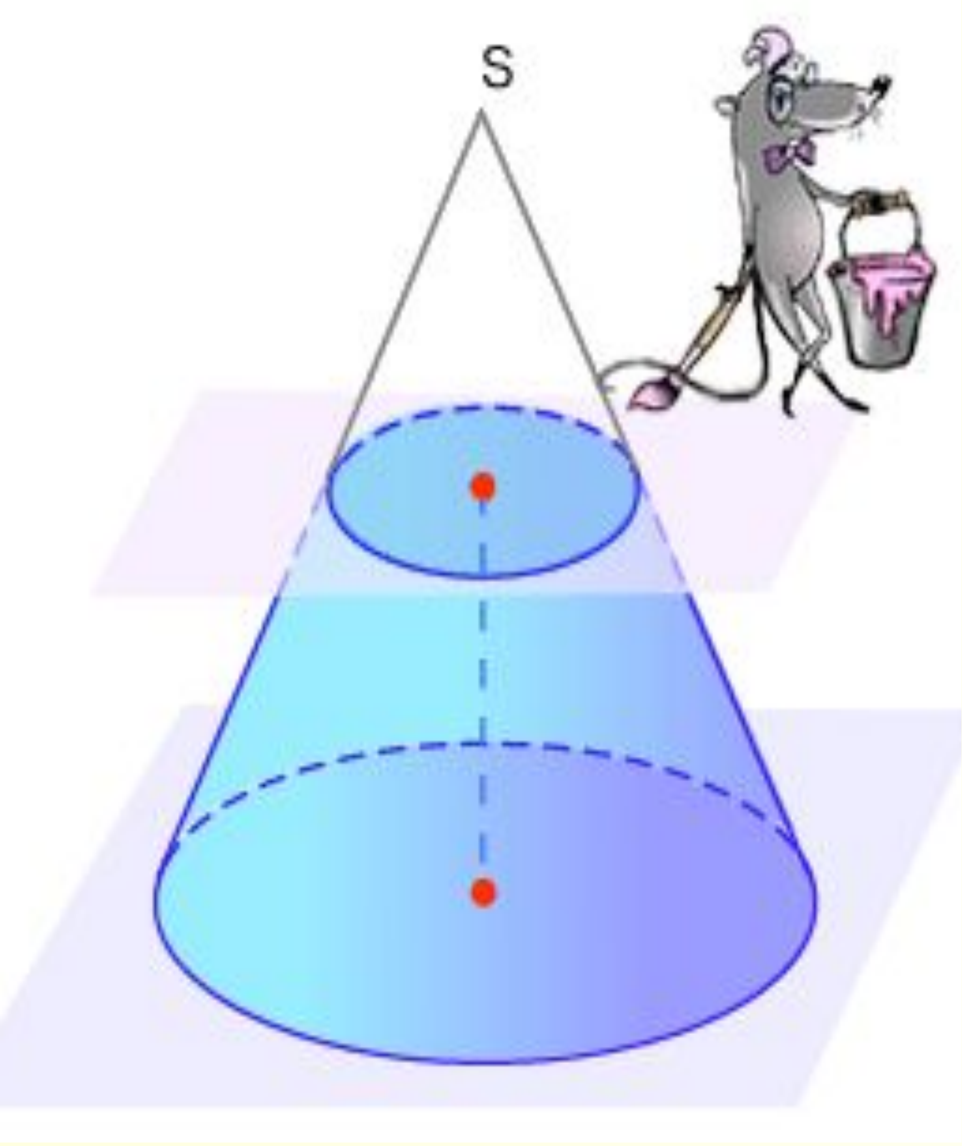
