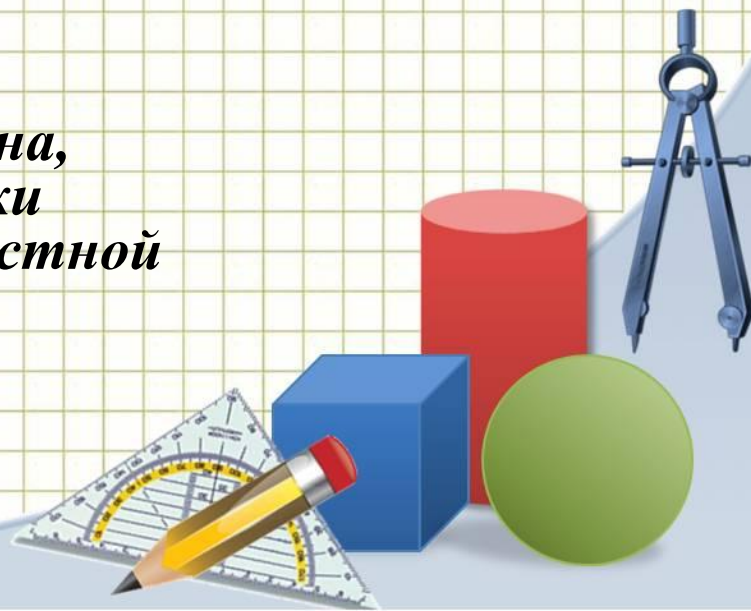


# Стереометрия

## Аксиомы стереометрии

*Перминова Елена Витальевна,  
преподаватель математики  
ГБПОУ СО «Свердловский областной  
педагогический колледж»*

*г. Екатеринбург*



# Геометрия

Планиметрия

Стереометрия

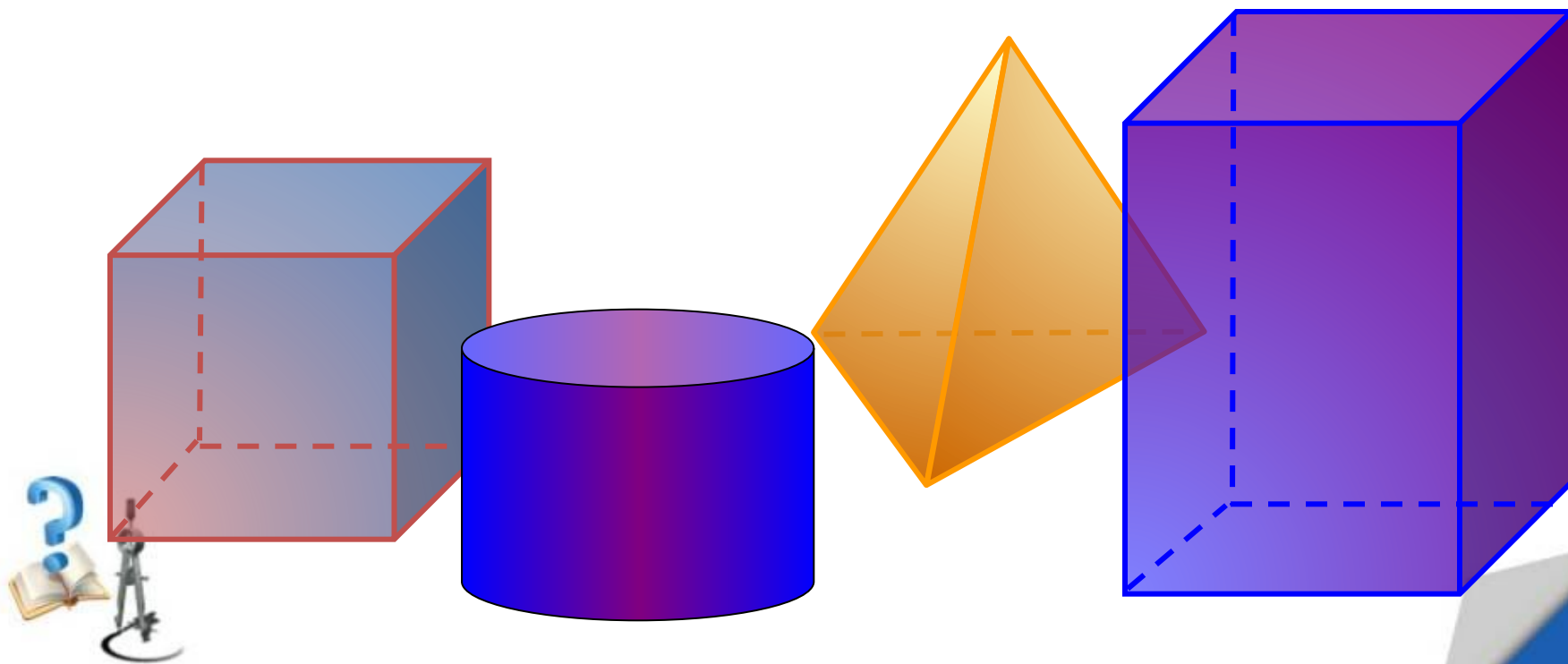
***stereos***

телесный, твердый,  
объемный,  
пространственный



# Стереометрия

**это подраздел геометрии, изучающий свойства фигур в пространстве**



# stereos

*Пространство - это множество, элементами которого являются точки и в котором выполняется система аксиом стереометрии, описывающая свойства точек, прямых и плоскостей*



# Для изучения стереометрии

**Надо научиться делать чертежи и уметь читать их.**

**Правильный чертеж поможет понять, представить и проиллюстрировать содержание задачи.**

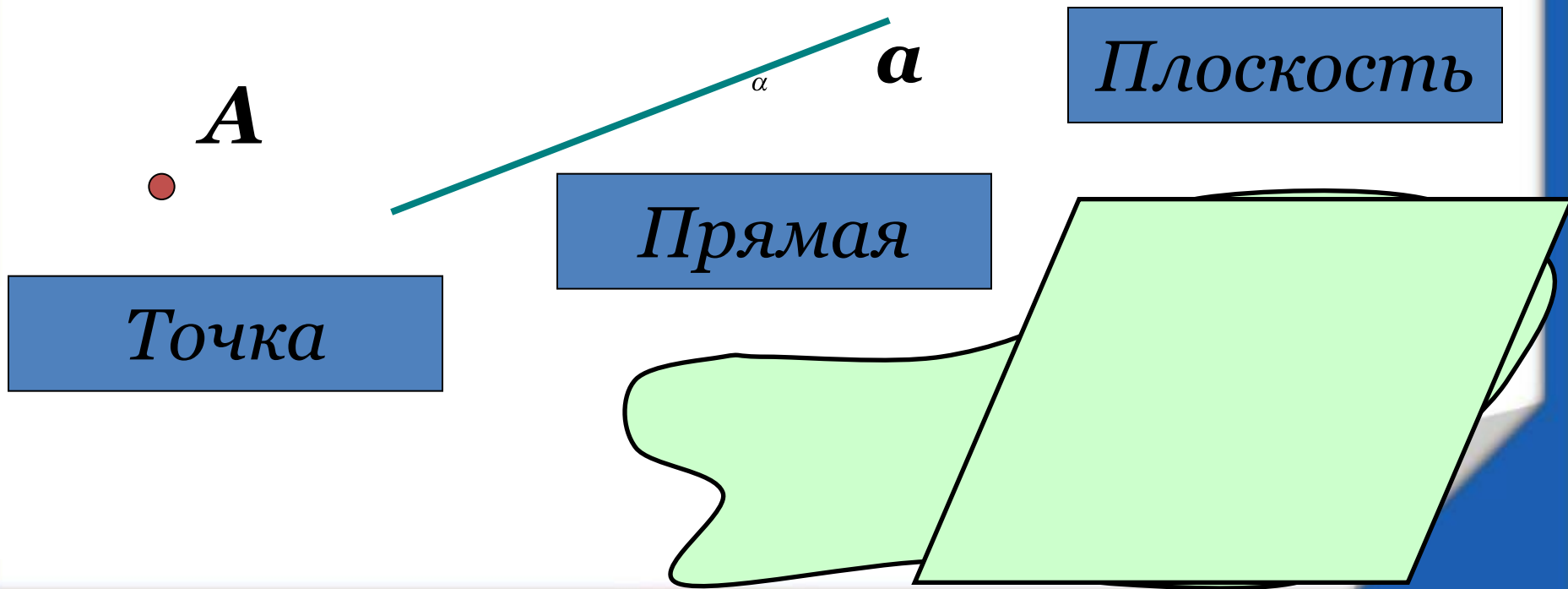
*Ключ к изучению стереометрии - пространственное воображение в сочетании с логикой мышления.*



# Стереометрия

-Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

## Основные фигуры в пространстве:



**Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» объемный, пространственный, «метрео» – мерить.**

**Основные фигуры: точка, прямая, плоскость.**



# СТЕРЕОМЕТРИЯ

точка  $A, B, C, \dots$

прямая  $a, b, c, \dots$   
или  $AB, BC, CD, \dots$

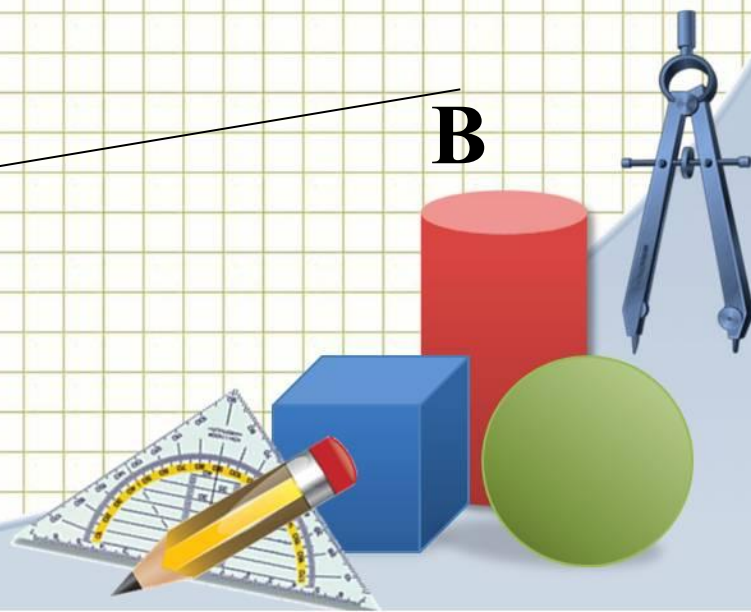
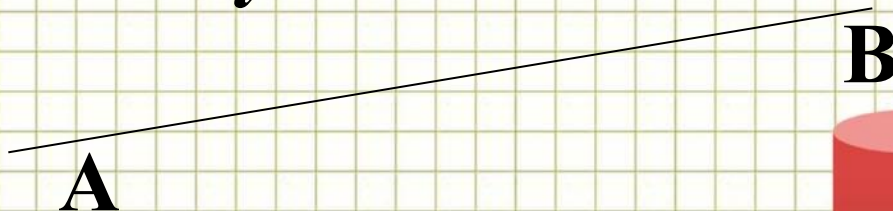
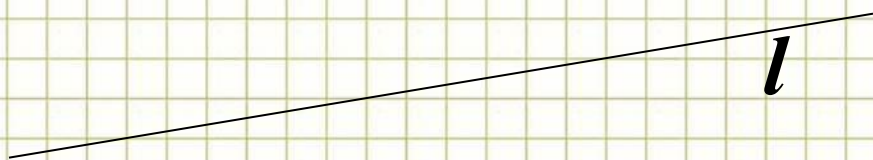
плоскость  $\alpha, \beta, \gamma,$



Для обозначения точек как и в планиметрии используют прописные латинские буквы:

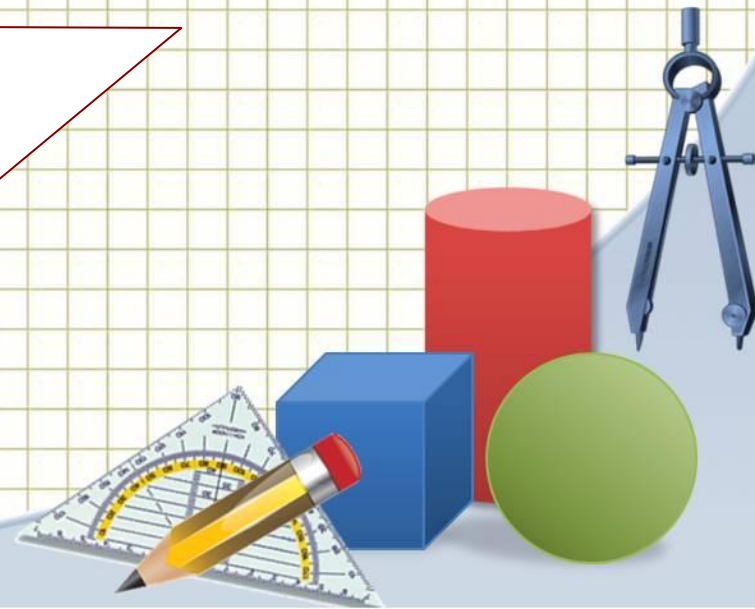
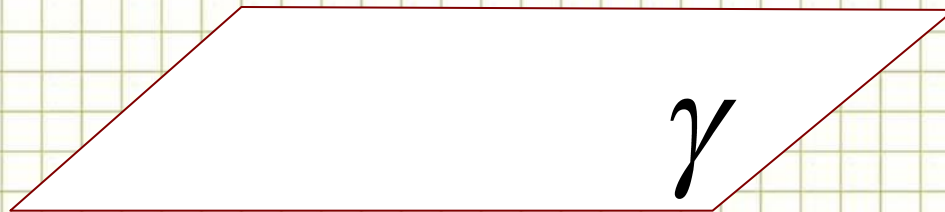
• F

Прямую обозначают одной строчной латинской буквой и двумя прописными латинскими буквами:



Плоскость в стереометрии обозначают греческими буквами, например:  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$

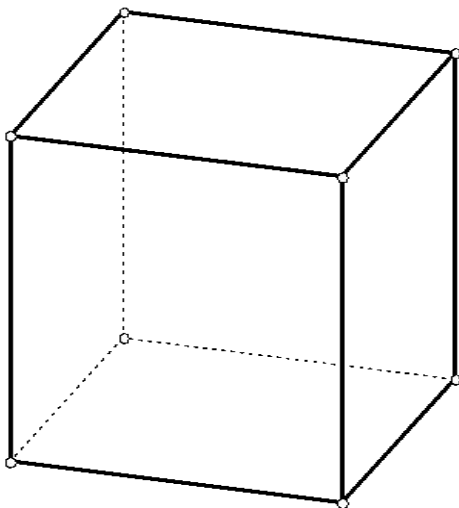
А на рисунках чаще всего плоскость изображают в виде параллелограмма. Но следует понимать и представлять себе данную геометрическую фигуру как неограниченную во все стороны.



# Основные фигуры в пространстве

• A

Прописные латинские буквы A, B, C, .....

