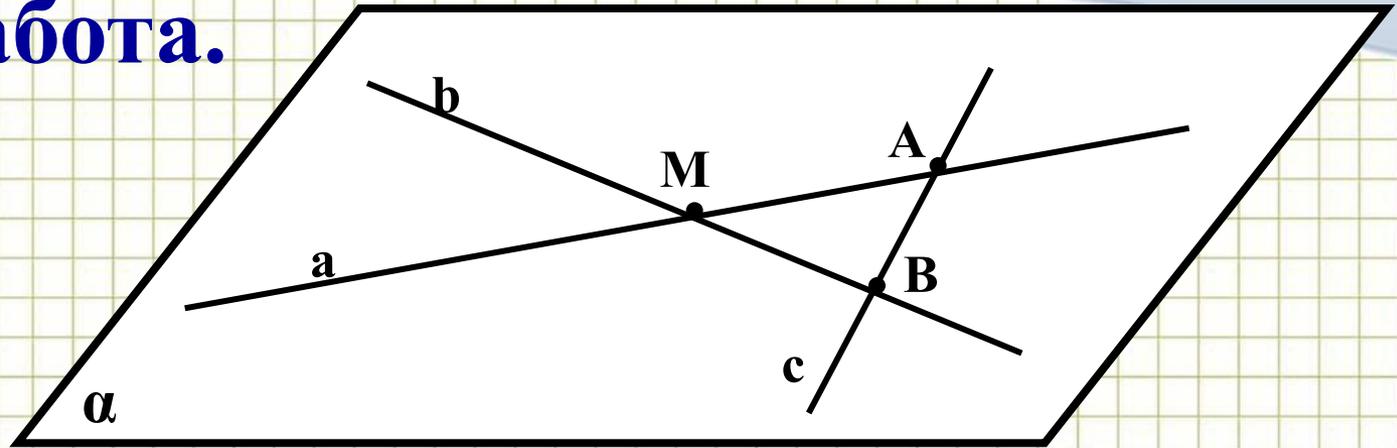
Найдите:

- 1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α ;
- 2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α ;
- 3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α ;
- 4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α ;
- 5) Несколько прямых которые пересекают прямую BC ;
- 6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую BC .



Устная работа.

Задача 2.



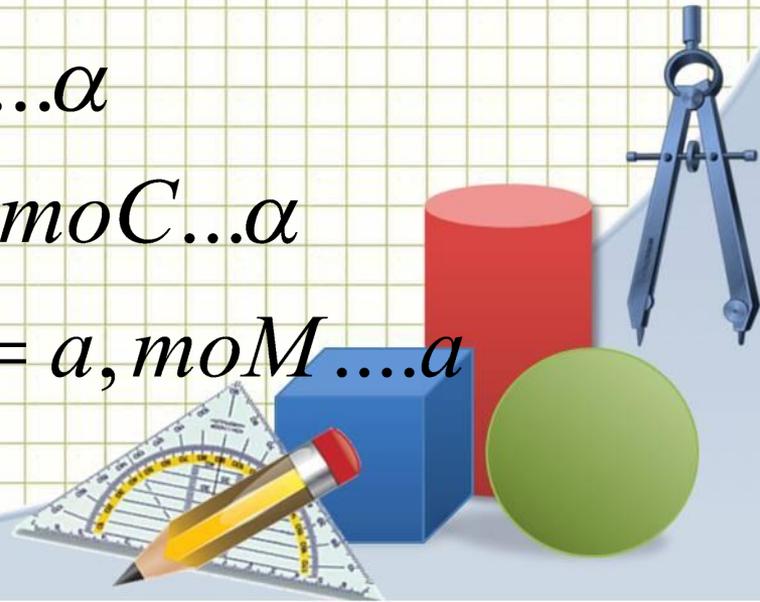
Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

1) если $A \in a, a \in \alpha$, то $A \dots \alpha$

2) если $A \in \alpha, B \in \alpha$, то $AB \dots \alpha$

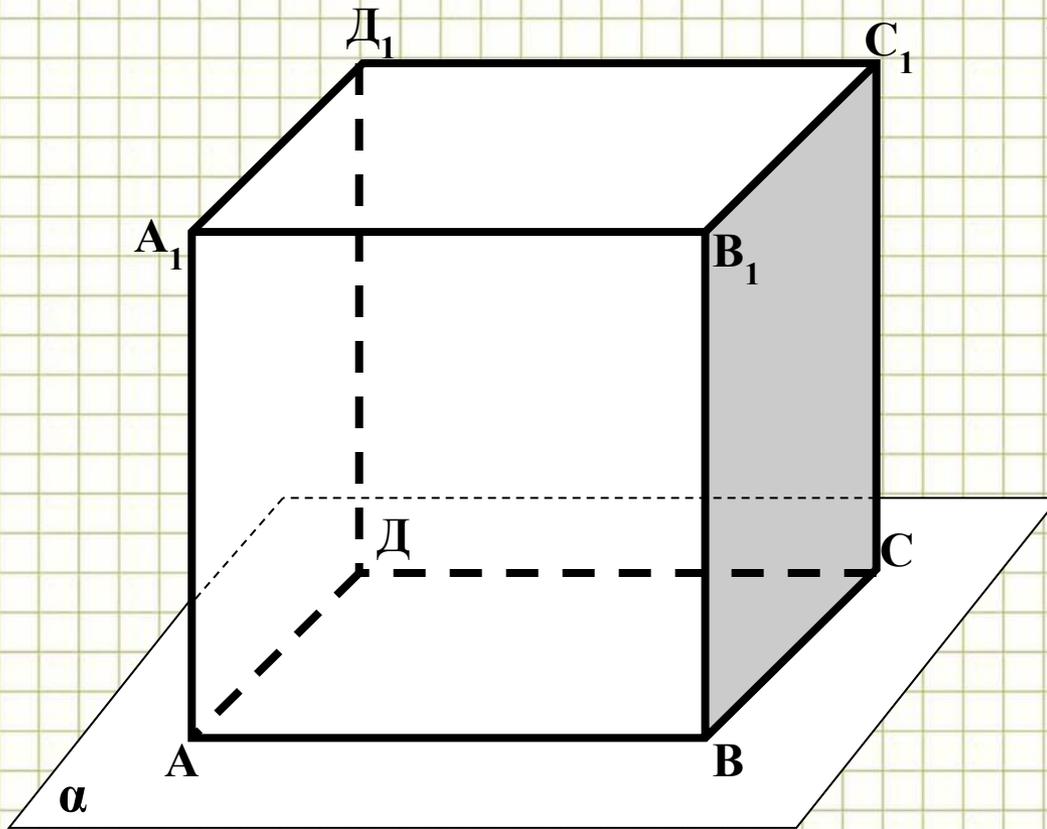
3) если $A \in \alpha; B \in \alpha; C \in AB$, то $C \dots \alpha$

4) если $M \in \alpha; M \in \beta, \alpha \cap \beta = a$, то $M \dots a$



Устная работа.