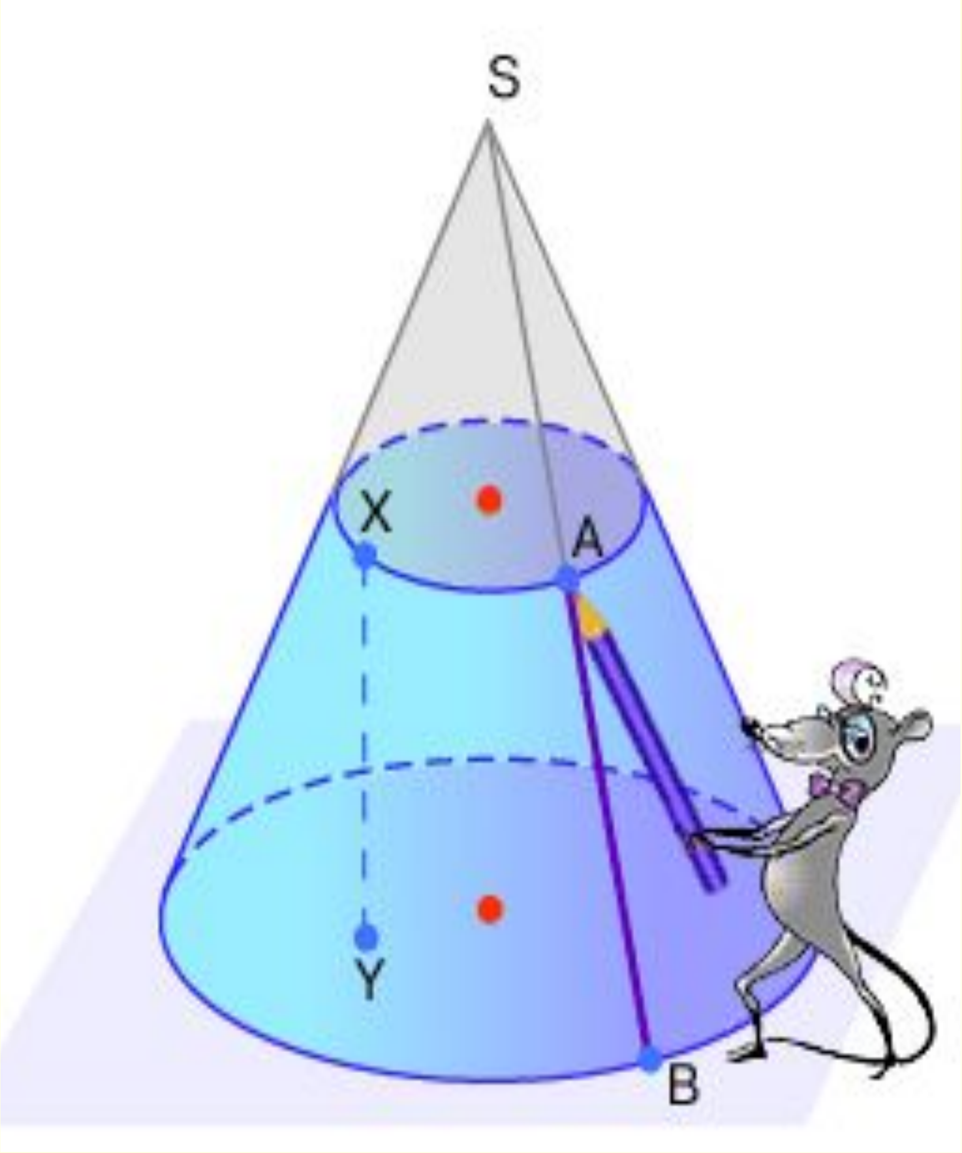
# Усеченный конус.