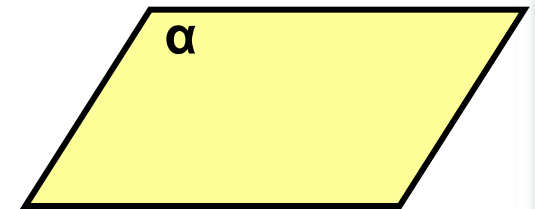


куб

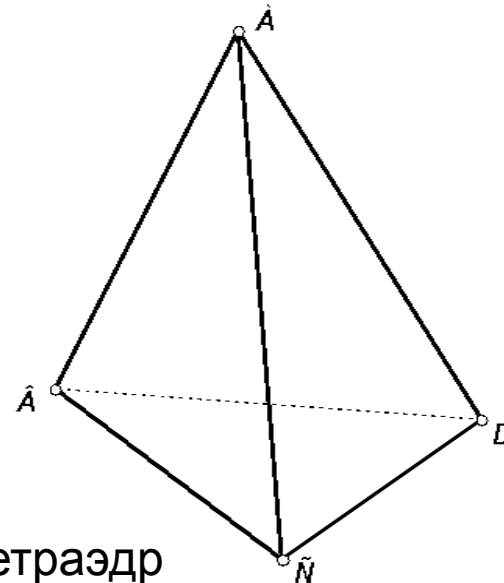
a



Строчные латинские буквы a, b, c, d, e, ...

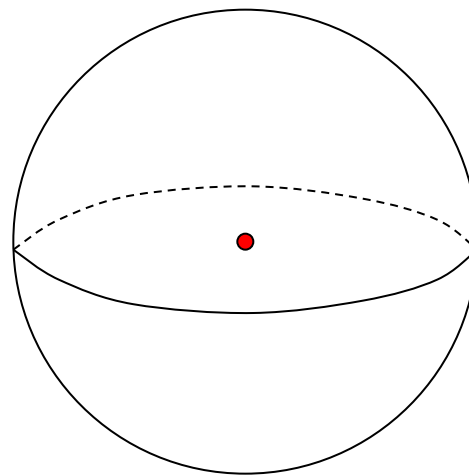
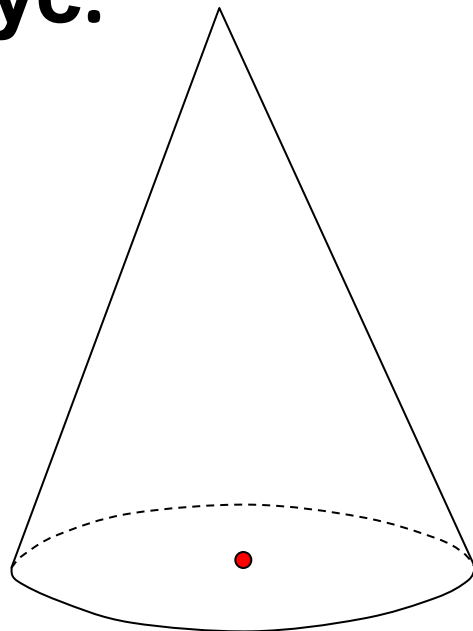
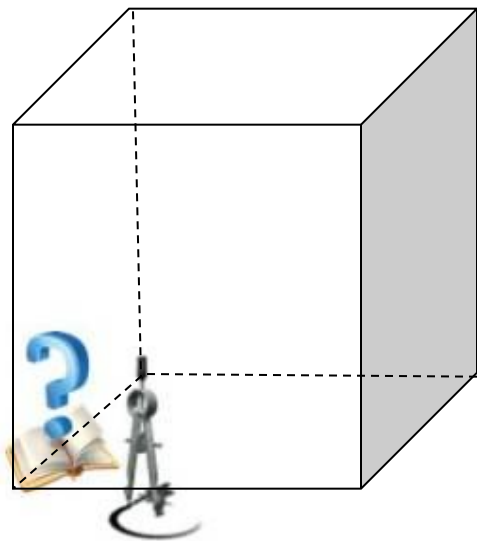


Греческие буквы α, β, γ, λ, ...



тетраэдр

**Наряду с основными фигурами мы будем рассматривать геометрические тела и их поверхности. Такие, как: куб, параллелепипед, призма, пирамида. А также тела вращения: шар, сфера, цилиндр, конус.**



# Основные понятия стереометрии

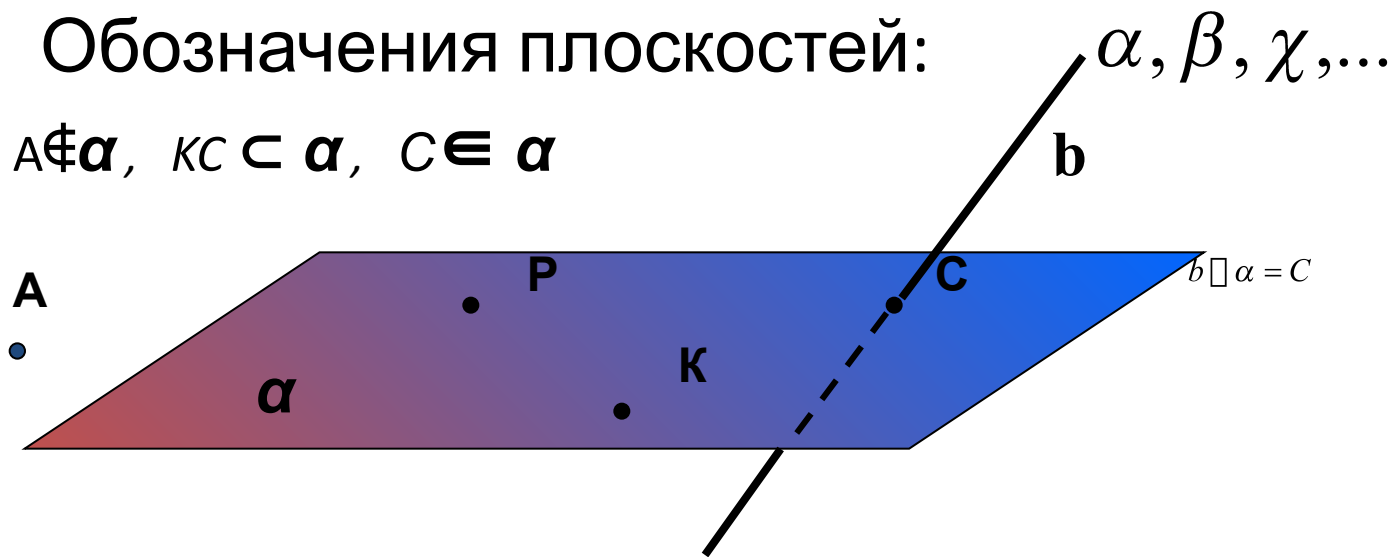
Обозначение точки:  $A$ ;  $B$ ;  $C$ ;  $M$  ...

Обозначение прямой:  $a$ ;  $b$ ,  $c$   $h$  или  $AB$ ,  $BC$ ...

***Плоскости - это фигуры, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.***

Обозначения плоскостей:

$A \notin \alpha$ ,  $KC \subset \alpha$ ,  $C \in \alpha$

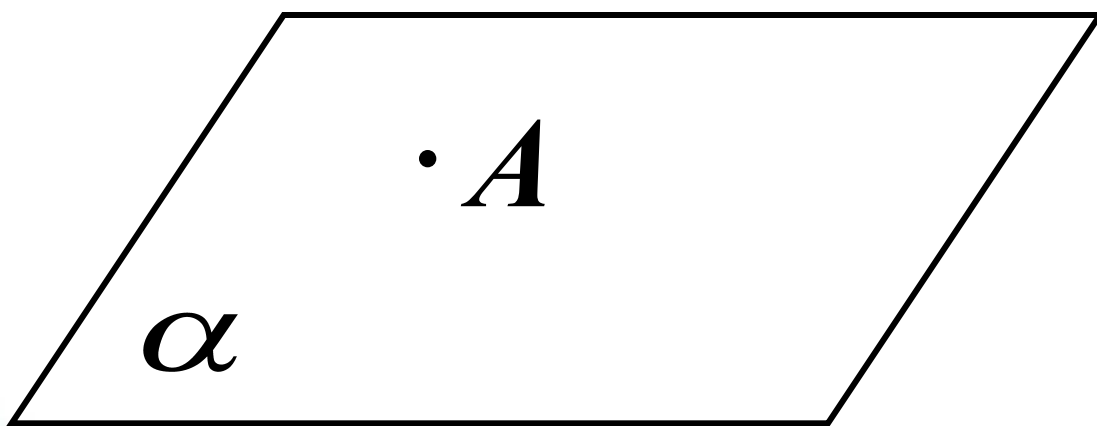


# Прочти чертеж

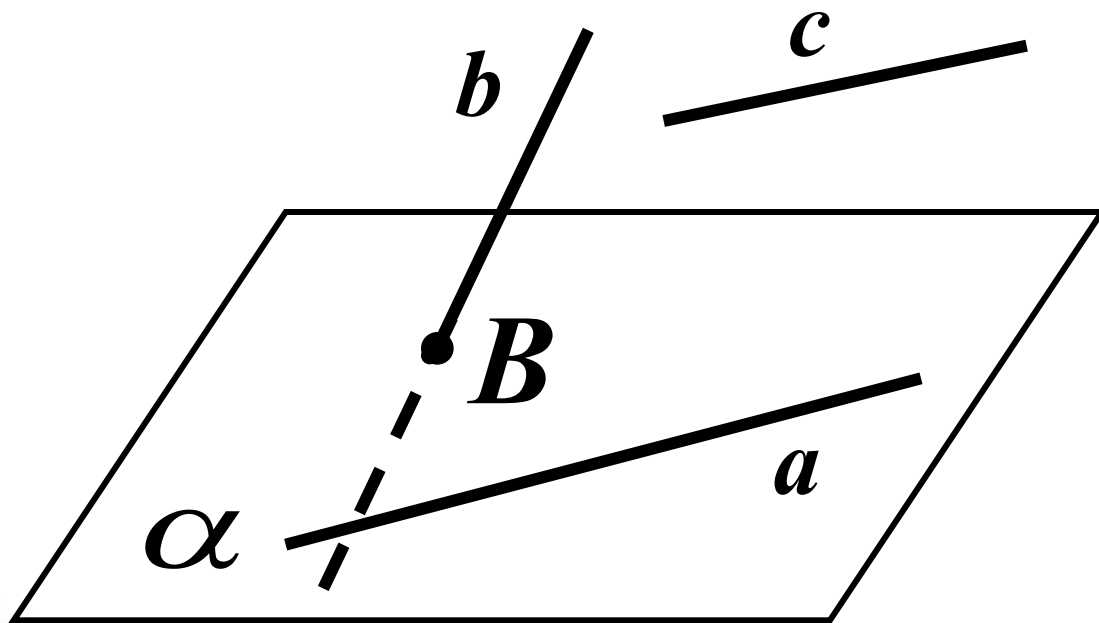
•  $C$

$A \in \alpha$

$C \notin \alpha$



# Прочти чертеж



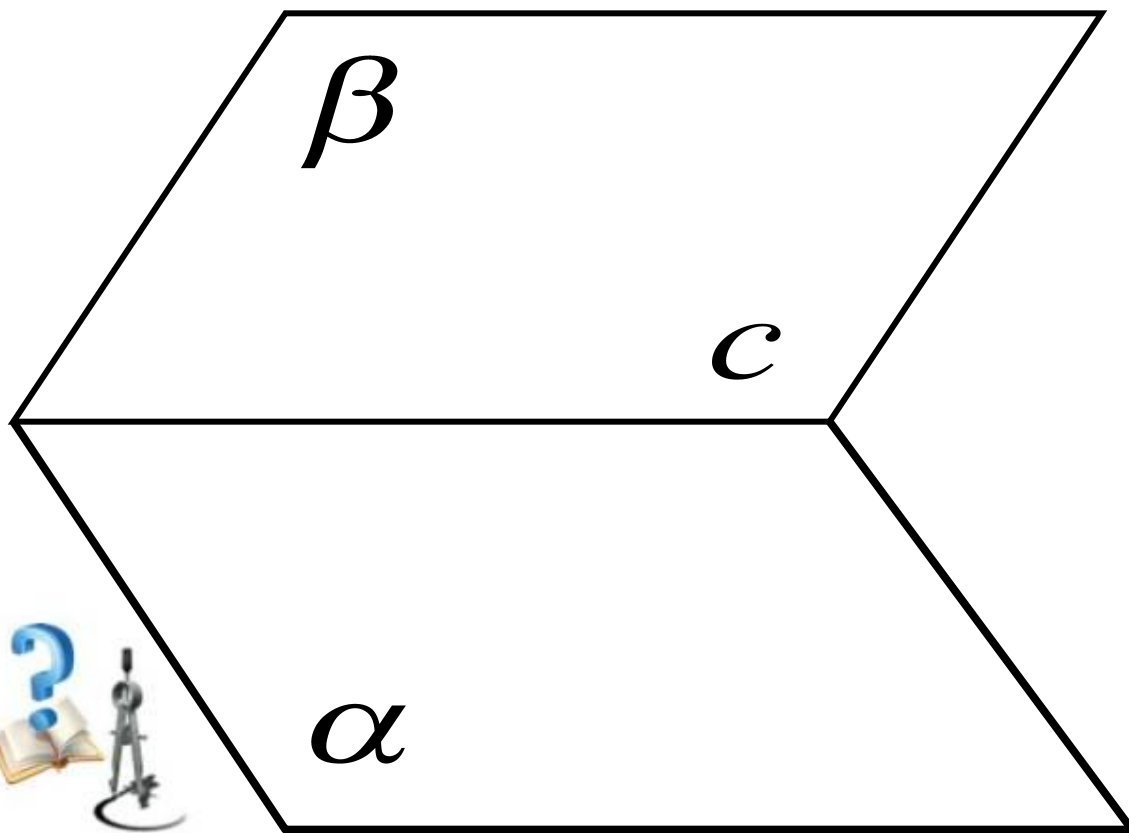
$$a \in \alpha$$

$$b \cap \alpha = B$$

$$c \notin \alpha$$



# Прочти чертеж



$$\alpha \cap \beta = c$$



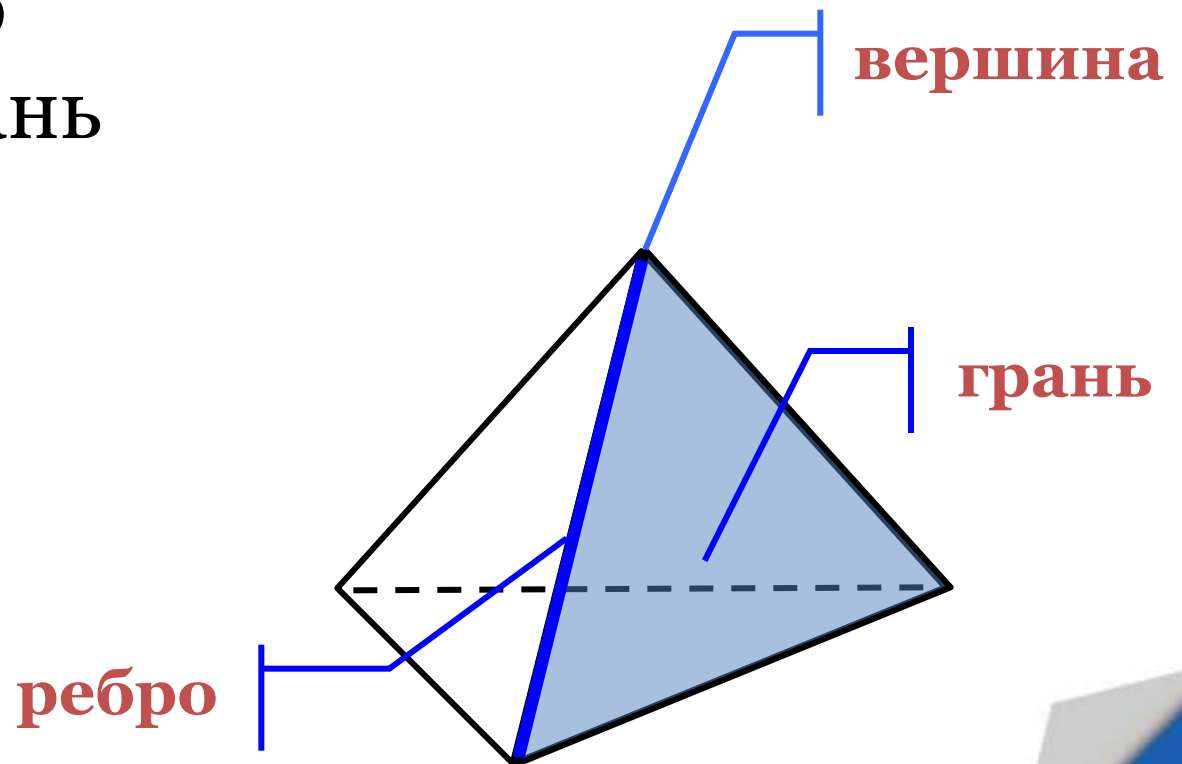


# Геометрические понятия

Точка – вершина

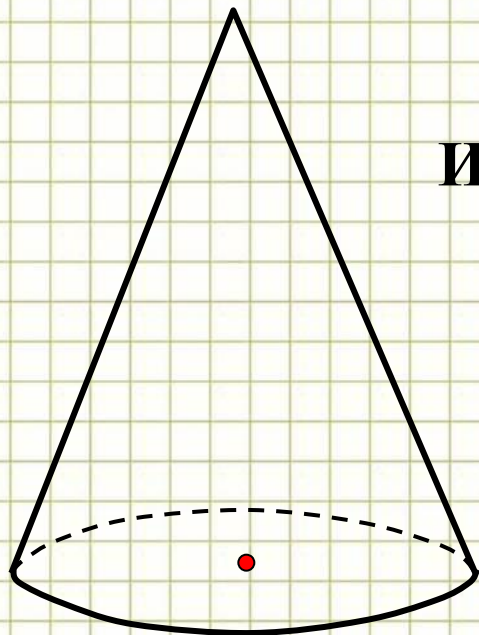
Прямая – ребро

Плоскость – грань

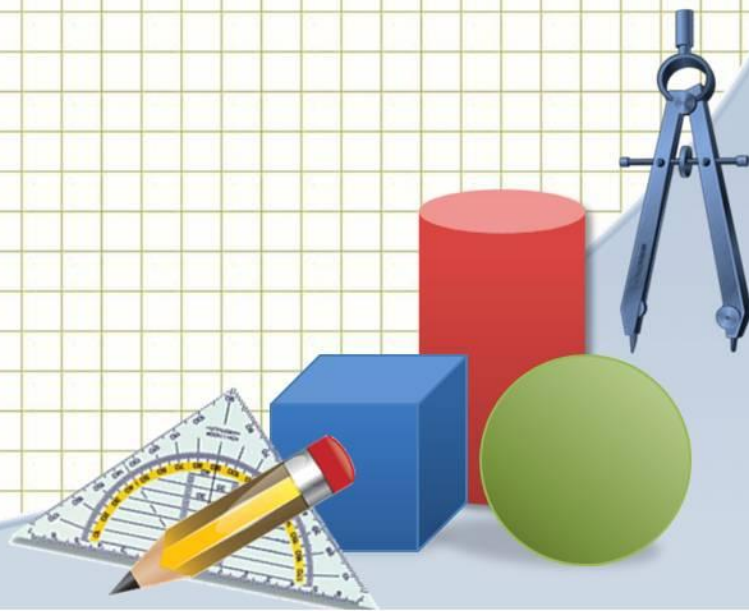


**При изучении в курсе стереометрии геометрических тел пользуются их плоскими изображениями на чертеже.**

**Изображением пространственной фигуры служит ее проекция на плоскость.**

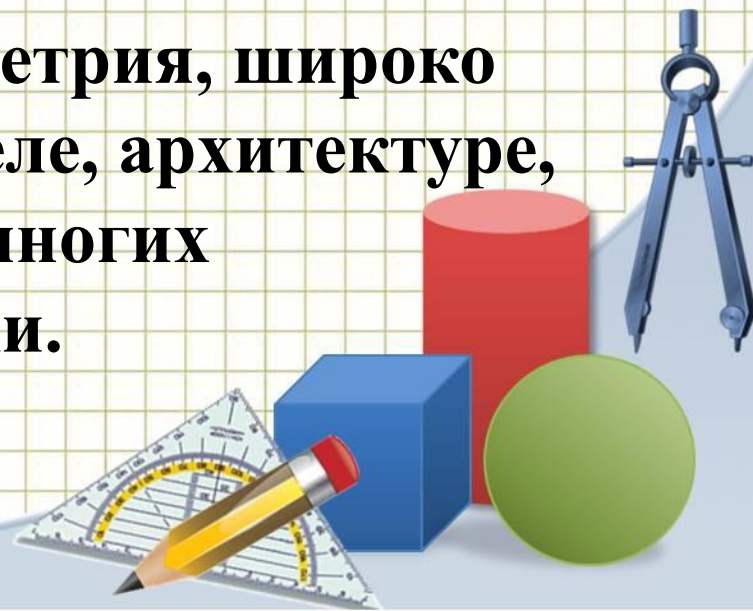


**Изображения конуса**



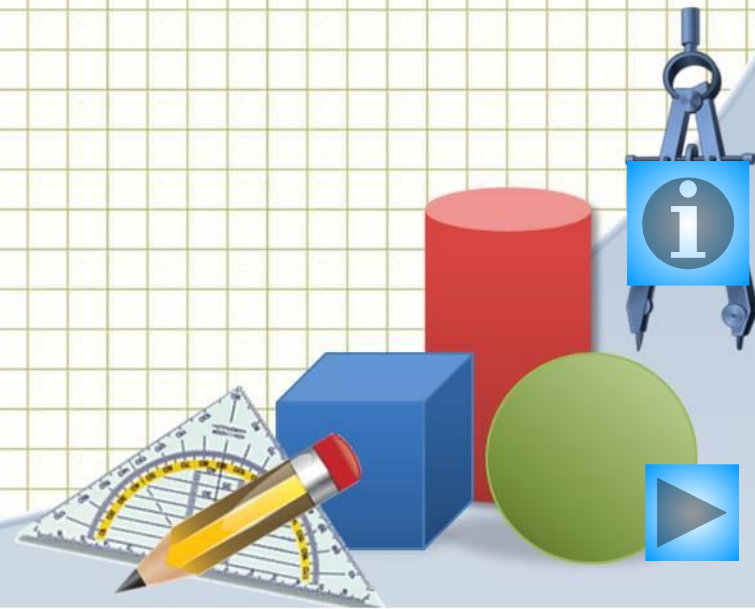
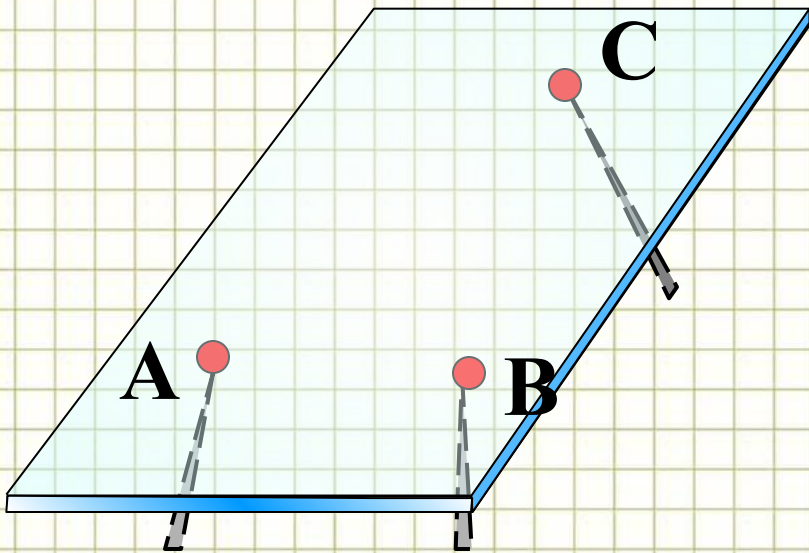
**Изучая свойства геометрических фигур – воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит прикладное значение геометрии.**

**Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.**



**Основные свойства точек, прямых и плоскостей выражены в аксиомах. Существует множество аксиом стереометрии, в учебнике вам представлены три:**

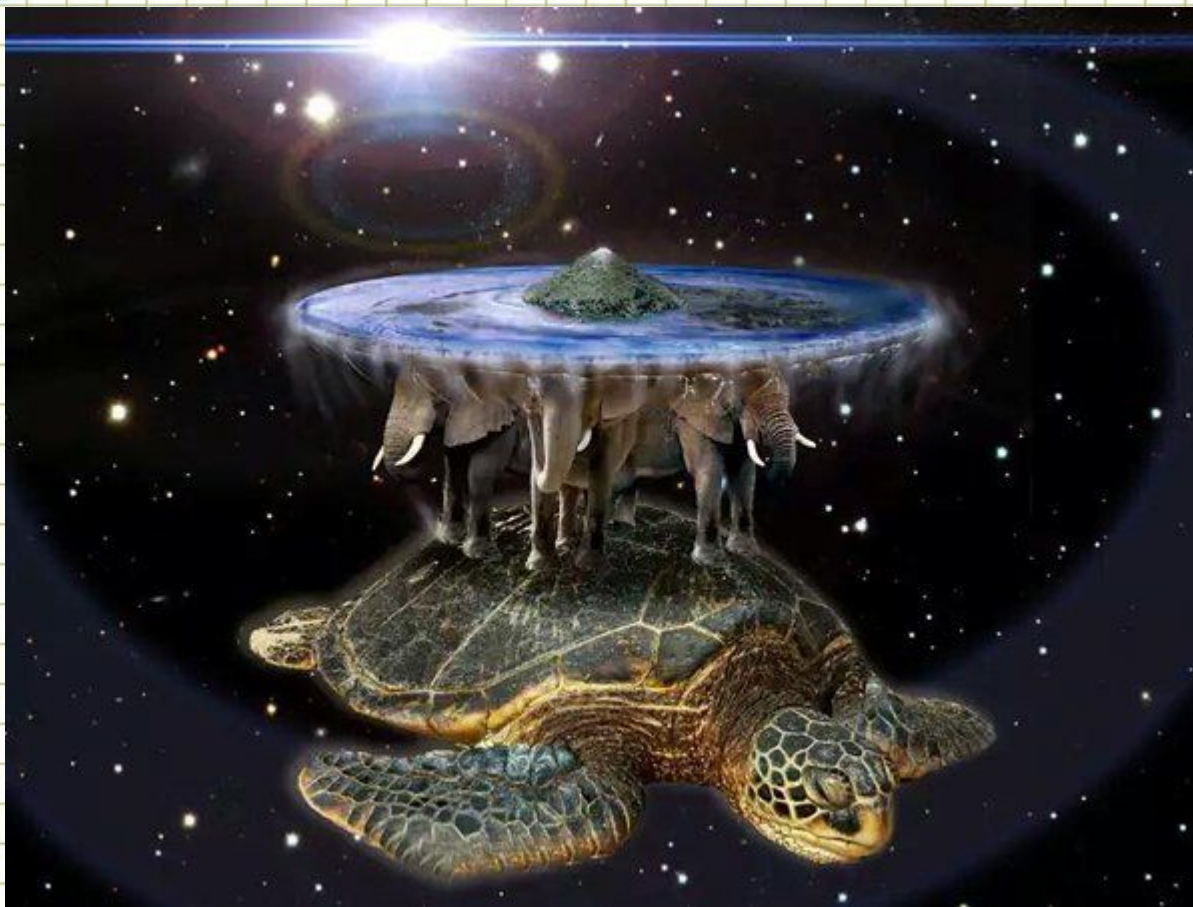
**$A_1$ . Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.**



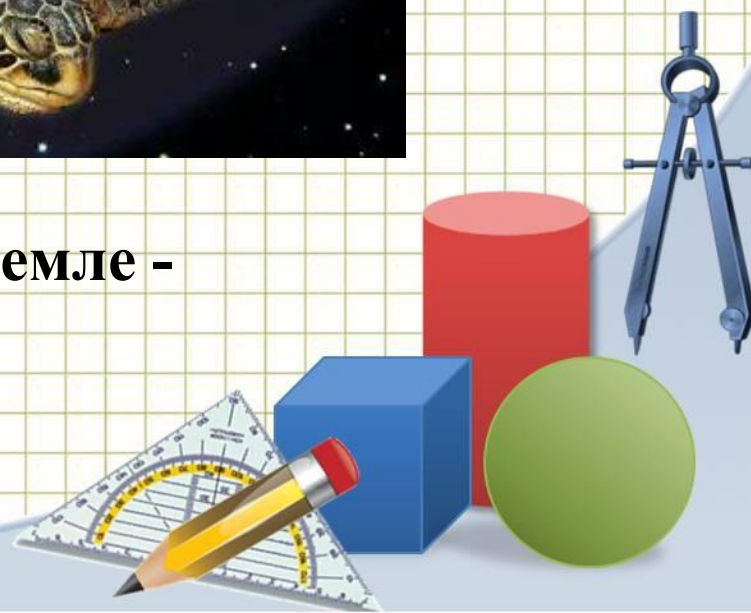


**Древнее представление о земле -  
пример к аксиоме  $A_1$**

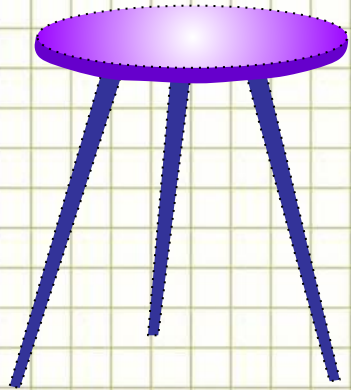




Древнее представление о земле -  
пример к аксиоме  $A_1$



# Самый простой пример к аксиоме $A_1$ из повседневной жизни:

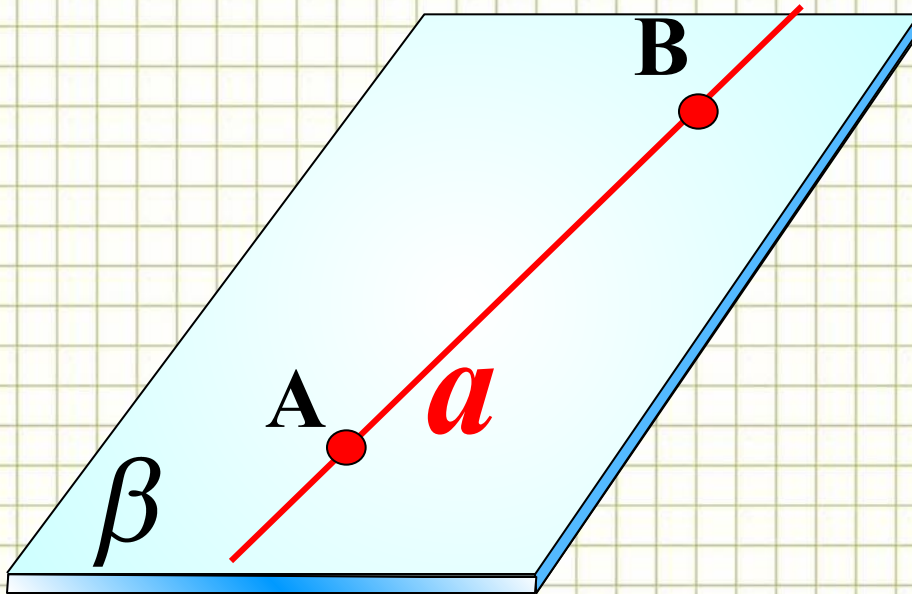


Табурет с тремя ножками всегда идеально встанет на пол и не будет качаться. У табурета с четырьмя ножками бывают проблемы с устойчивостью, если ножки стула не одинаковые по длине.