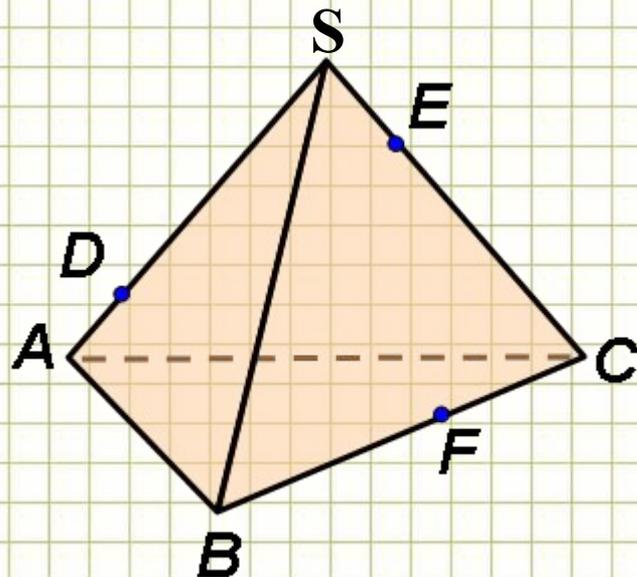
Задача 3.



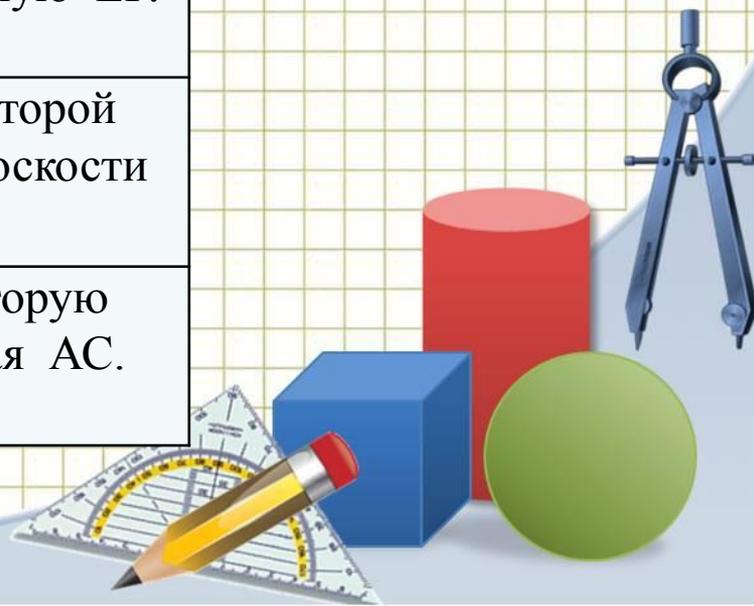
Лежат ли прямые AA_1 , AB ,
 AD в одной плоскости?

Прямые AA_1 , AB , AD
проходят через точку A , но
не лежат в одной плоскости

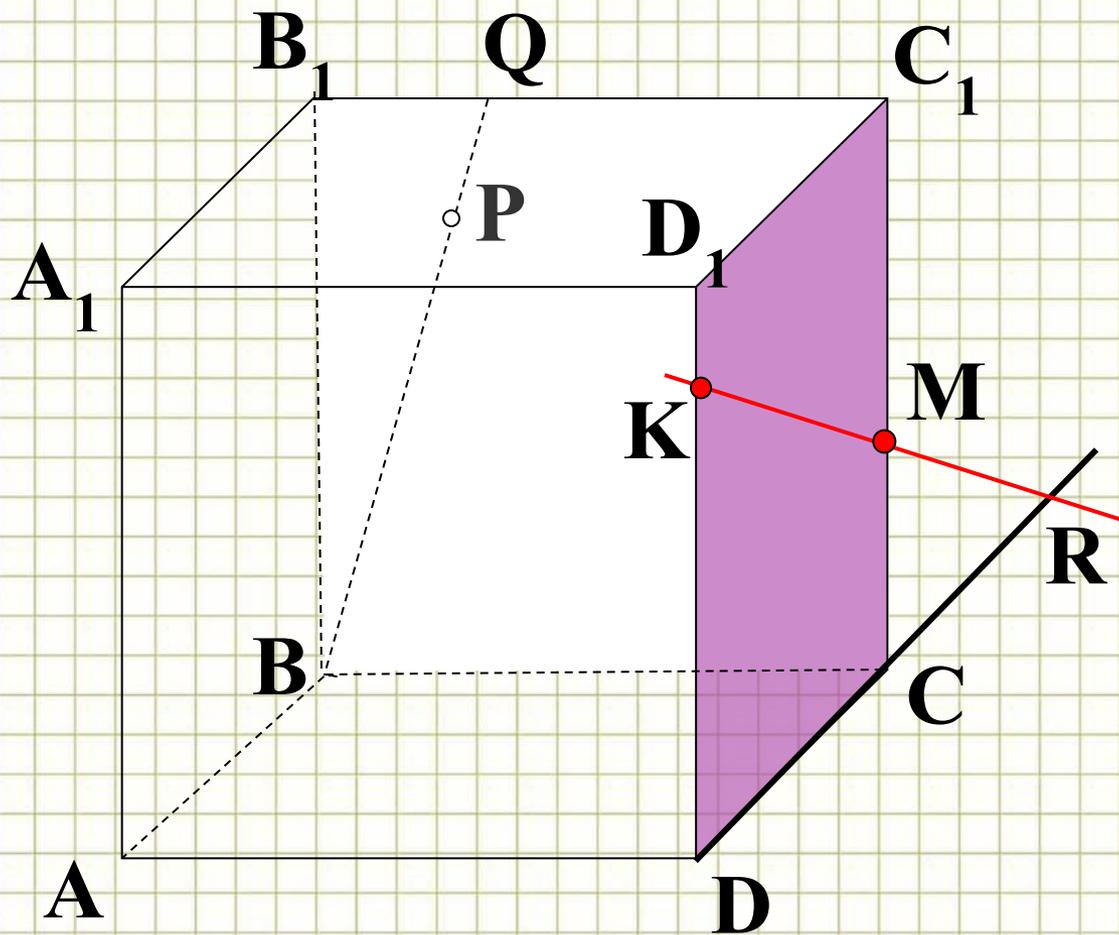




Вариант 1	Вариант 2
1) Две плоскости, содержащие прямую DE.	1) Две плоскости, содержащие прямую EF.
2) Прямую по которой пересекаются плоскости AEF и SBC.	2) Прямую по которой пересекаются плоскости BDE и SAC
3) Плоскость, которую пересекает прямая SB.	3) Плоскость, которую пересекает прямая AC.