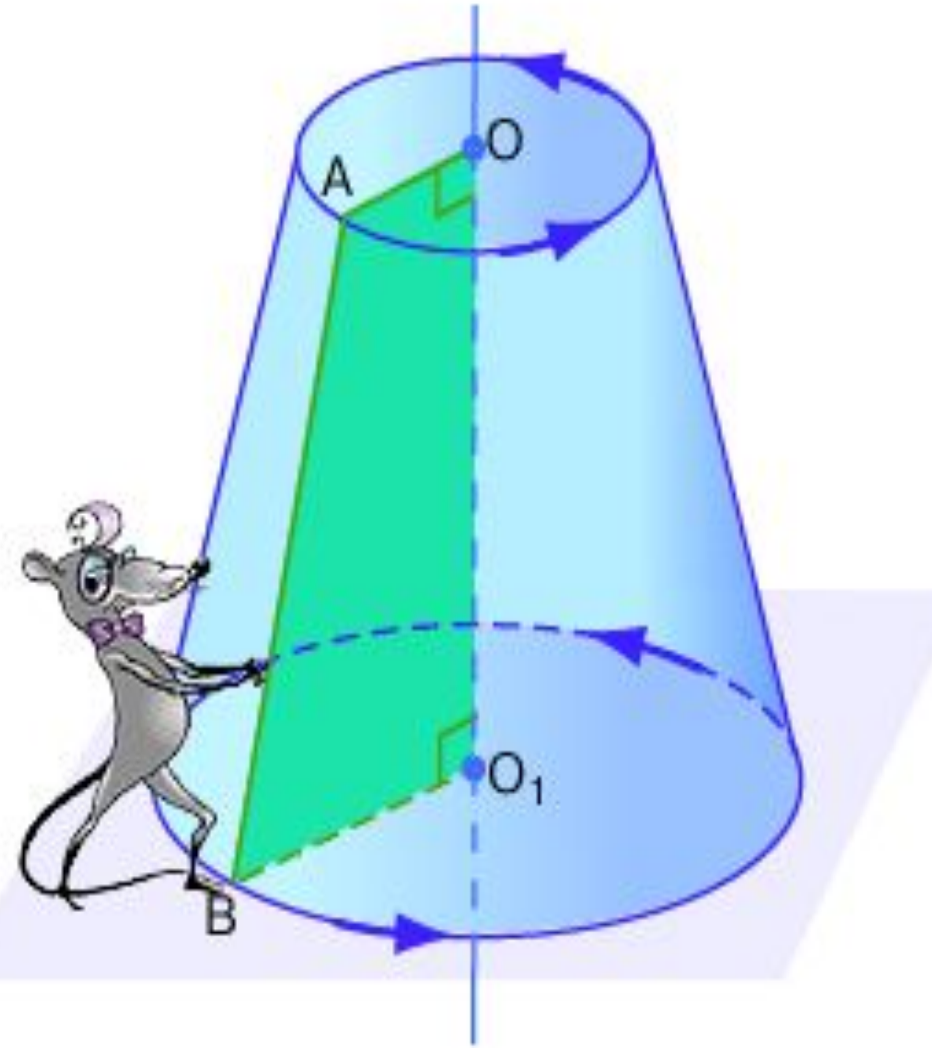



**Усеченным конусом** называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.



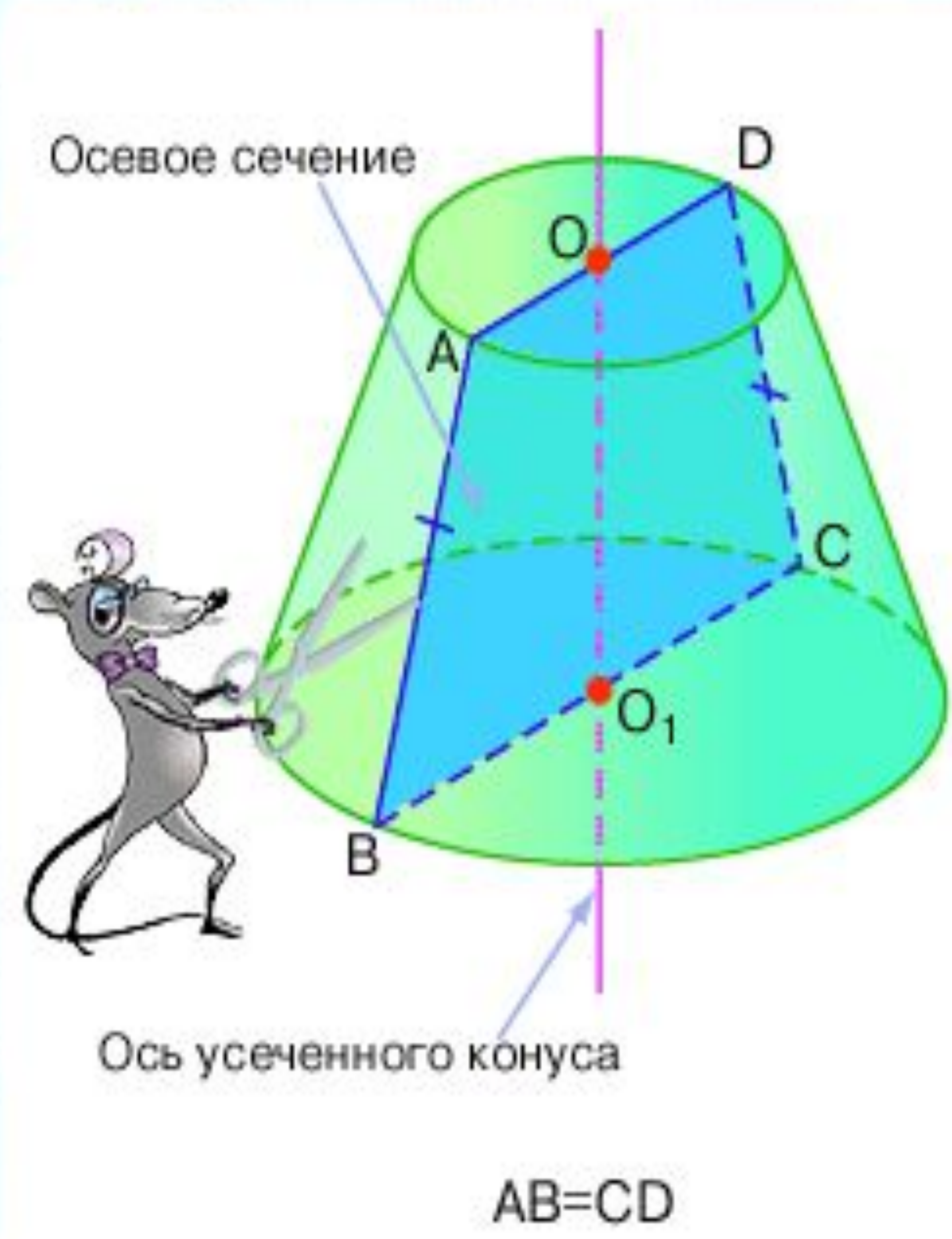

**Образующей** усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