Табурет качается, т. е. опирается на три ножки, а четвертая ножка (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.



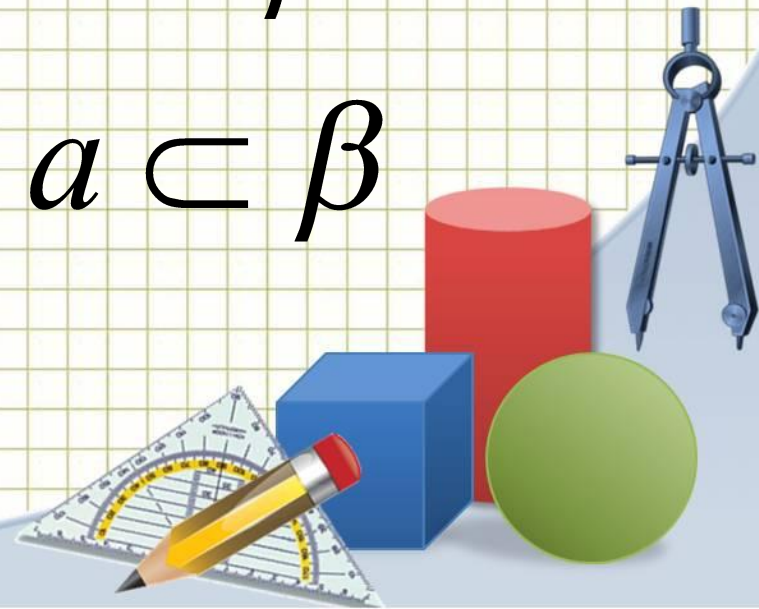
**$A_2$ .** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.



$$A \in \beta$$

$$B \in \beta$$

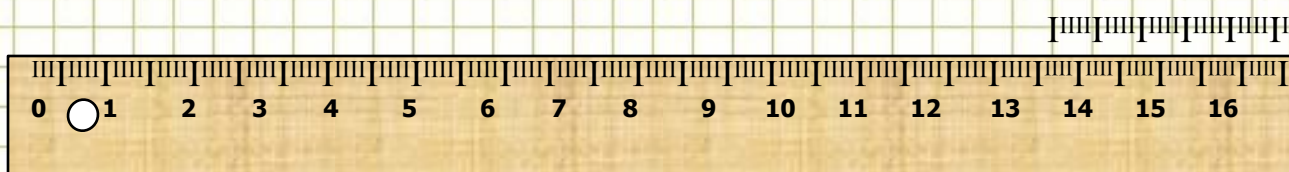
$$a \subset \beta$$



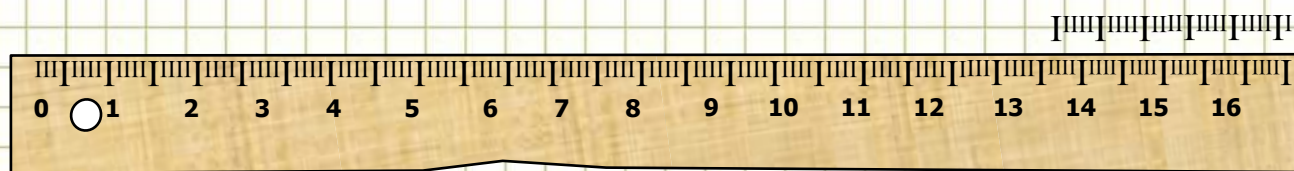


**Свойство, выраженное в аксиоме  $A_2$ , используется для проверки «ровности» чертежной линейки.**

**Линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола.**

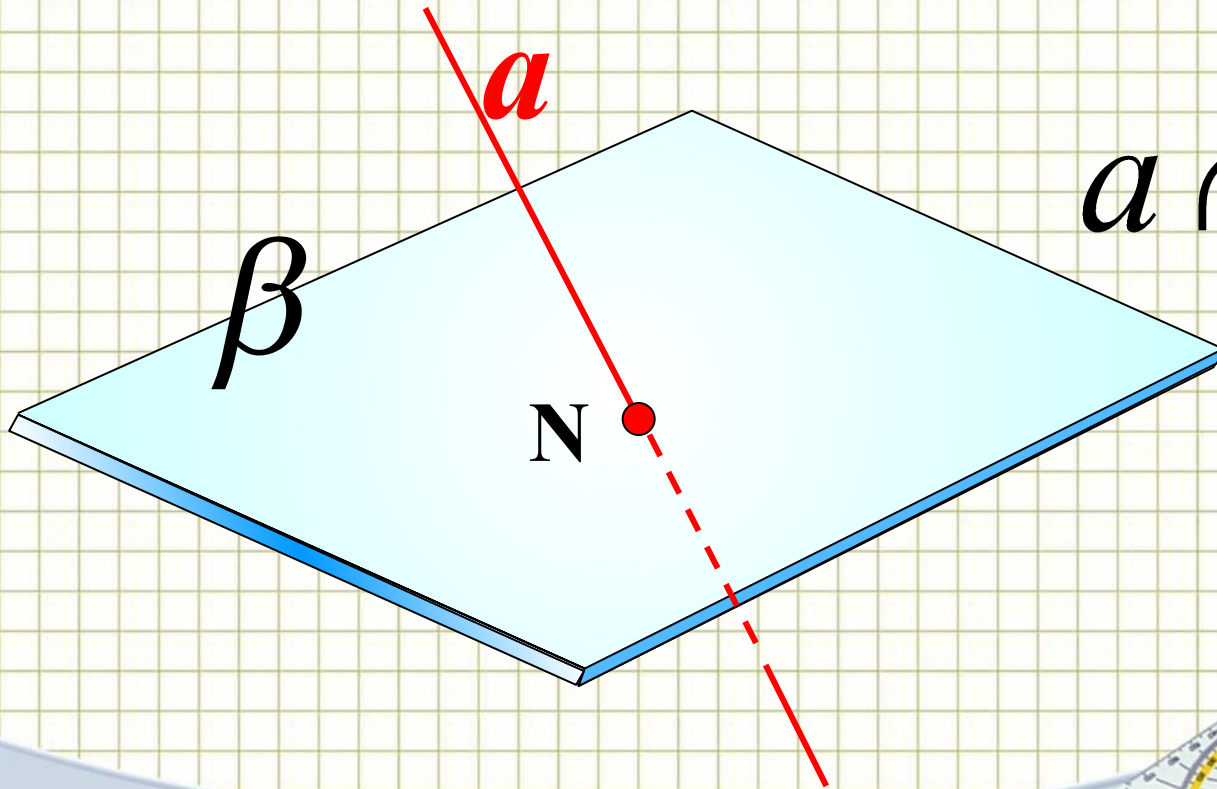


**Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.**

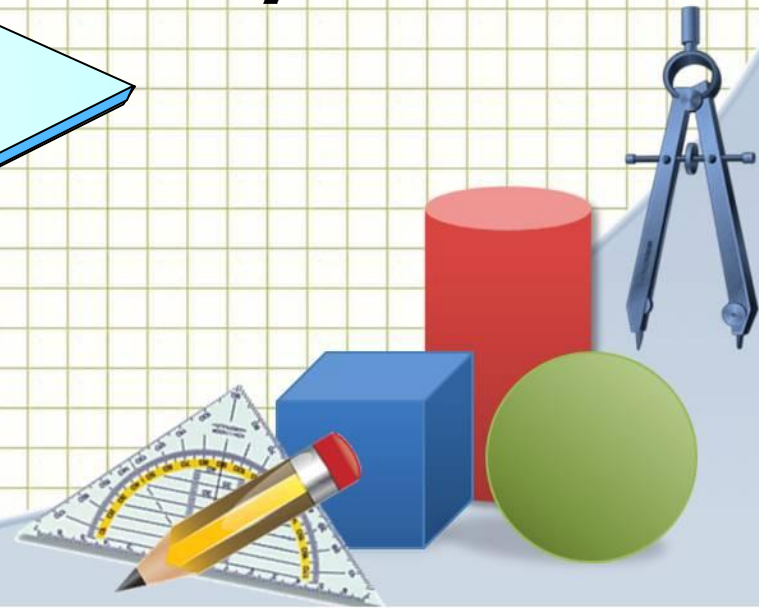


## Следствия из аксиомы $A_2$ :

1. Если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.
2. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



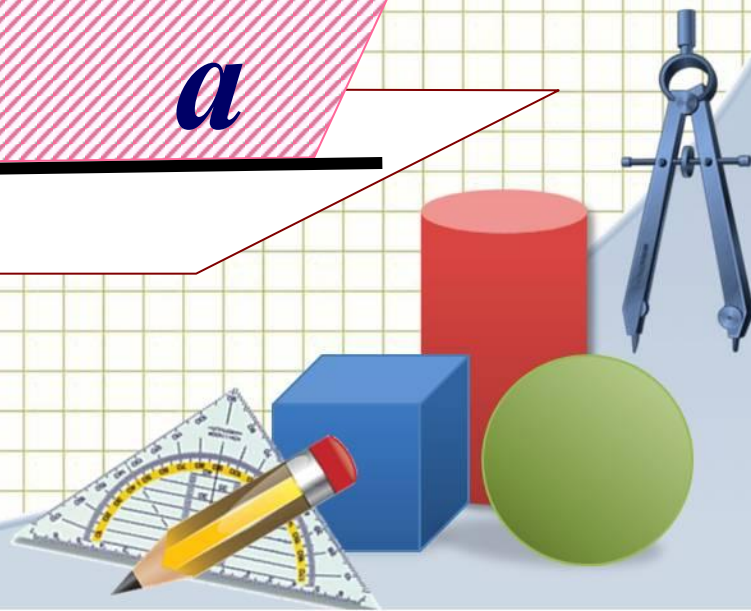
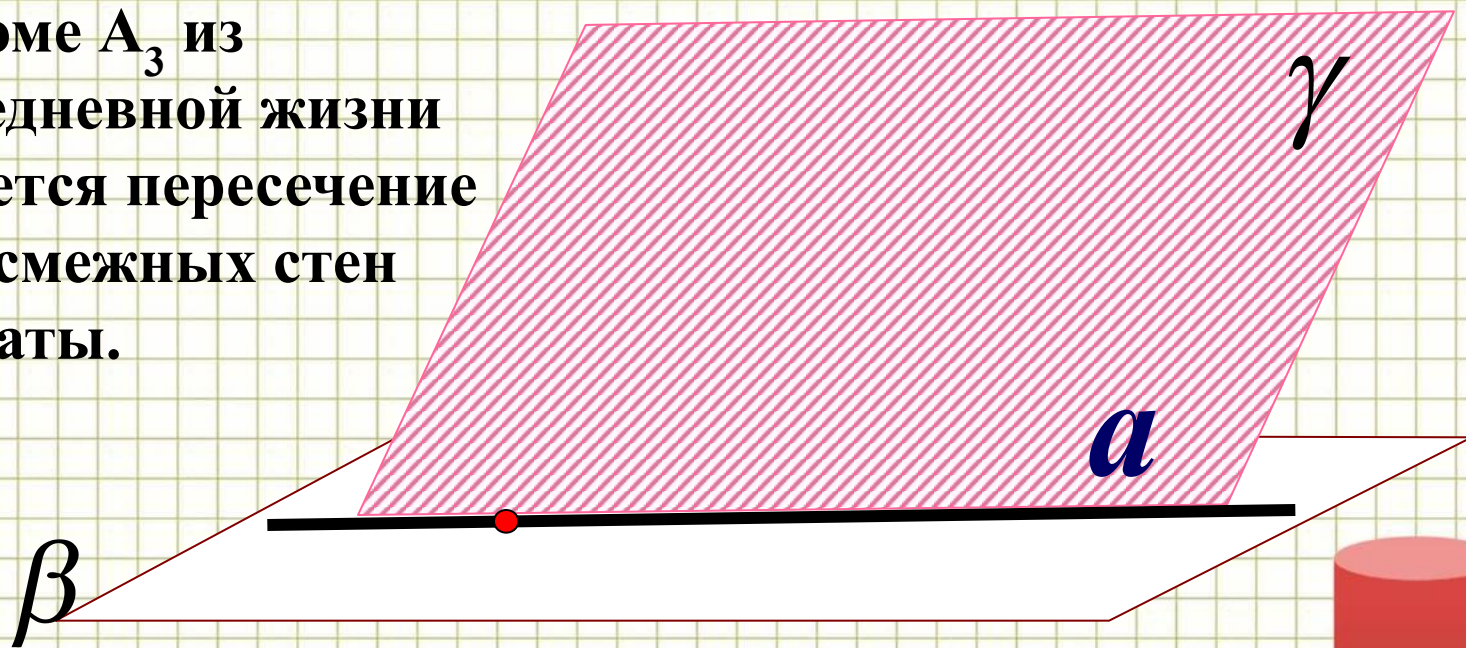
$$a \cap \beta = N$$



**$A_3$ .** Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Самый простой пример к аксиоме  $A_3$  из повседневной жизни является пересечение двух смежных стен комнаты.