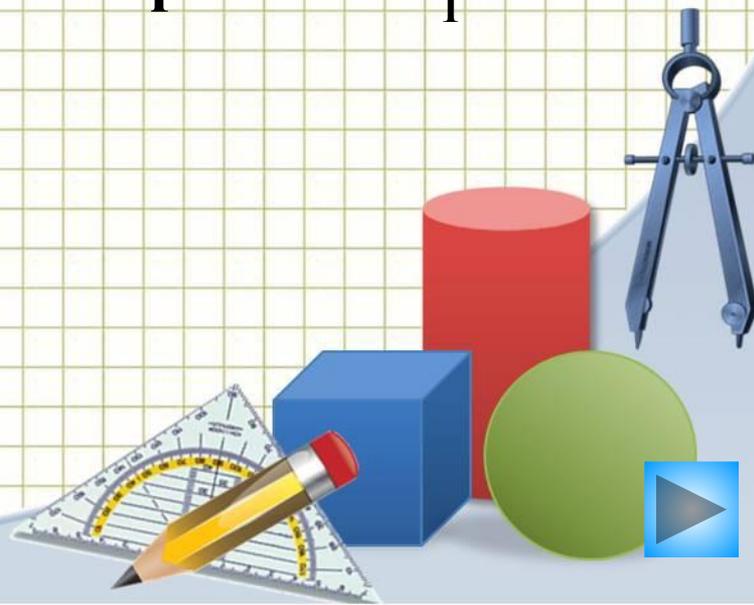


Задача 2



Назовите точки,
лежащие в
плоскостях DCC_1 и
 BQC

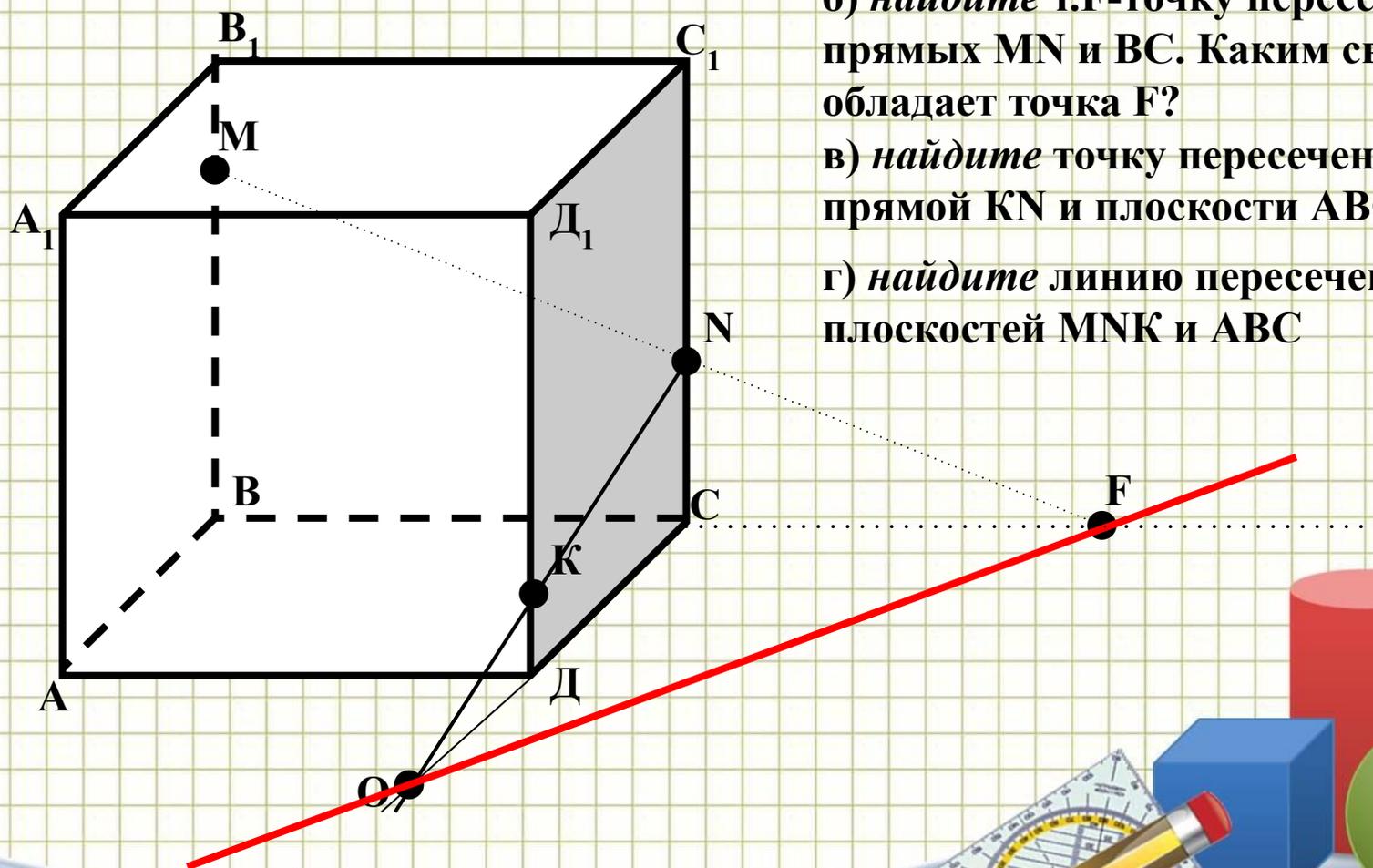
Назовите плоскости,
в которых лежит
прямая AA_1



Задача 4

Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Точка M лежит на ребре BB_1 , т. N лежит на ребре CC_1 и точка K лежит на ребре DD_1