**Высотой** усеченного конуса называется расстояние между основаниями.




$ABO_1O$ – прямоугольная трапеция

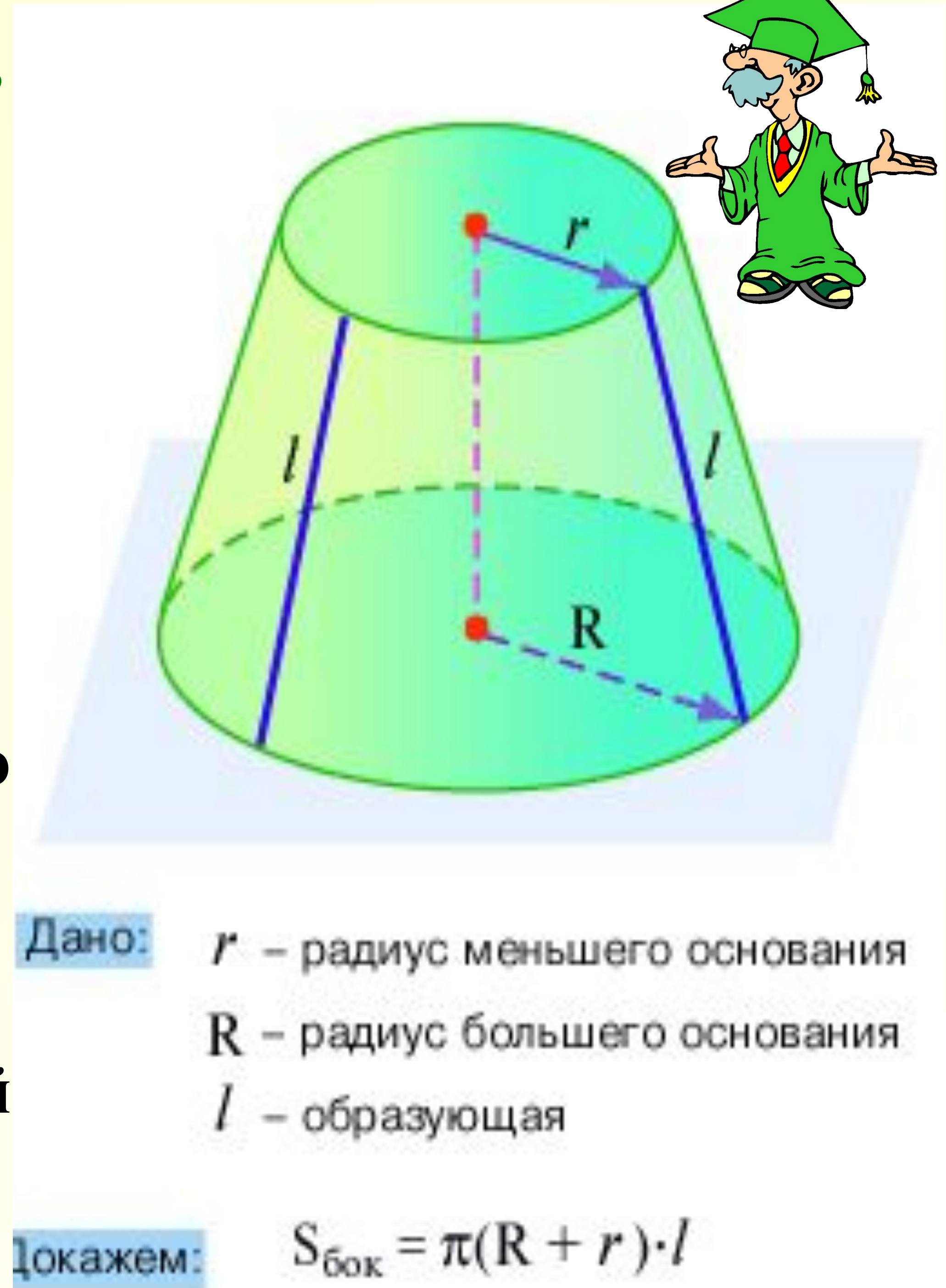
**Усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основанию.**




**Прямая, соединяющая центры оснований, называется осью усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется осевым. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.**