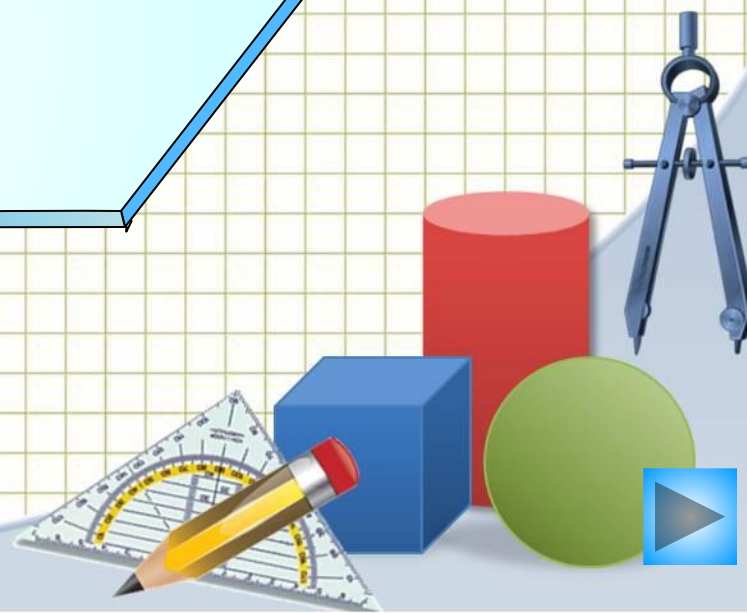
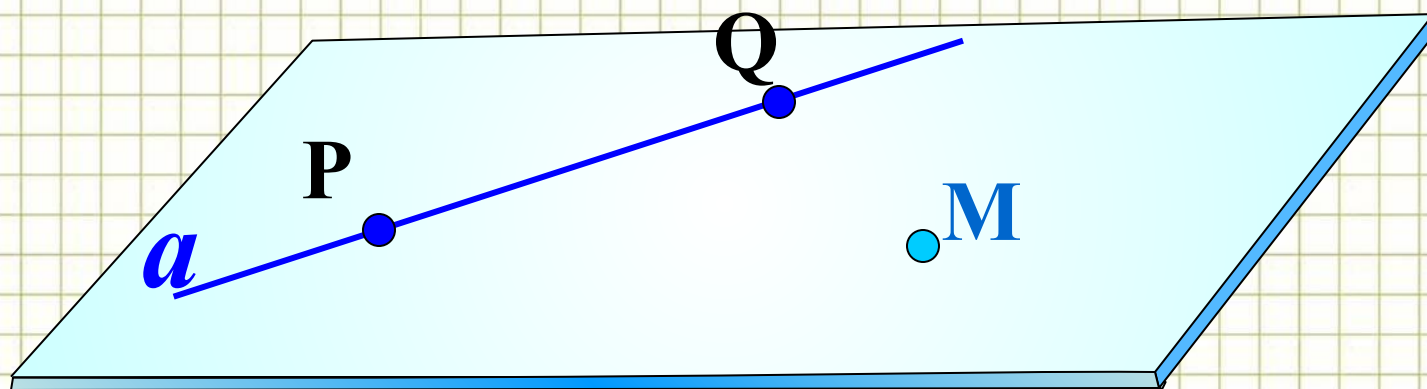
$$\beta \cap \gamma = a$$



## Следствия из аксиом

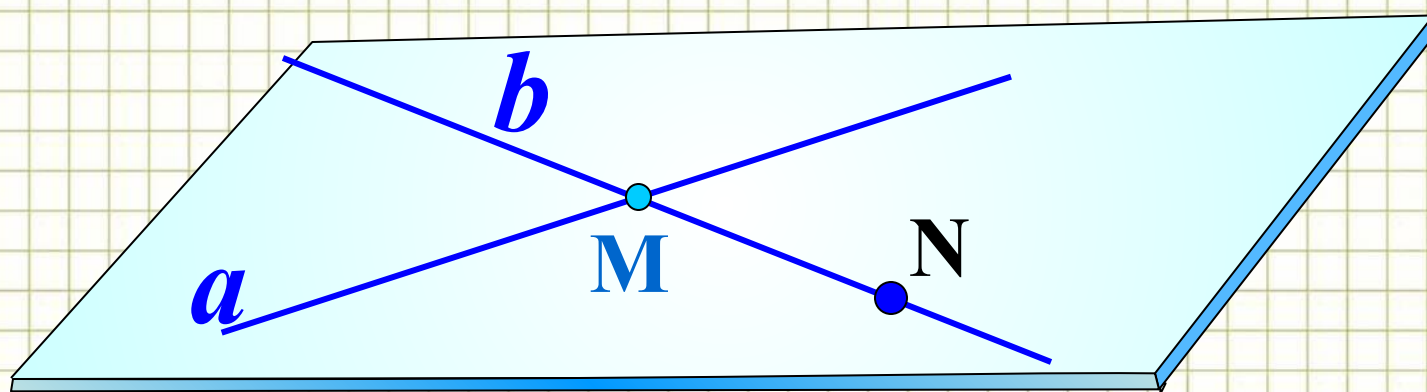
### Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



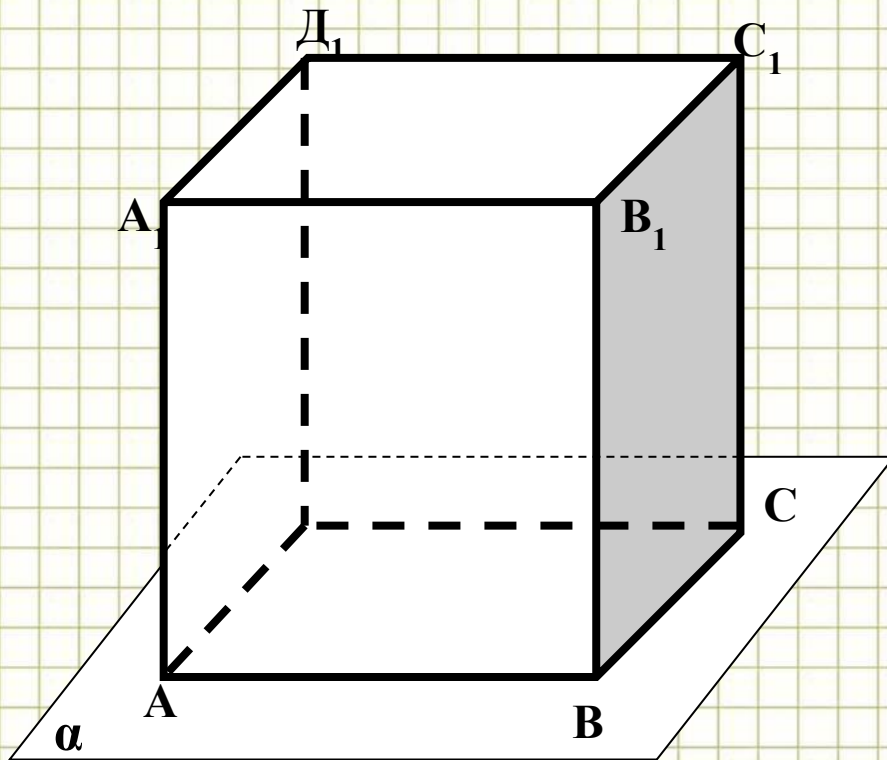
## Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна



# Устная работа.

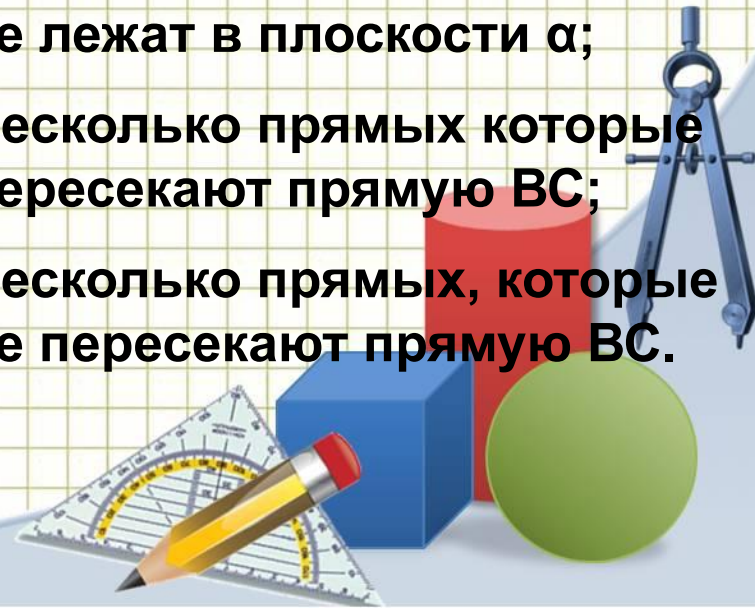
## Задача 1.



*Дано:* куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$

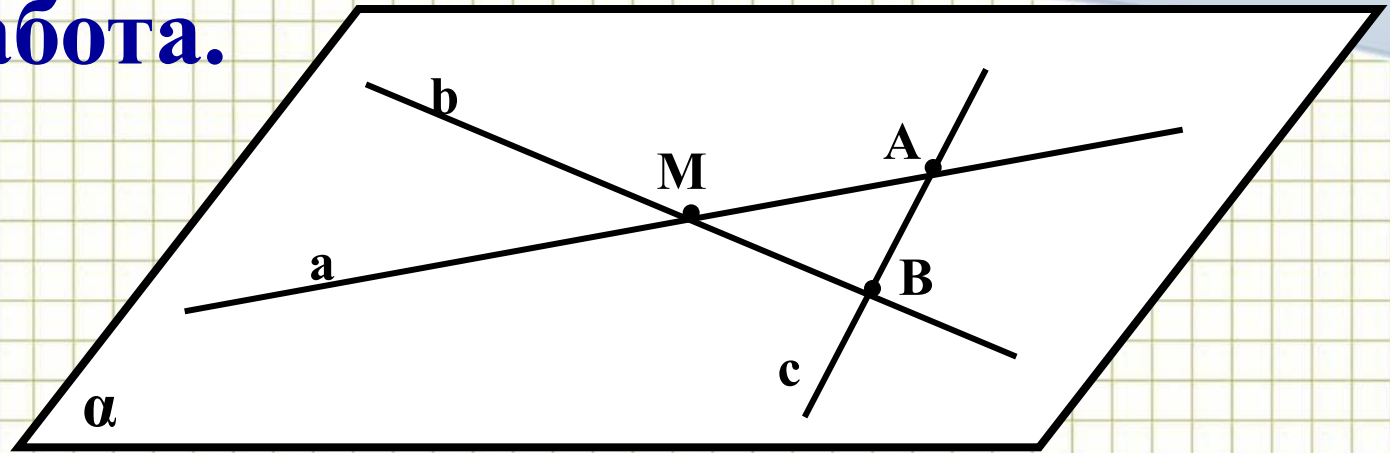
*Найдите:*

- 1) Несколько точек, которые лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 5) Несколько прямых которые пересекают прямую  $BC$ ;
- 6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую  $BC$ .



# Устная работа.

Задача 2.



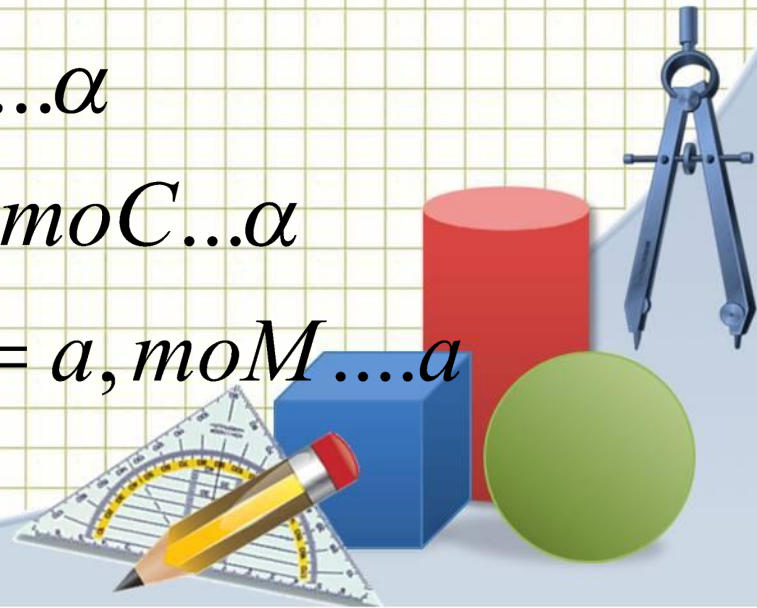
Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

1) если  $A \in a, a \in \alpha$ , то  $A \dots \alpha$

2) если  $A \in \alpha, B \in \alpha$ , то  $AB \dots \alpha$

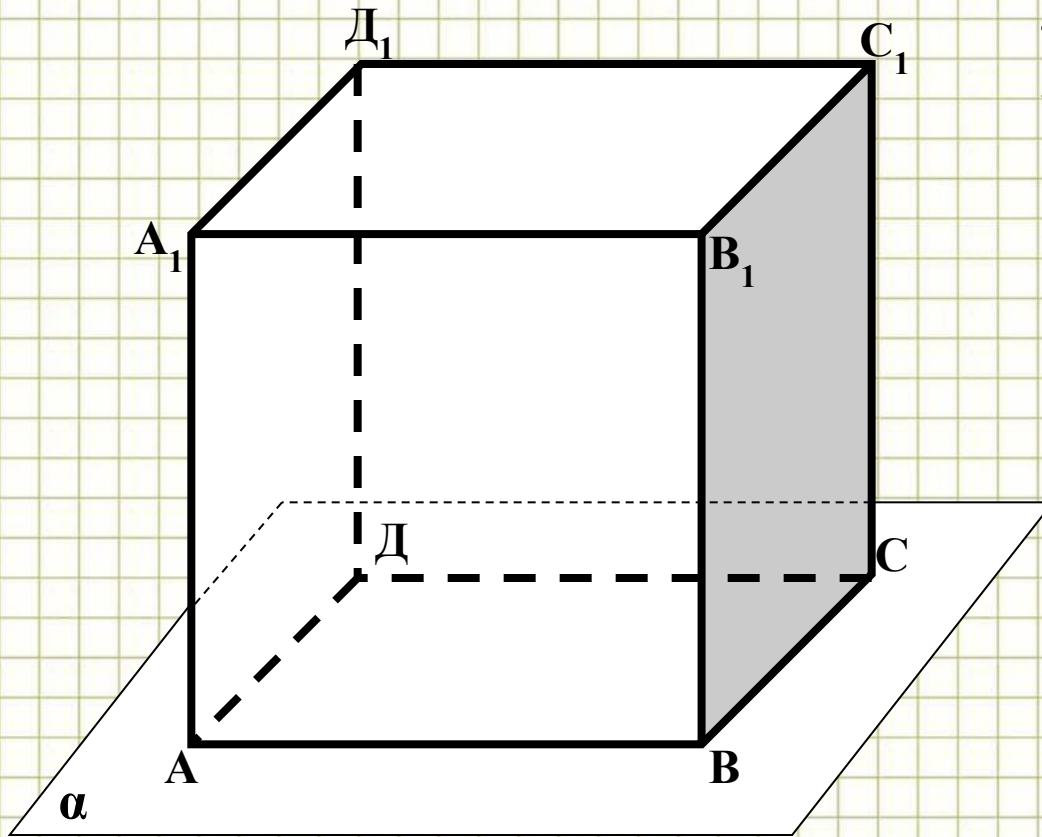
3) если  $A \in \alpha; B \in \alpha; C \in AB$ , то  $C \dots \alpha$

4) если  $M \in \alpha; M \in \beta, \alpha \cap \beta = a$ , то  $M \dots a$



# Устная работа.

## Задача 3.

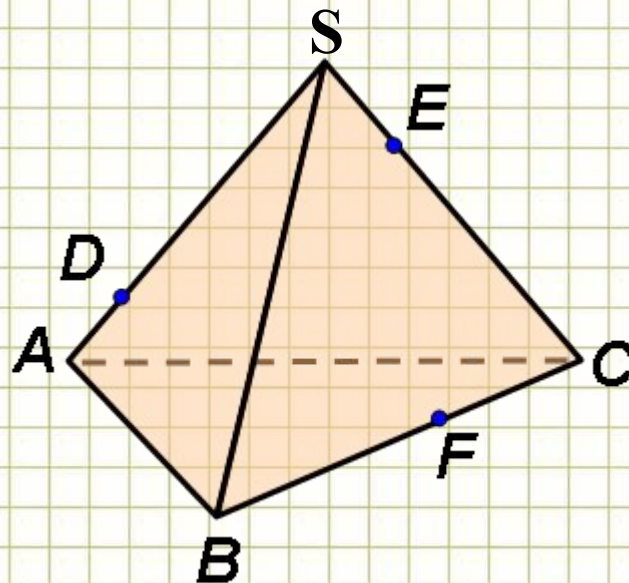


Лежат ли прямые  $AA_1$ ,  $AB$ ,  $AD$  в одной плоскости?