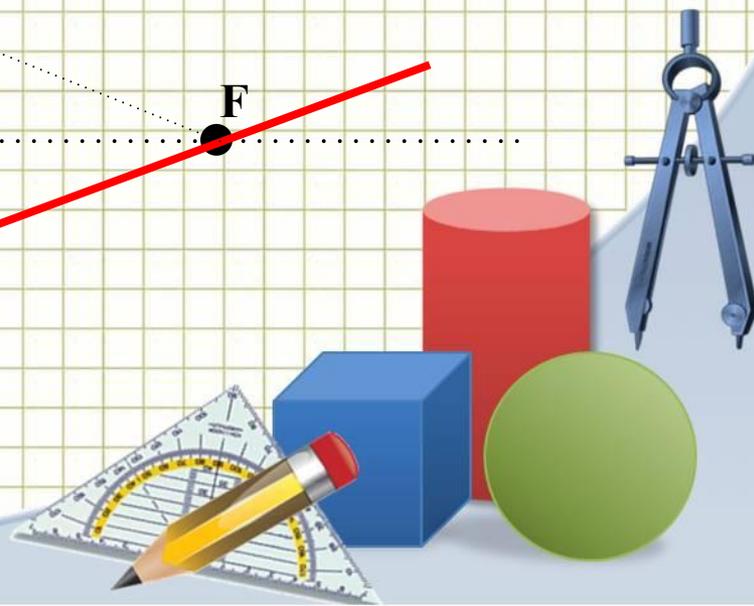


а) *назовите* плоскости, в которых лежат точки M ; N .

б) *найдите* т. F -точку пересечения прямых MN и BC . Каким свойством обладает точка F ?

в) *найдите* точку пересечения прямой KN и плоскости ABC

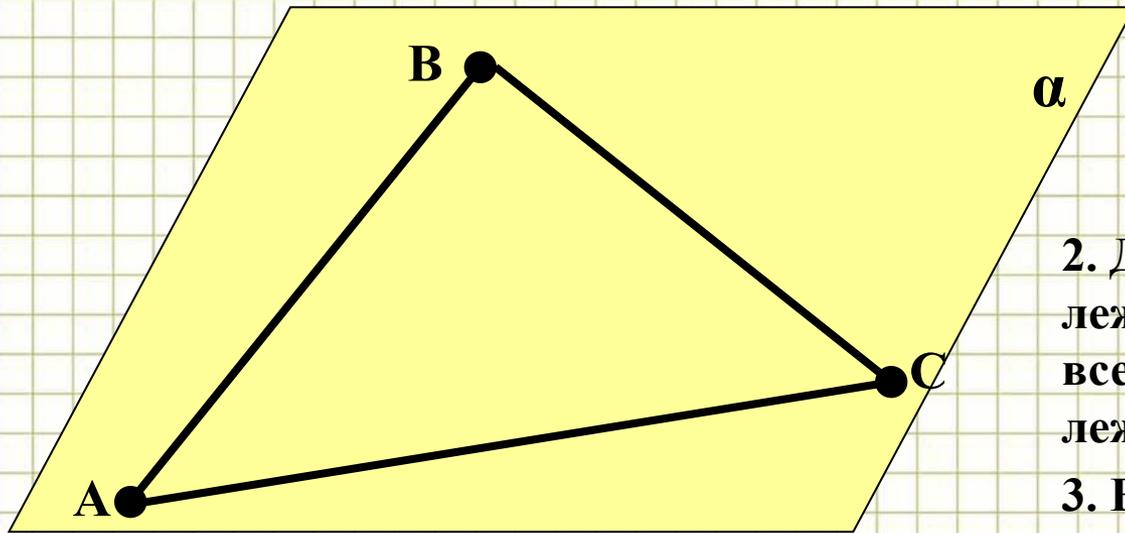
г) *найдите* линию пересечения плоскостей MNK и ABC



Задачу 5

Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

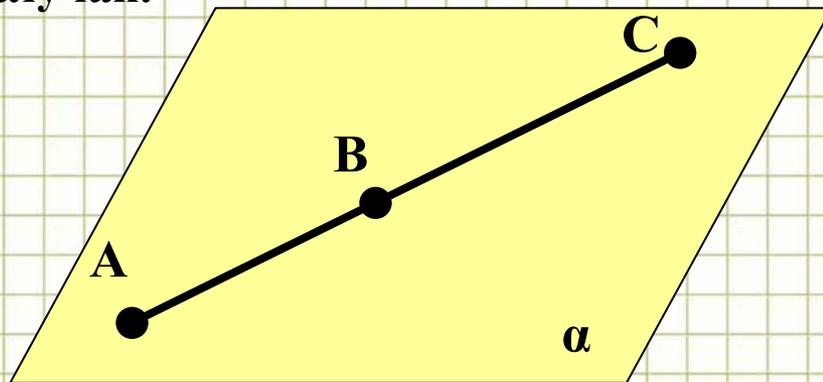
1 случай.



Доказательство:

1. $(A, B, C) \in \alpha$, значит по А1 через A, B, C проходит единственная плоскость.
2. Две точки каждого отрезка лежат в плоскости, значит по А2 все точки каждого из отрезков лежат в плоскости α .
3. Вывод: AB, BC, AC лежат в плоскости α

2 случай.



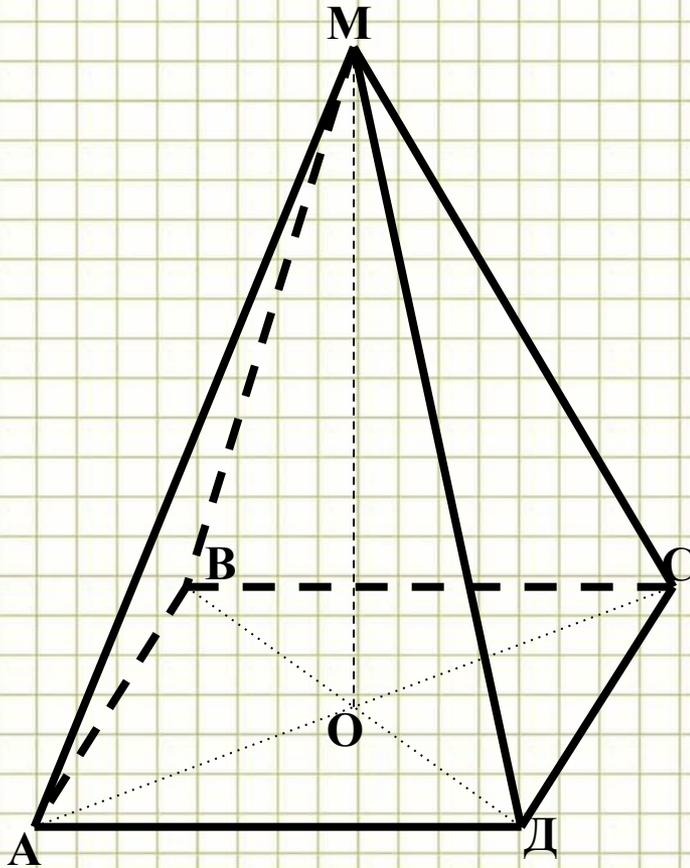
Доказательство:

Так как 3 точки принадлежат одной прямой, то по А2 все точки этой прямой лежат в плоскости.