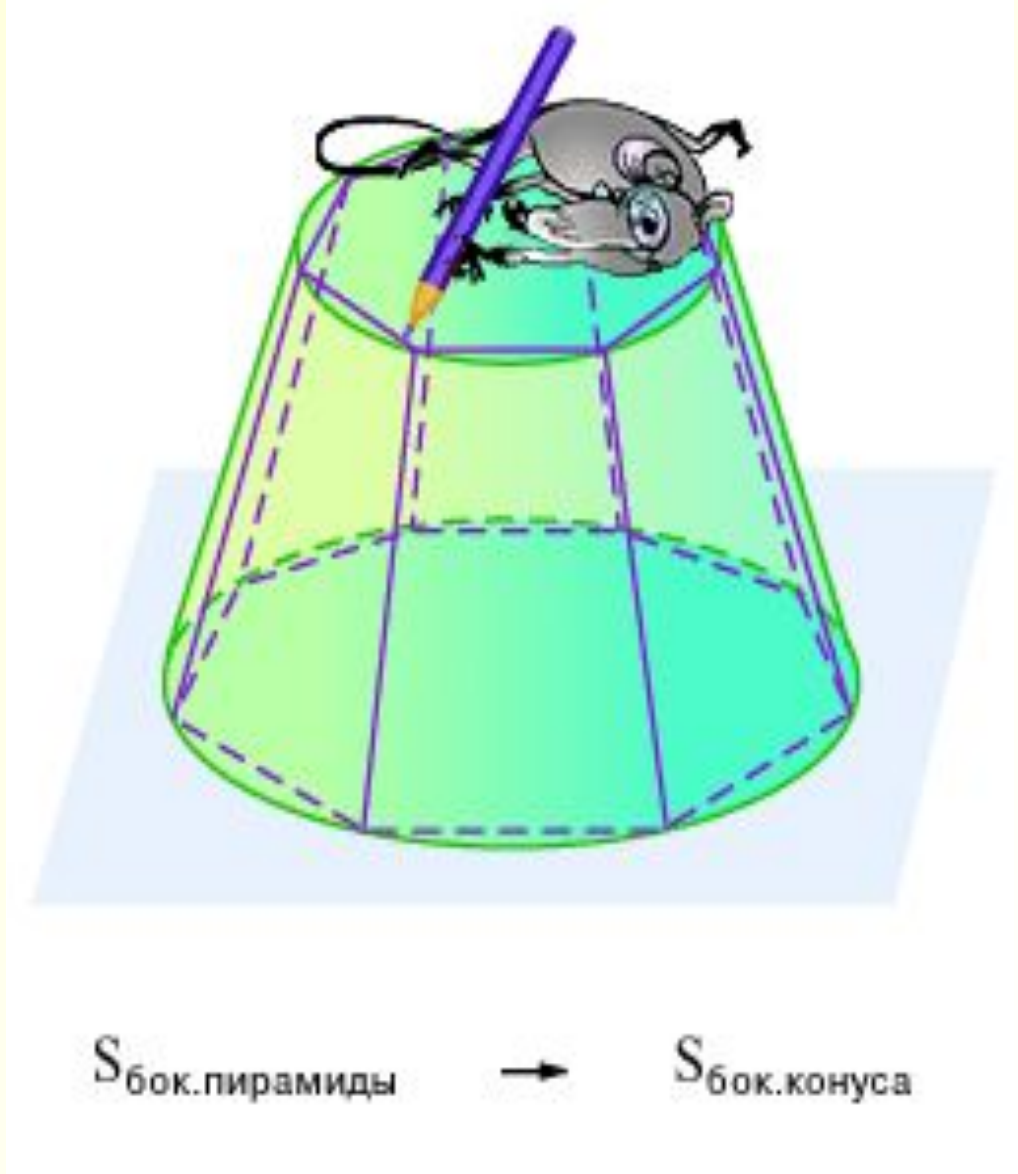
## Боковая поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

**Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.**



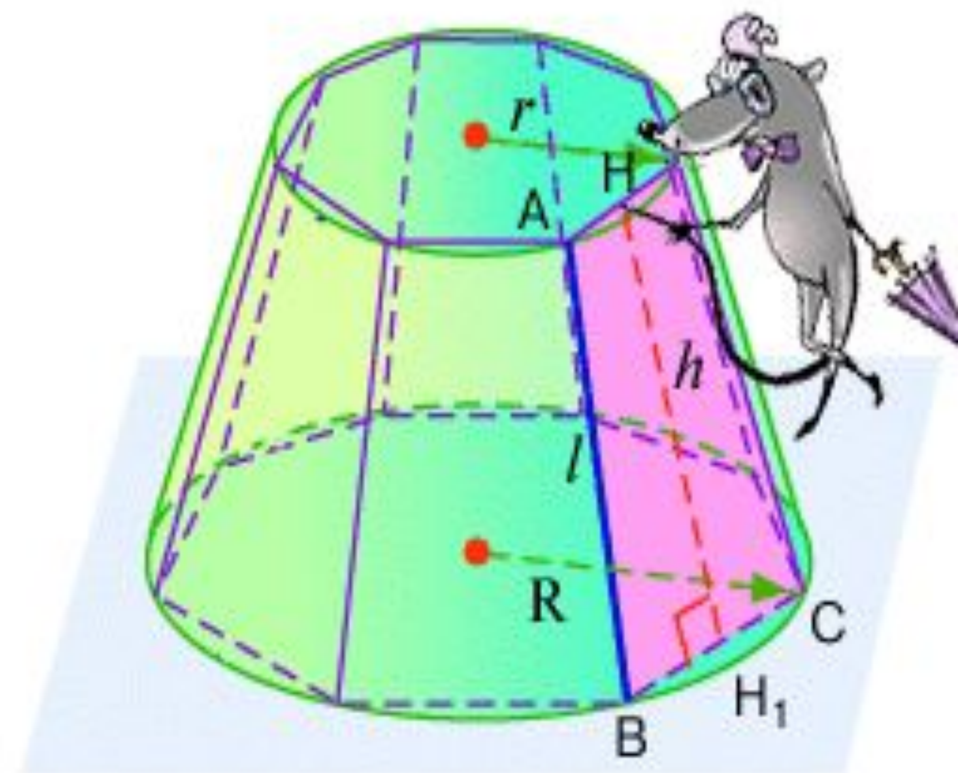
# *Доказательство:*

**Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.**



# Доказательство:

**Впишем в конус правильную пирамиду. Ее боковая поверхность состоит из трапеций.**




$p$ – периметр меньшего основания

P – периметр большего основания

$$s_{бок.пир} = \frac{(p+P)}{2}h$$