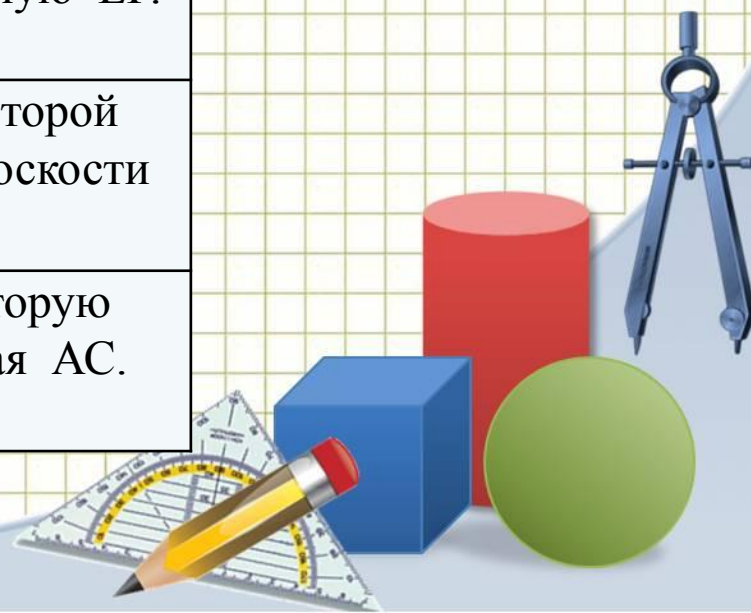
Прямые  $AA_1$ ,  $AB$ ,  $AD$  проходят через точку  $A$ , но не лежат в одной плоскости



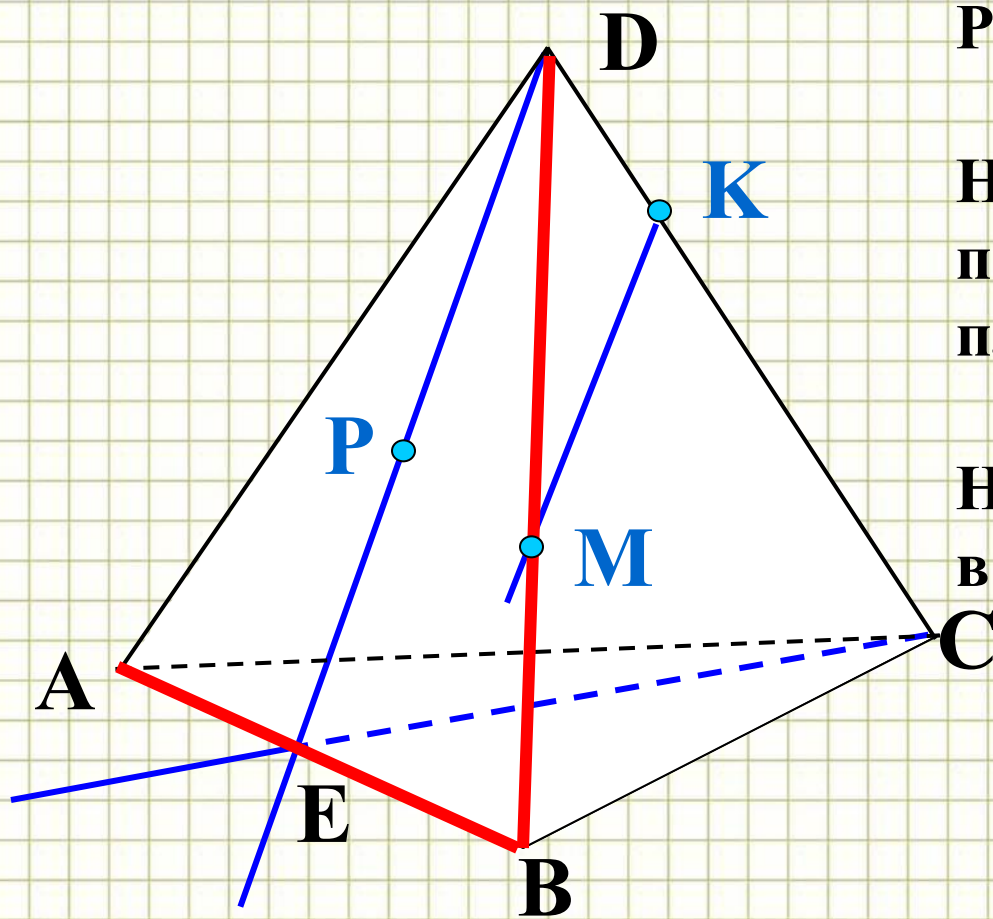




Вариант 1	Вариант 2
1) Две плоскости, содержащие прямую DE.	1) Две плоскости, содержащие прямую EF.
2) Прямую по которой пересекаются плоскости AEF и SBC.	2) Прямую по которой пересекаются плоскости BDE и SAC
3) Плоскость, которую пересекает прямая SB.	3) Плоскость, которую пересекает прямая AC.



## Задача 1



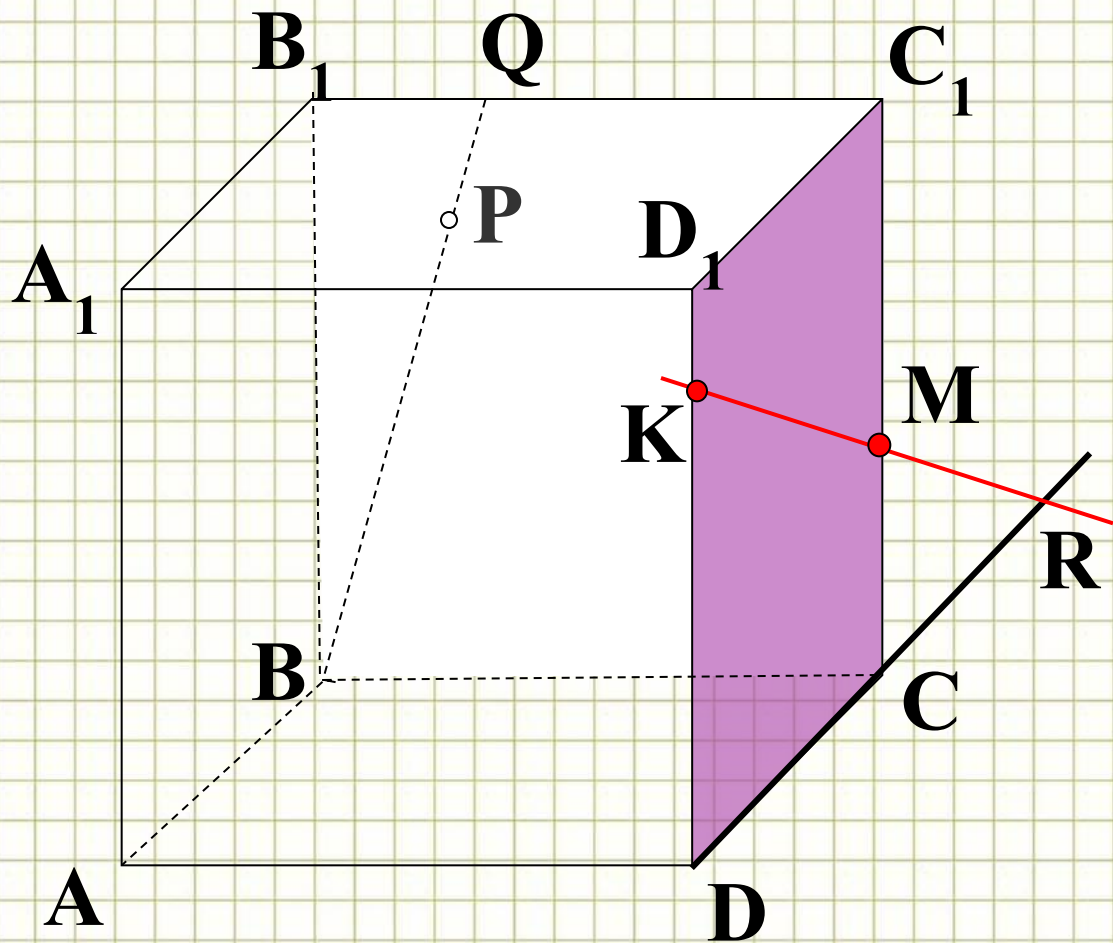
Назовите плоскости, в которых лежат прямые PE, МК, DB, АВ, ЕС

Назовите точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC

Назовите точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC

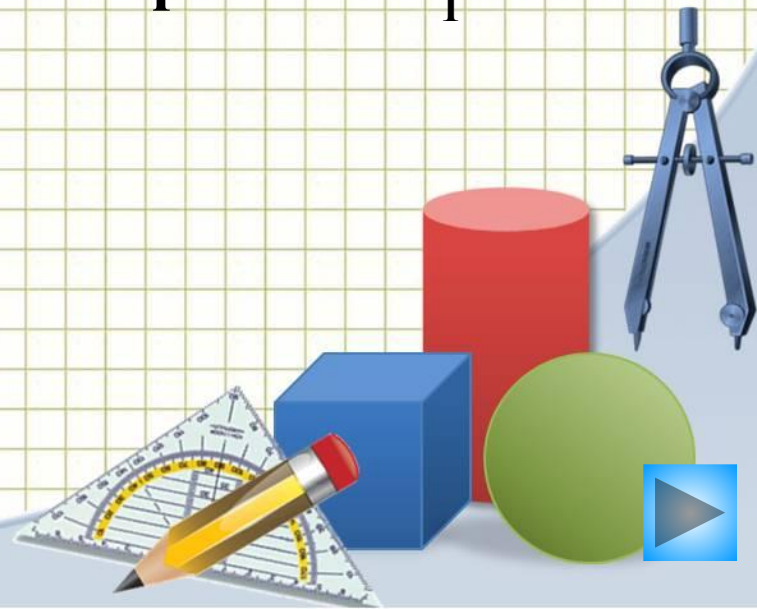


## Задача 2



Назовите точки,  
лежащие в  
плоскостях  $DCC_1$  и  
 $BQC$

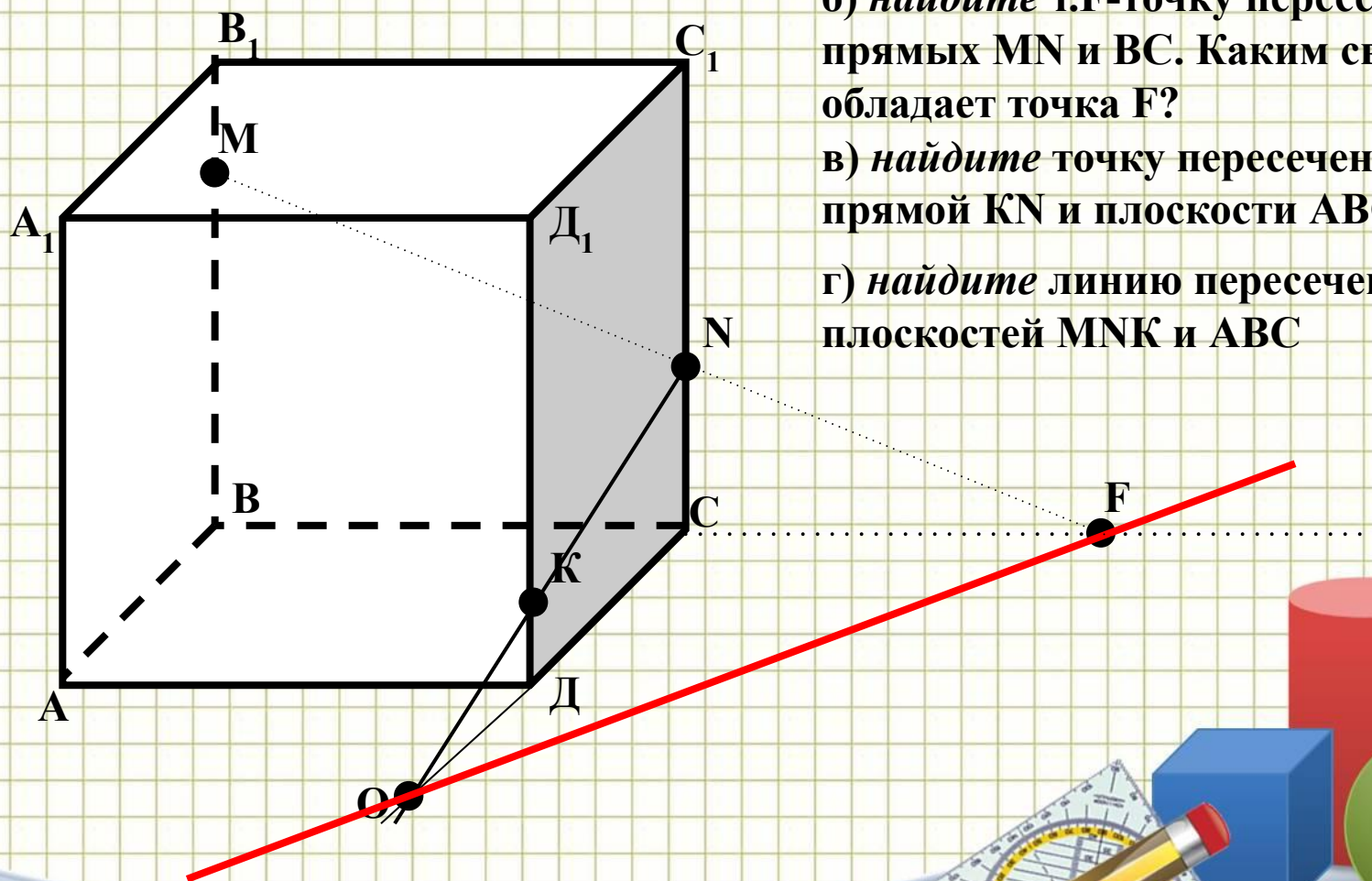
Назовите плоскости,  
в которых лежит  
прямая  $AA_1$



## Задача 4

Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Точка  $M$  лежит на ребре  $BB_1$ , т. $N$  лежит на ребре  $CC_1$  и точка  $K$  лежит на ребре  $DD_1$

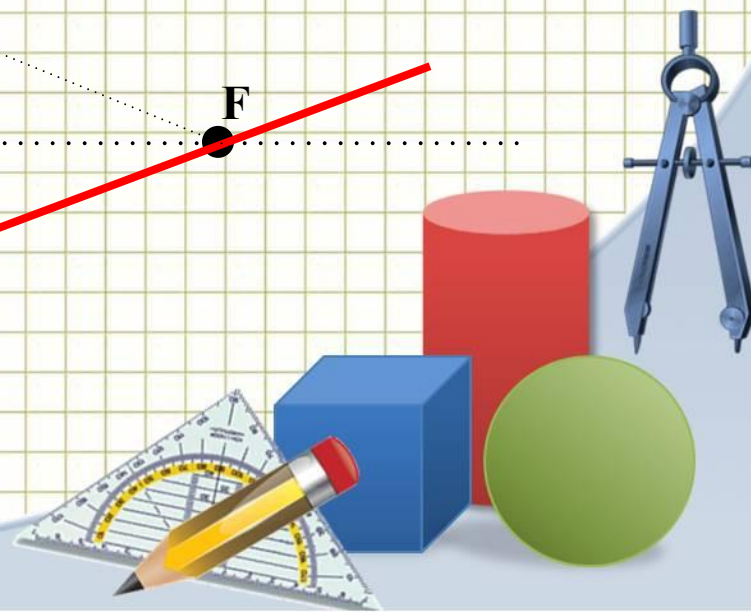


а) назовите плоскости, в которых лежат точки  $M$ ;  $N$ .

б) найдите т. $F$ -точку пересечения прямых  $MN$  и  $BC$ . Каким свойством обладает точка  $F$ ?