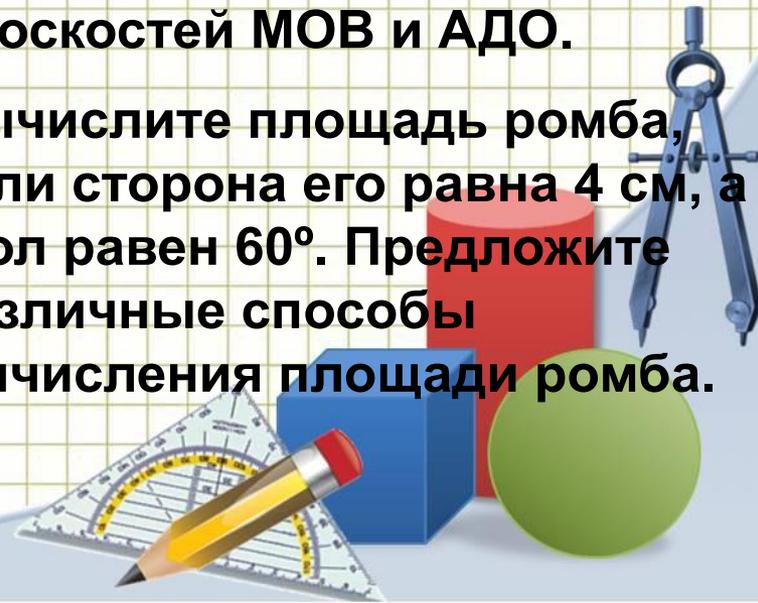
Задача 6.

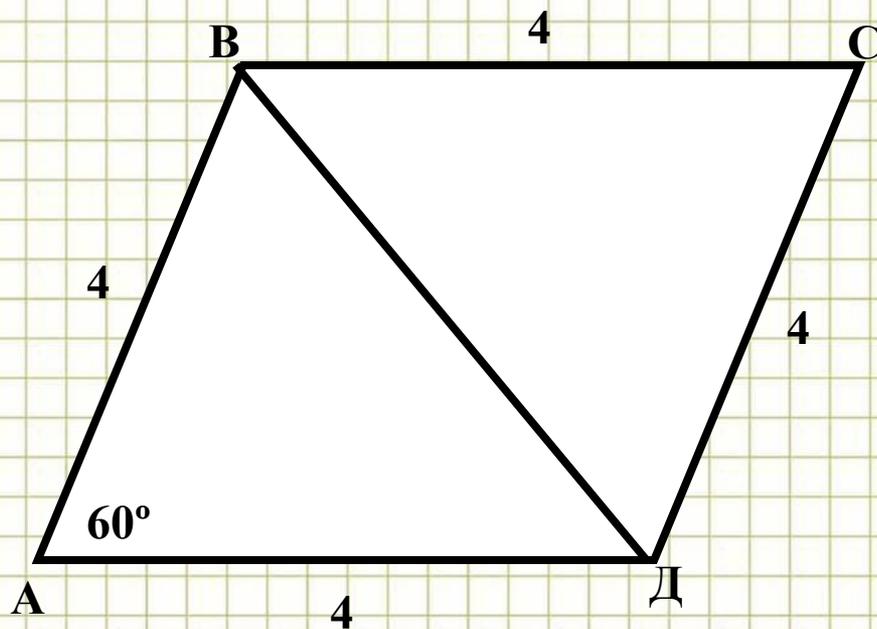
$ABCD$ – ромб, O – точка пересечения его диагоналей, M – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, D, O лежат в плоскости α .



Определить и обосновать:

1. Лежат ли в плоскости α точки B и C ?
2. Лежит ли в плоскости MOB точка D ?
3. Назовите линию пересечения плоскостей MOB и ADO .
4. Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60° . Предложите различные способы вычисления площади ромба.





$\triangle ABD = \triangle BCD$ (по трем сторонам),
значит $S_{ABD} = S_{BCD}$.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin \angle C$$

$$\angle A = \angle C \Rightarrow \sin \angle A = \sin \angle C$$

$$AB = BC, AD = CD$$

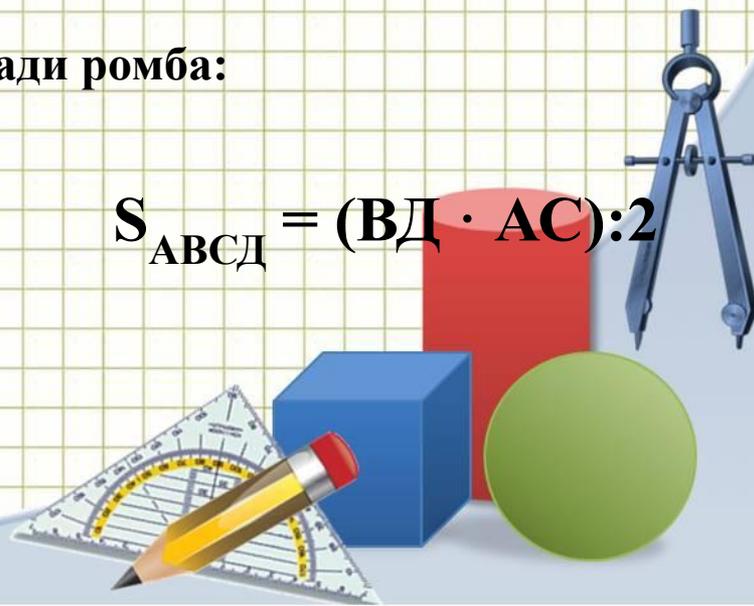
$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{BCD}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$$

Формулы для вычисления площади ромба:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

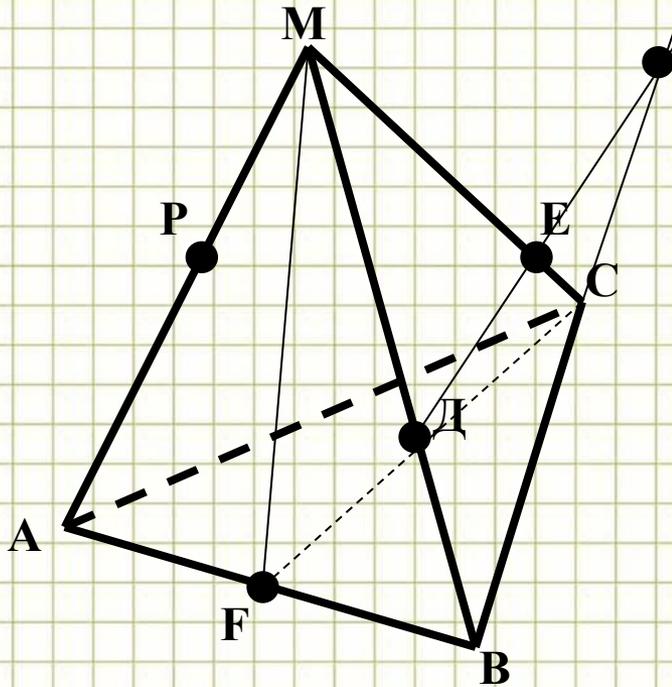
$$S_{ABCD} = (BD \cdot AC) : 2$$



Задача №1

Дан тетраэдр МАВС, каждое ребро которого равно 6 см.

$D \in MB, E \in MC, F \in AB, AF = FB, P \in MA$



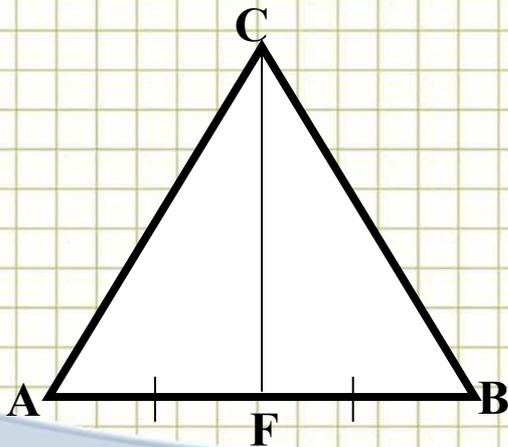
1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) МАВ и МFC; б) МCF и АВС.
2. Найдите длину CF и S_{ABC}
3. Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью АВС?

Справочный материал:

Свойство медианы равнобедренного треугольника: В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из вершины треугольника к основанию, является биссектрисой и высотой.

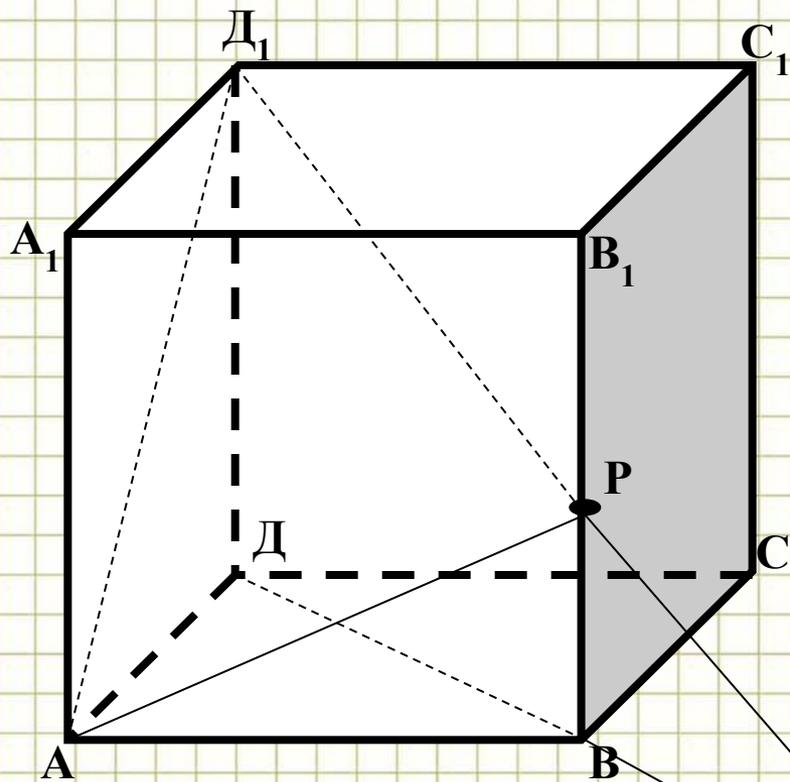
Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Справноста.треуг. $= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