в) найдите точку пересечения прямой  $KN$  и плоскости  $ABC$

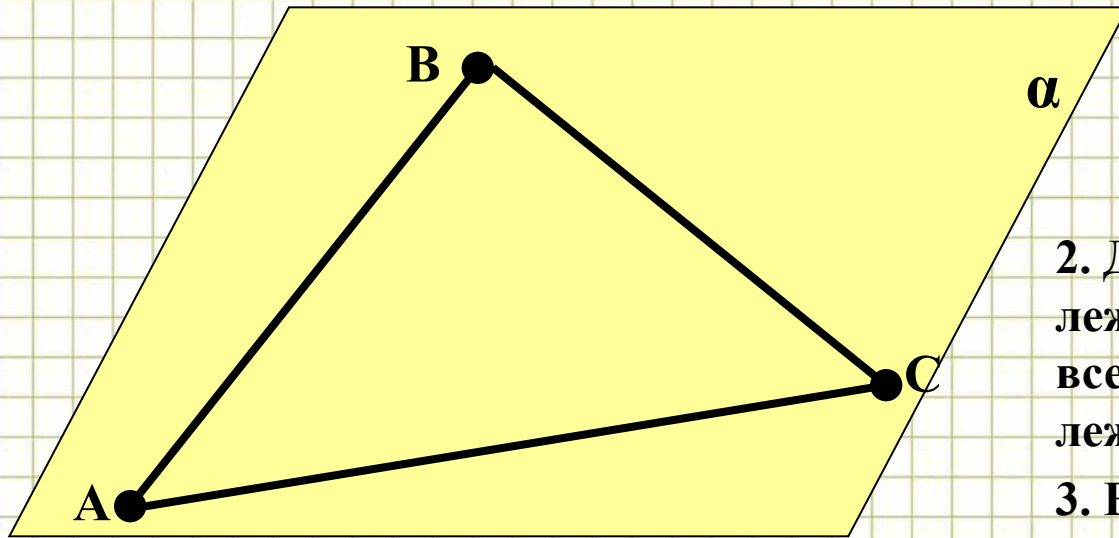
г) найдите линию пересечения плоскостей  $MNK$  и  $ABC$



## Задачу 5

Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

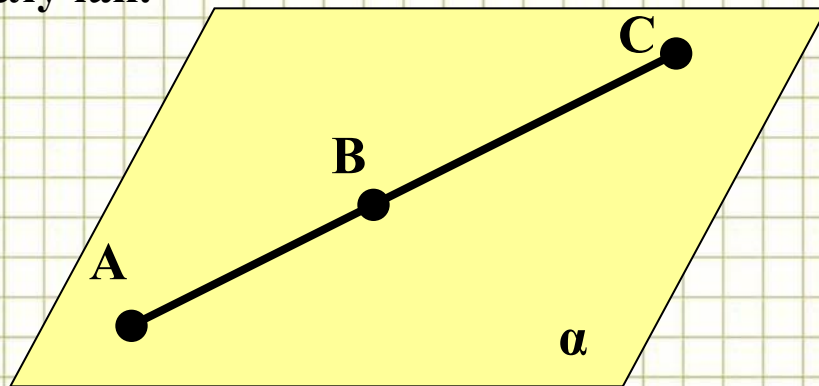
1 случай.



Доказательство:

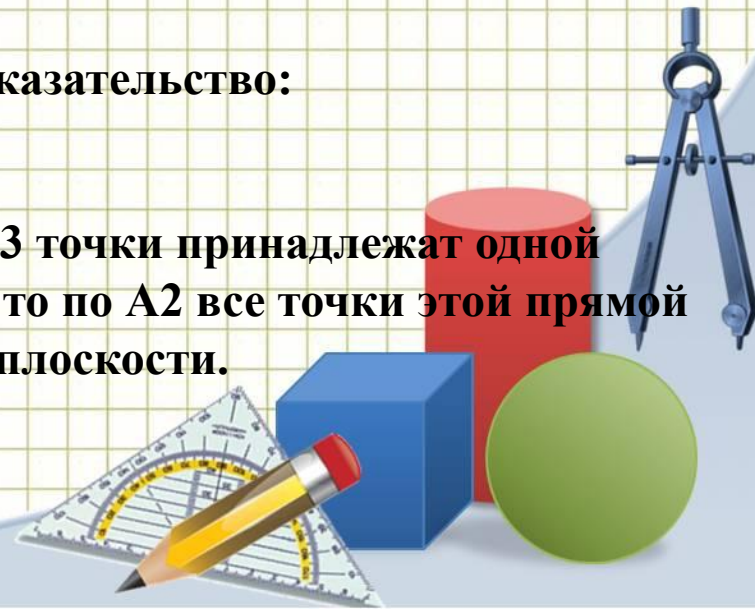
1.  $(A, B, C) \in \alpha$ , значит по А1 через  $A, B, C$  проходит единственная плоскость.
2. Две точки каждого отрезка лежат в плоскости, значит по А2 все точки каждого из отрезков лежат в плоскости  $\alpha$ .
3. Вывод:  $AB, BC, AC$  лежат в плоскости  $\alpha$

2 случай.



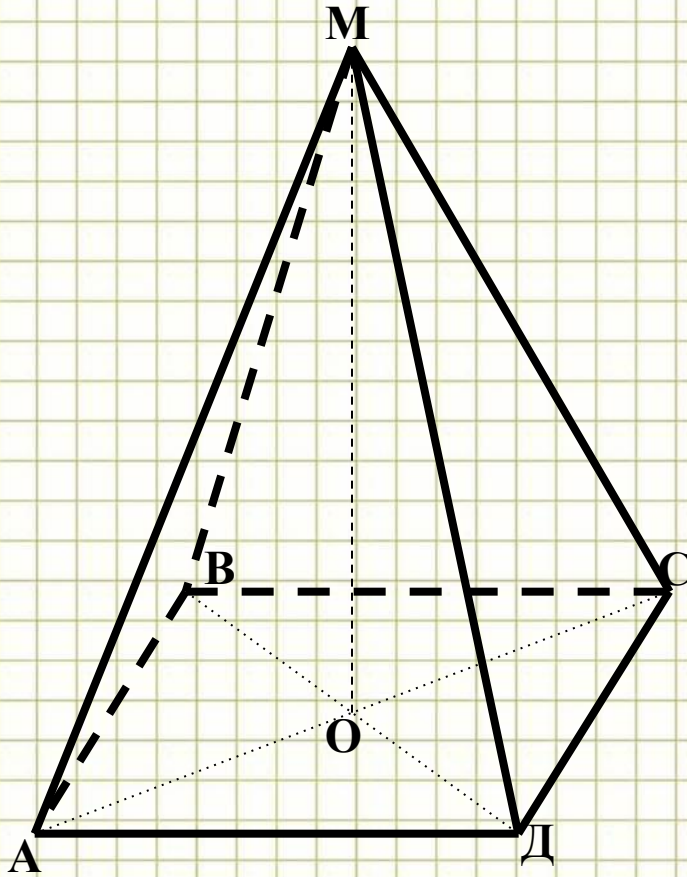
Доказательство:

Так как 3 точки принадлежат одной прямой, то по А2 все точки этой прямой лежат в плоскости.



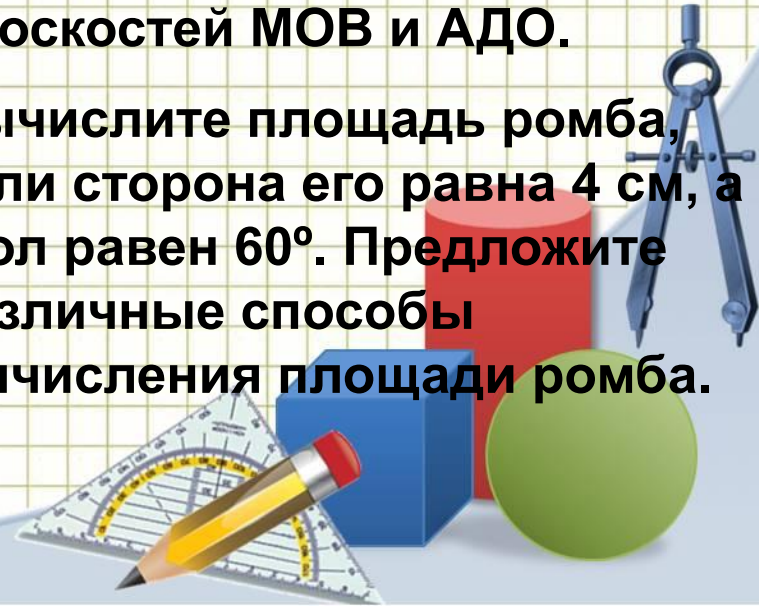
## Задача 6.

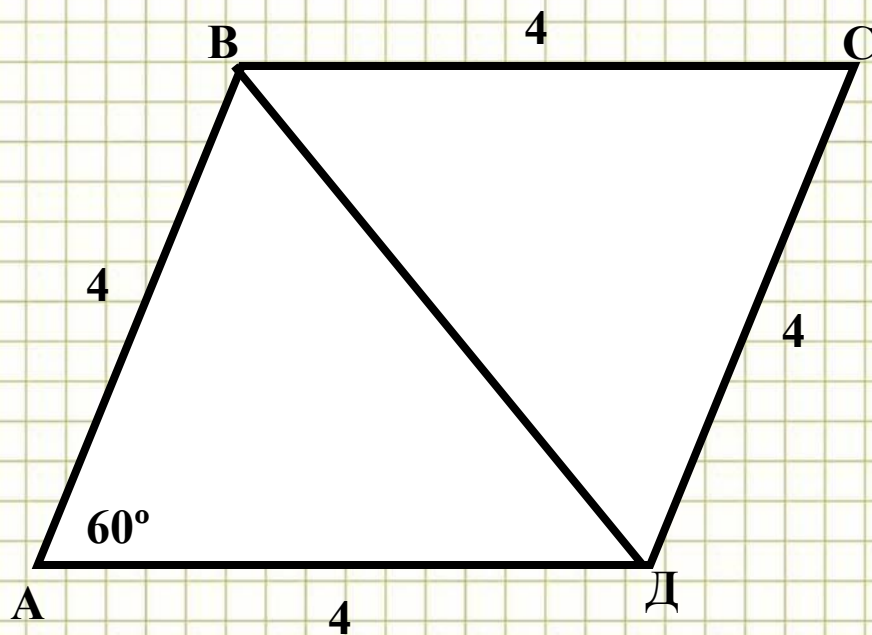
ABCD – ромб, O – точка пересечения его диагоналей, M – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, D, O лежат в плоскости  $\alpha$ .



Определить и обосновать:

1. Лежат ли в плоскости  $\alpha$  точки B и C?
2. Лежит ли в плоскости MOB точка D?
3. Назовите линию пересечения плоскостей MOB и ADO.
4. Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен  $60^\circ$ . Предложите различные способы вычисления площади ромба.





$\triangle ABD = \triangle BCD$  (по трем сторонам),  
значит  $S_{ABD} = S_{BCD}$ .

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin \angle C$$

$$\angle A = \angle C \Rightarrow \sin \angle A = \sin \angle C$$

$$AB = BC, AD = CD$$

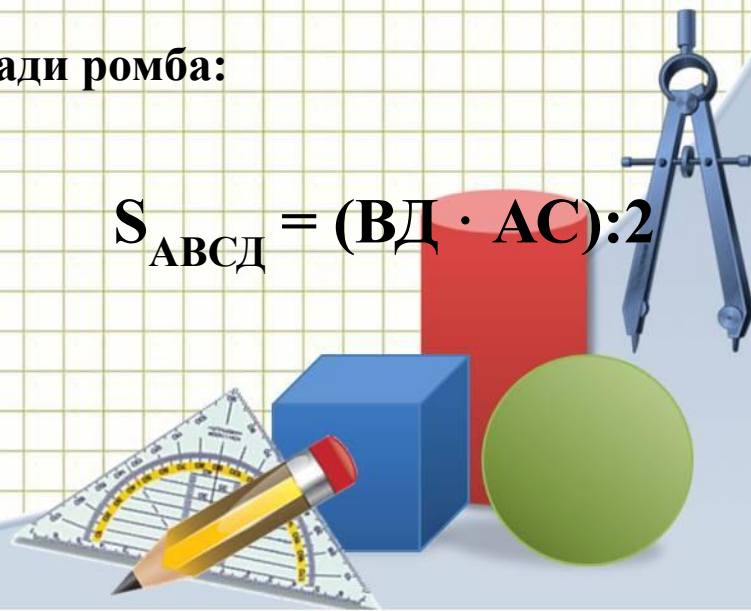
$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{BCD}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$$

**Формулы для вычисления площади ромба:**

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

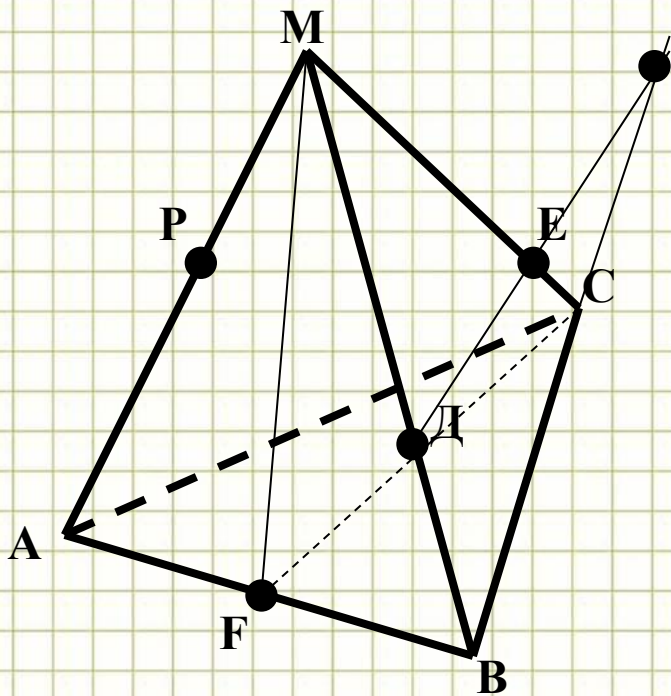
$$S_{ABCD} = (BD \cdot AC) : 2$$



## Задача №1

Дан тетраэдр МАВС, каждое ребро которого равно 6 см.

$D \in MB, E \in MC, F \in AB, AF = FB, P \in MA$



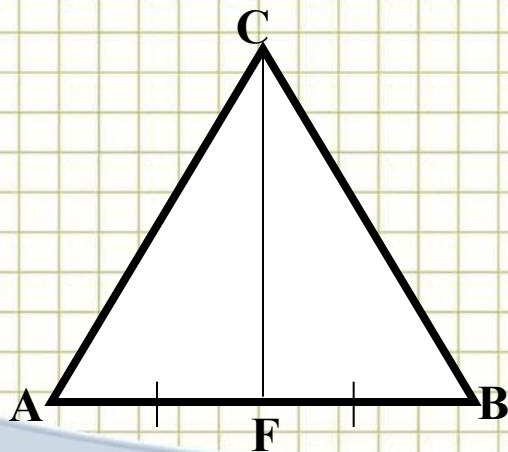
1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) МАВ и МFC; б) МCF и АВС.
2. Найдите длину CF и  $S_{ABC}$
3. Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью АВС?