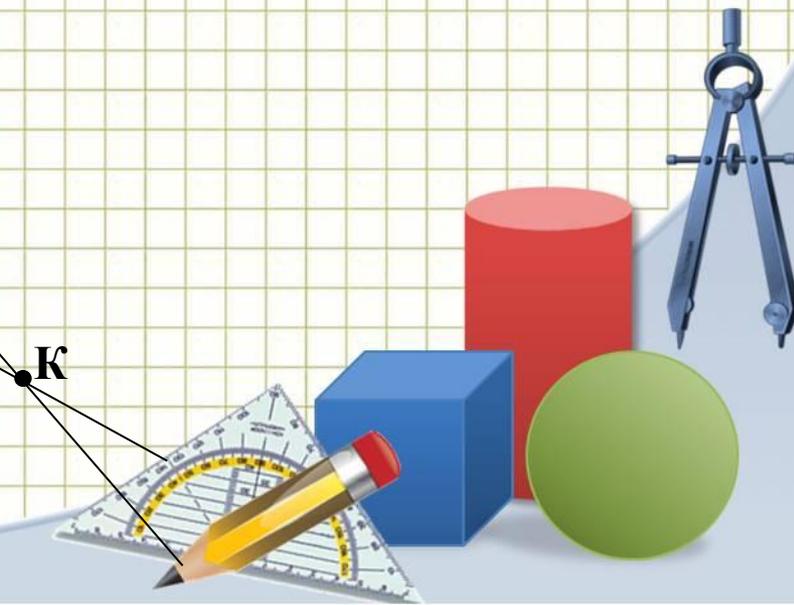


Задача №2

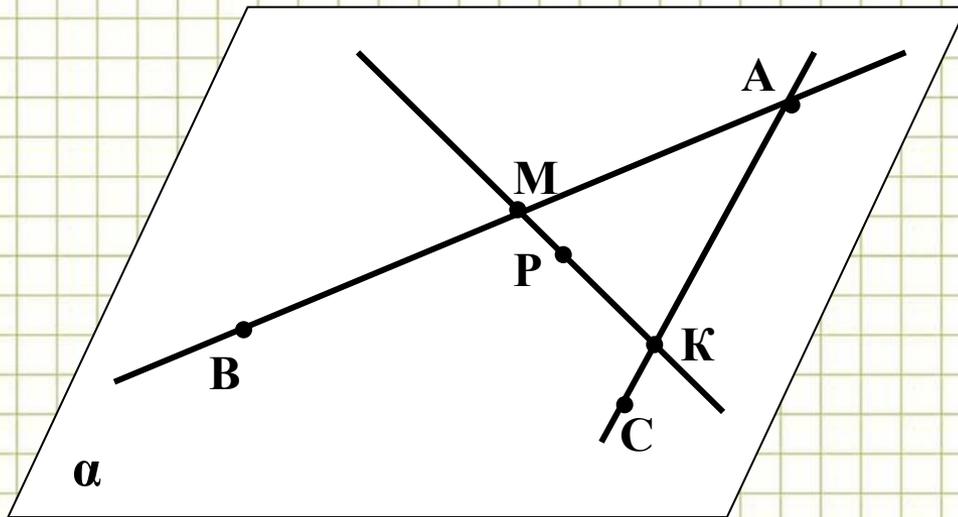
Дано : $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $P \in BB_1$, $B_1 P = PB$.



- 1) Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой $D_1 P$?
- 2) Как построить линию пересечения плоскостей $AD_1 P$ и ABB_1 ?
- 3) Вычислите длину отрезков AP и AD_1 , если $AB = a$



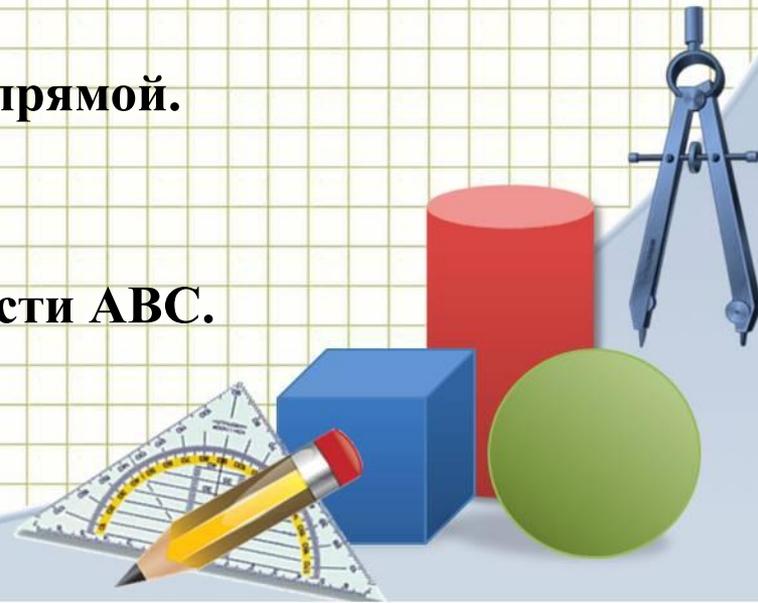
Задача №3



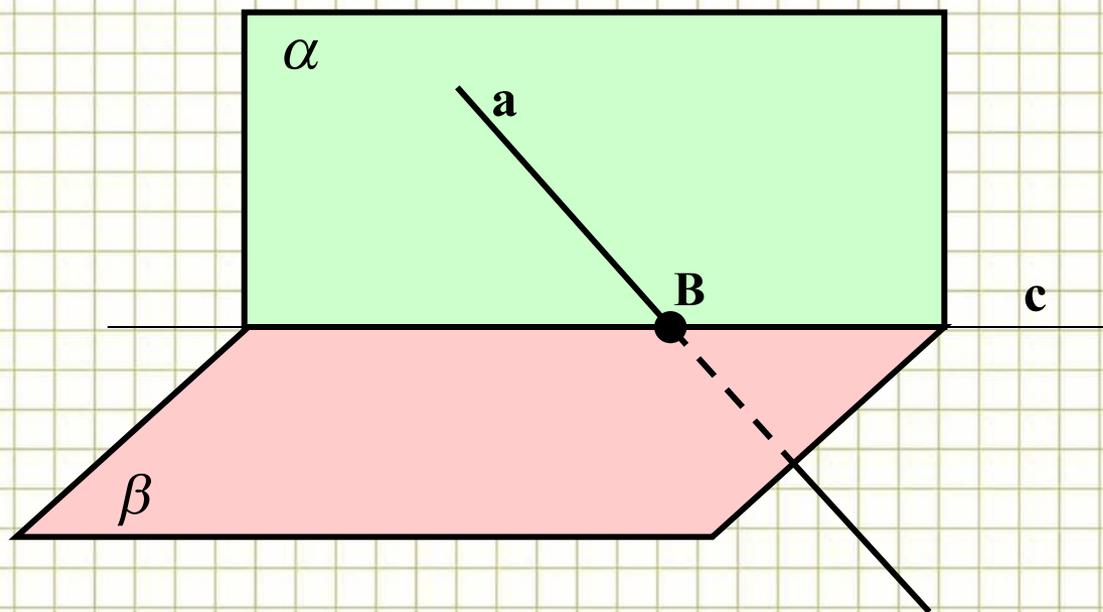
Дано: Точки A, B, C не лежат на одной прямой.

$$M \in AB, K \in AC, P \in MK$$

Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC .



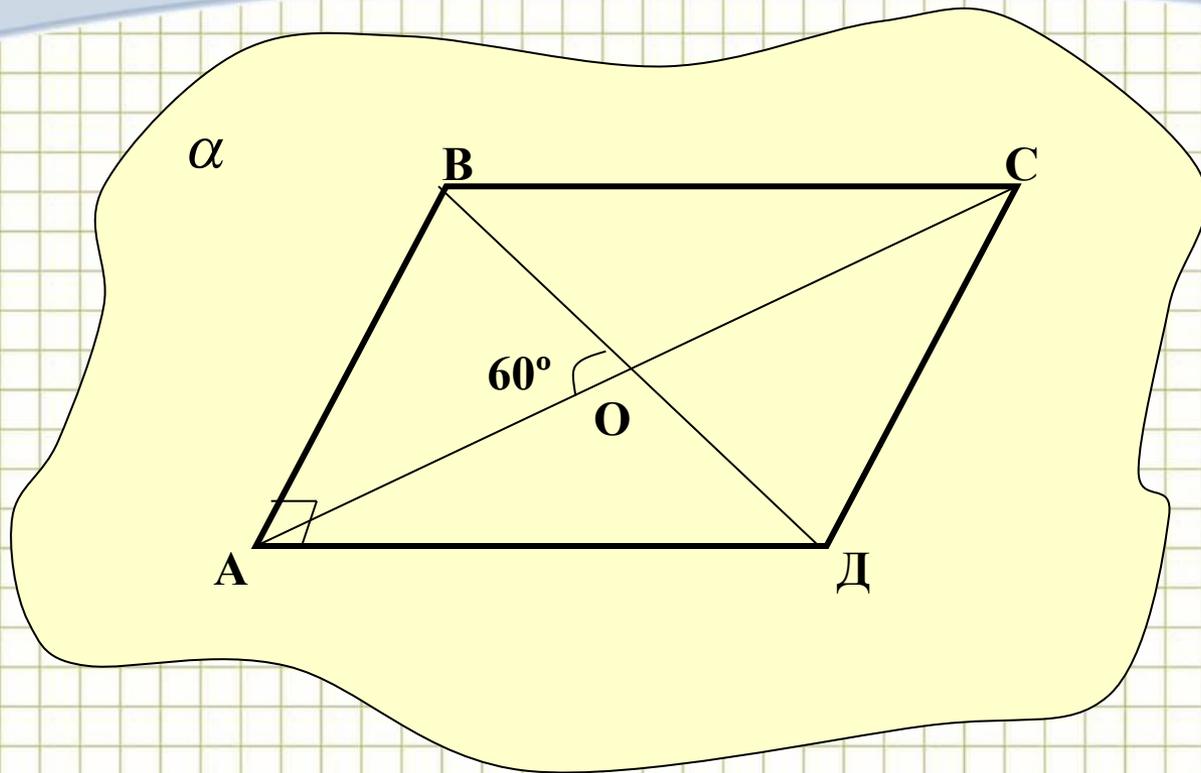
Задача 7



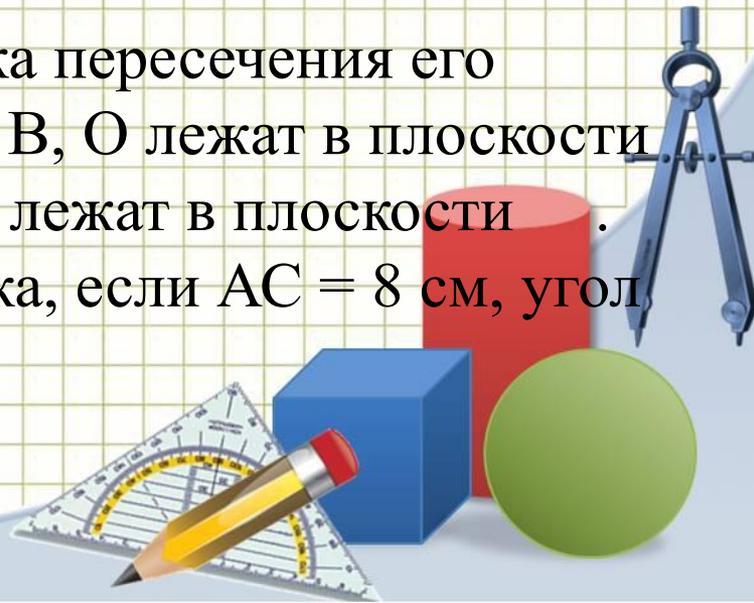
Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β .
Пересекаются ли прямые a и c ? Почему?



Задача 8

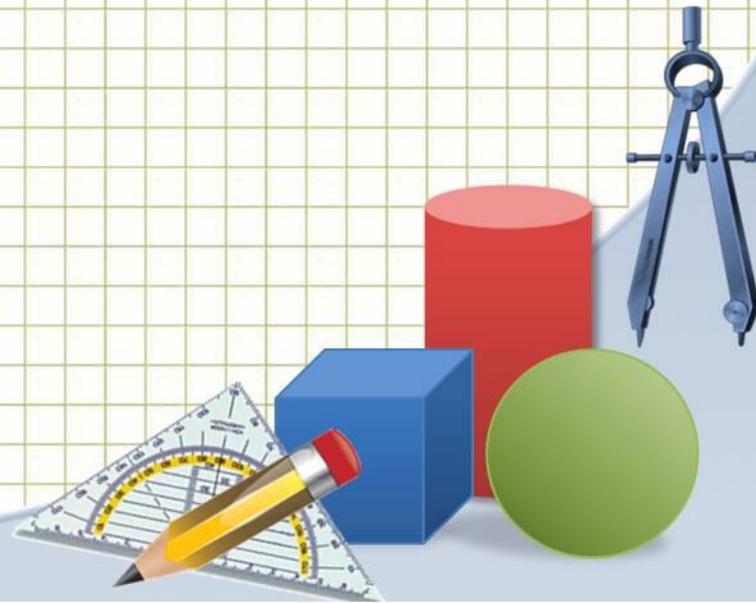


Дан прямоугольник $ABCD$, O – точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки A , B , O лежат в плоскости α . Докажите, что точки C и D также лежат в плоскости α . Вычислите площадь прямоугольника, если $AC = 8$ см, угол $AOB = 60^\circ$.



Домашнее задание:

1. Прочитать пункты 1; 2; 3 на стр. 3 – 7
2. Выучить теоремы 1, 2 (с доказательством); повторить аксиомы А1 – А3
3. Решить задачи №8, 9, 11, 13 (с объяснением ответов)



Интернет-ресурсы

1. <http://gym1.usoz.ru/load/1-1-0-145>. Источник шаблона: *Ранько Елена Алексеевна учитель начальных классов МАОУ лицей №21 г. Иваново*
2. Циркуль: <http://www.daviddarling.info/images/compasses.jpg>
3. Карандаш:
<http://www.proshkolu.ru/content/media/pic/std/3000000/2240000/2239093-7acd9447b354cc7e.gif>
4. Угольник-транспортир:
http://p.alejka.pl/i2/p_new/25/38/duza-ekierka-geometryczna-z-uchwytem-rotring-14-cm_0_b.jpg
5. Фон «тетрадная клетка»:
<http://radikal.ua/data/upload/49112/4efc3/3bd0a3d6bb.jpg>
6. <http://nsportal.ru/ap/ap/drugoe/2012/04/20/prezentatsiya-po-teme-stereometriya>



Литература

1. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательной школы, Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др., издательство: "Просвещение" 2002г