Справочный материал:

Свойство медианы равнобедренного треугольника: В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из вершины треугольника к основанию, является биссектрисой и высотой.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

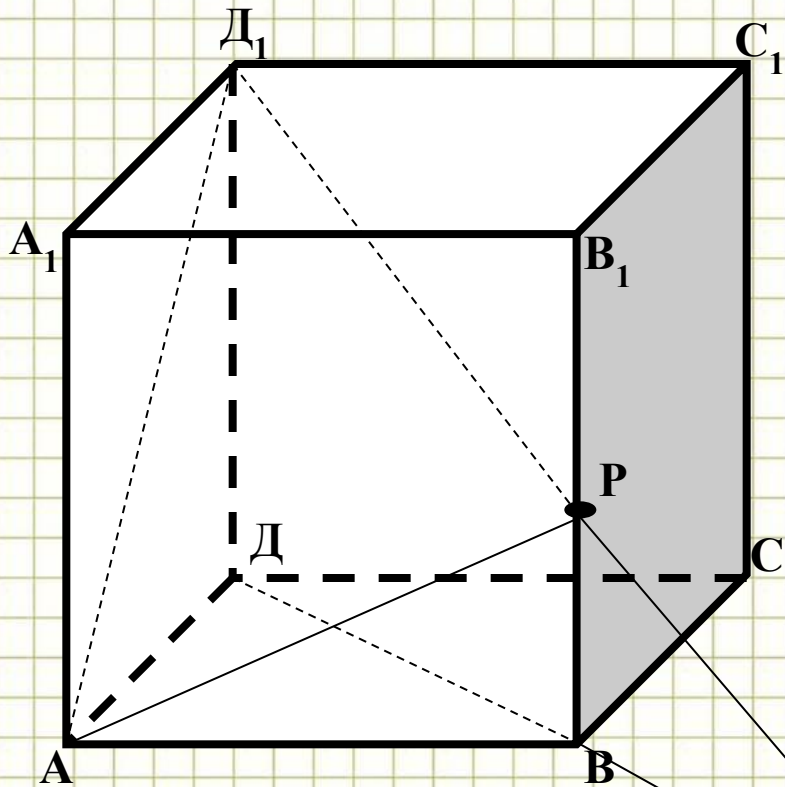
Справноста.треуг. 
$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



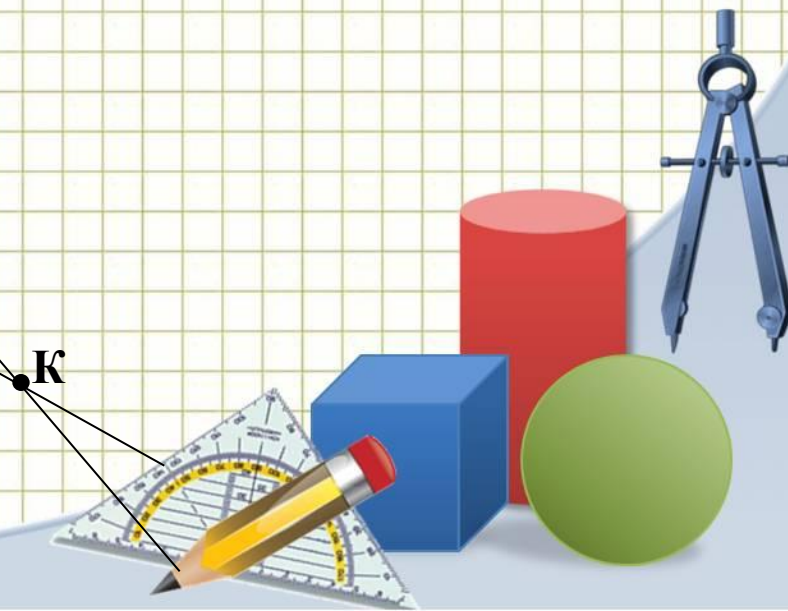


## Задача №2

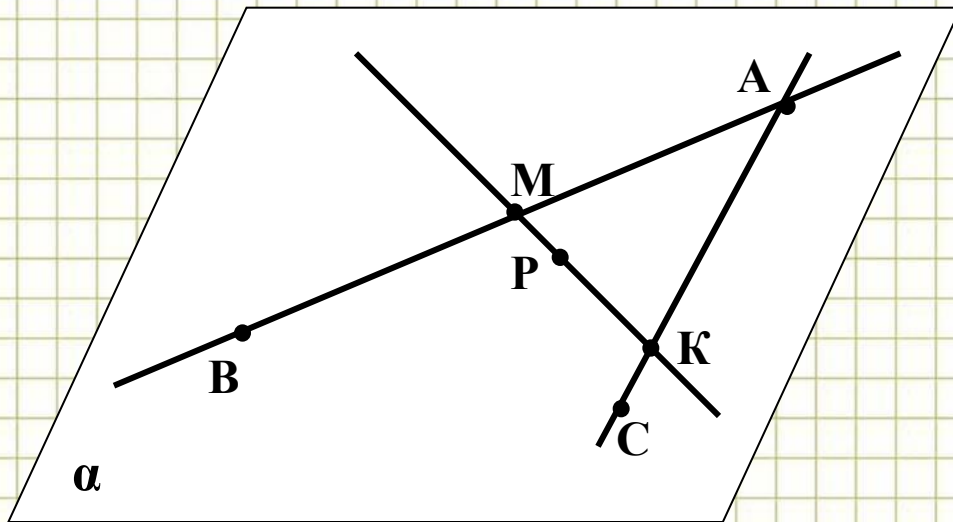
Дано :  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $P \in BB_1$ ,  $B_1 P = PB$ .



- 1) Как построить точку пересечения плоскости  $ABC$  с прямой  $D_1 P$ ?
- 2) Как построить линию пересечения плоскостей  $AD_1 P$  и  $ABB_1$ ?
- 3) Вычислите длину отрезков  $AP$  и  $AD_1$ , если  $AB = a$



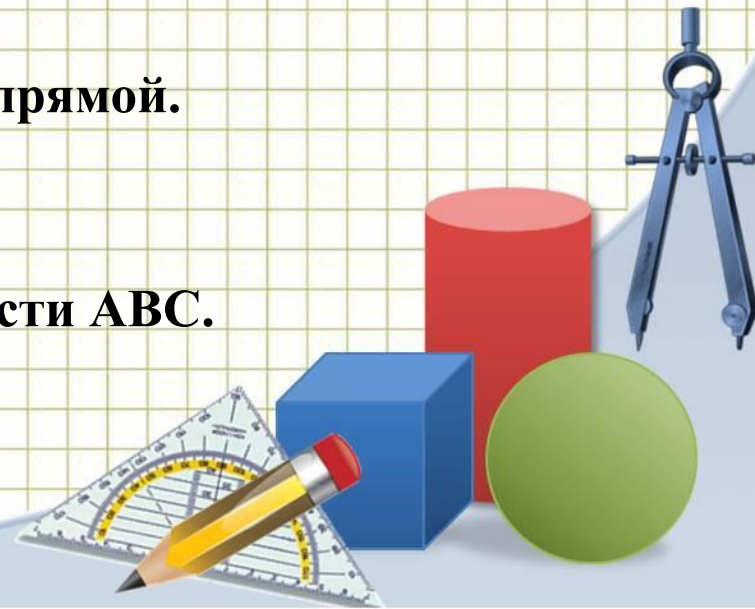
## Задача №3



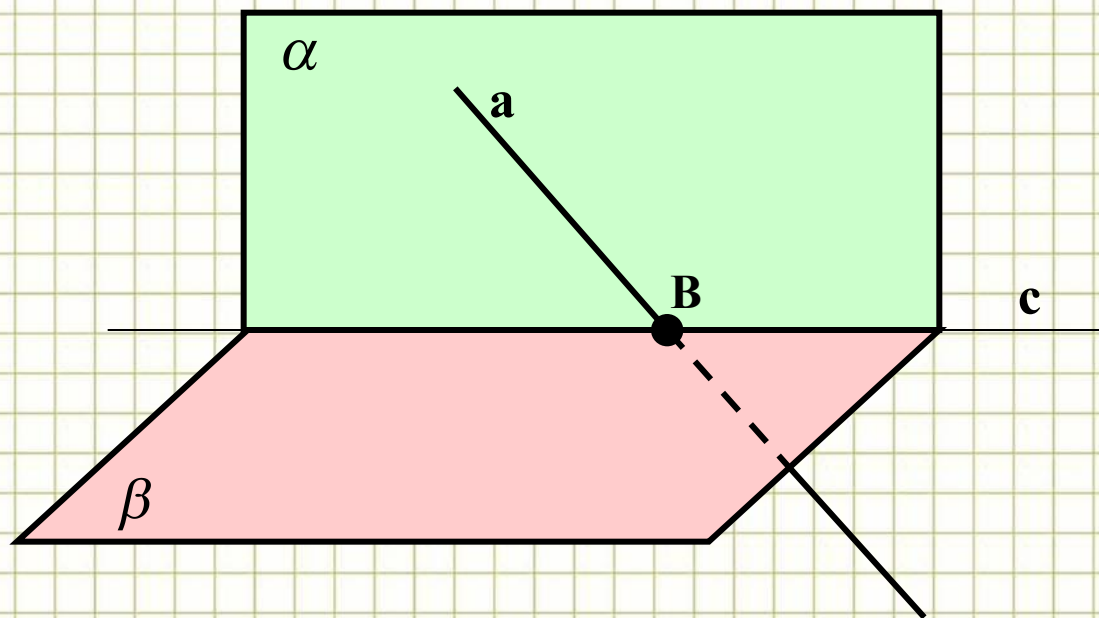
**Дано:** Точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой.

$$M \in AB, K \in AC, P \in MK$$

**Докажите,** что точка  $P$  лежит в плоскости  $ABC$ .



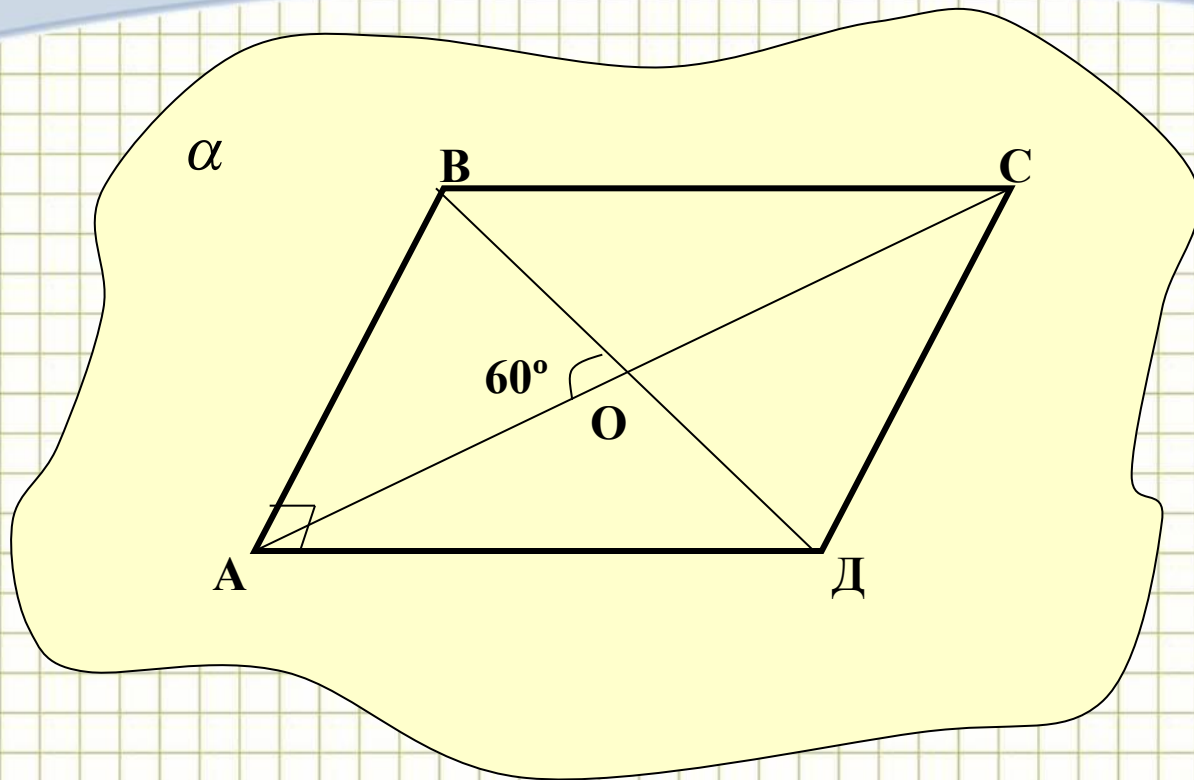
## Задача 7



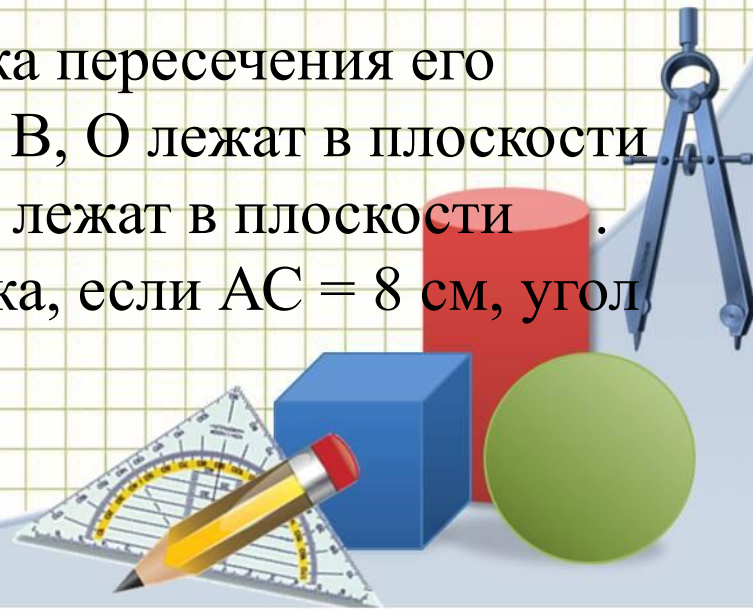
Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . Прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  и пересекает плоскость  $\beta$ .  
Пересекаются ли прямые  $a$  и  $c$ ? Почему?



## Задача 8



Дан прямоугольник  $ABCD$ ,  $O$  – точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $O$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Докажите, что точки  $C$  и  $D$  также лежат в плоскости  $\alpha$ . Вычислите площадь прямоугольника, если  $AC = 8$  см, угол  $AOB = 60^\circ$ .



# Домашнее задание:

1. Прочитать пункты 1; 2; 3 на стр. 3 – 7
2. Выучить теоремы 1, 2 ( с доказательством); повторить аксиомы А1 – А3
3. Решить задачи №8, 9, 11, 13 ( с объяснением ответов)



# Интернет-ресурсы

1. <http://gym1.ucoz.ru/load/1-1-0-145>. Источник шаблона: *Ранько Елена Алексеевна учитель начальных классов МАОУ лицей №21 г. Иваново*
2. Циркуль: <http://www.daviddarling.info/images/compasses.jpg>
3. Карандаш:  
<http://www.proshkolu.ru/content/media/pic/std/3000000/2240000/2239093-7acd9447b354cc7e.gif>
4. Угольник-транспортир:  
[http://p.alejka.pl/i2/p\\_new/25/38/duza-ekierka-geometryczna-z-uchwytem-rotring-14-cm0\\_b.jpg](http://p.alejka.pl/i2/p_new/25/38/duza-ekierka-geometryczna-z-uchwytem-rotring-14-cm0_b.jpg)
5. Фон «тетрадная клетка»:  
<http://radikal.ua/data/upload/49112/4efc3/3bd0a3d6bb.jpg>
6. <http://nsportal.ru/ap/ap/drugoe/2012/04/20/prezentatsiya-po-teme-stereometriya>



# Литература

1. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательной школы, Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др., издательство: "Просвещение" 2002г