$$S_{бок.пир} \to S_{бок.кон}$$

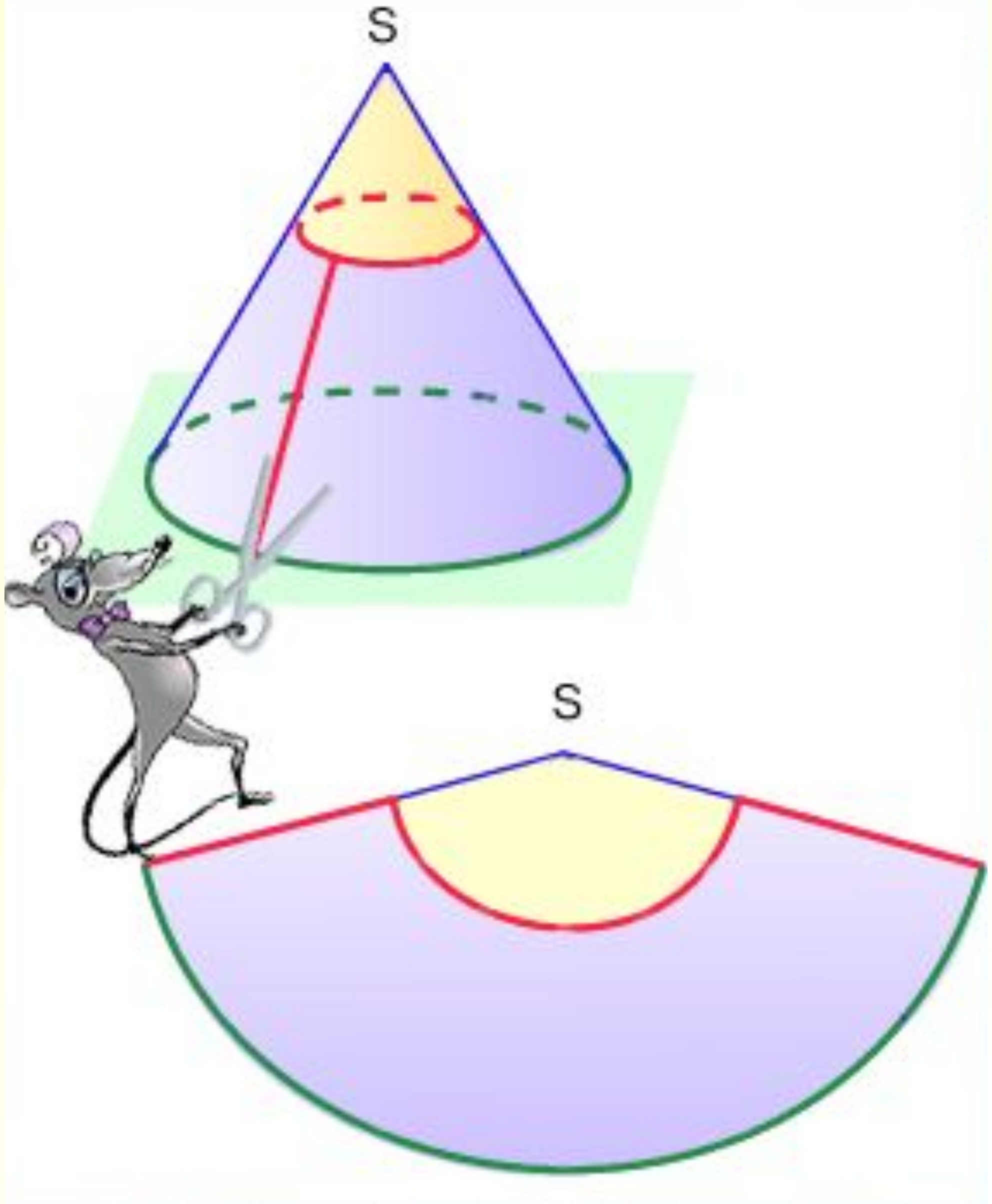
$$p \to c \quad P \to C \quad h \to l$$

$$c = 2\pi r \quad C = 2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R+r)}{2}l = \underline{\pi(R+r)l}$$

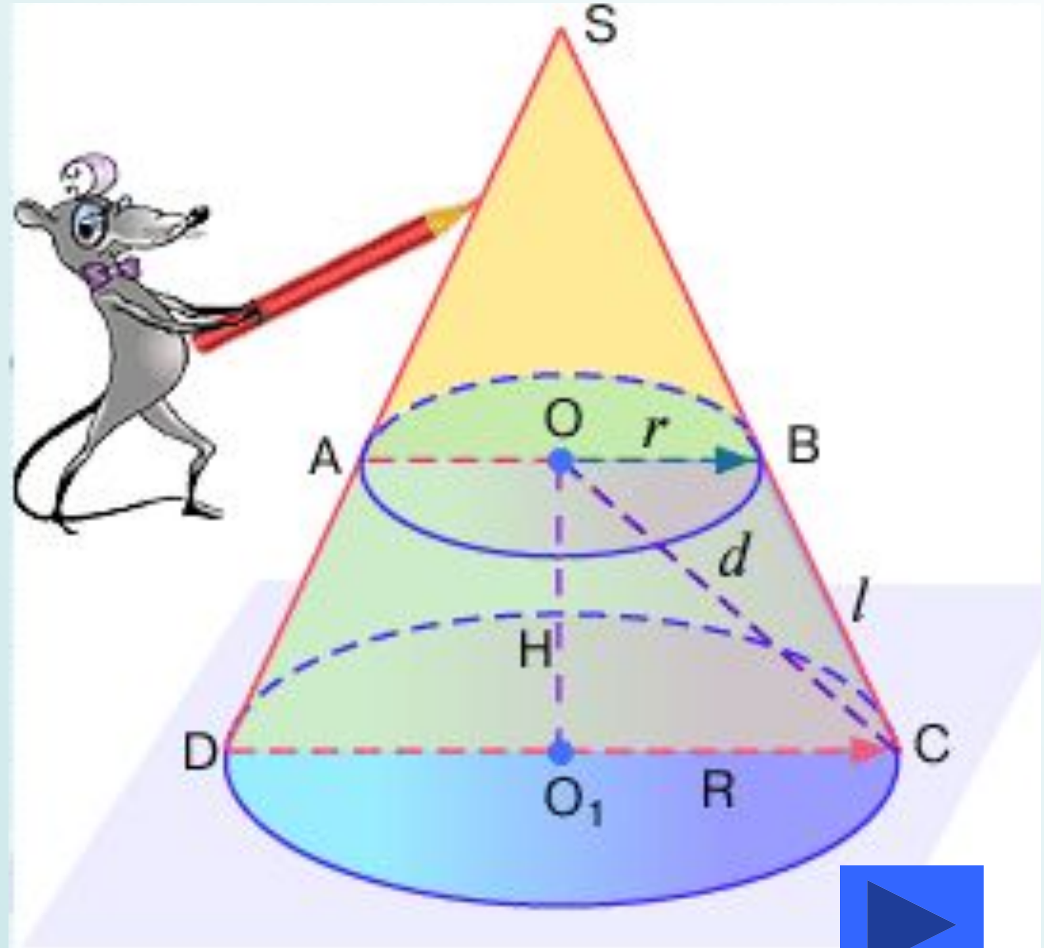
# Замечание:

**Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть круглого кольца.**



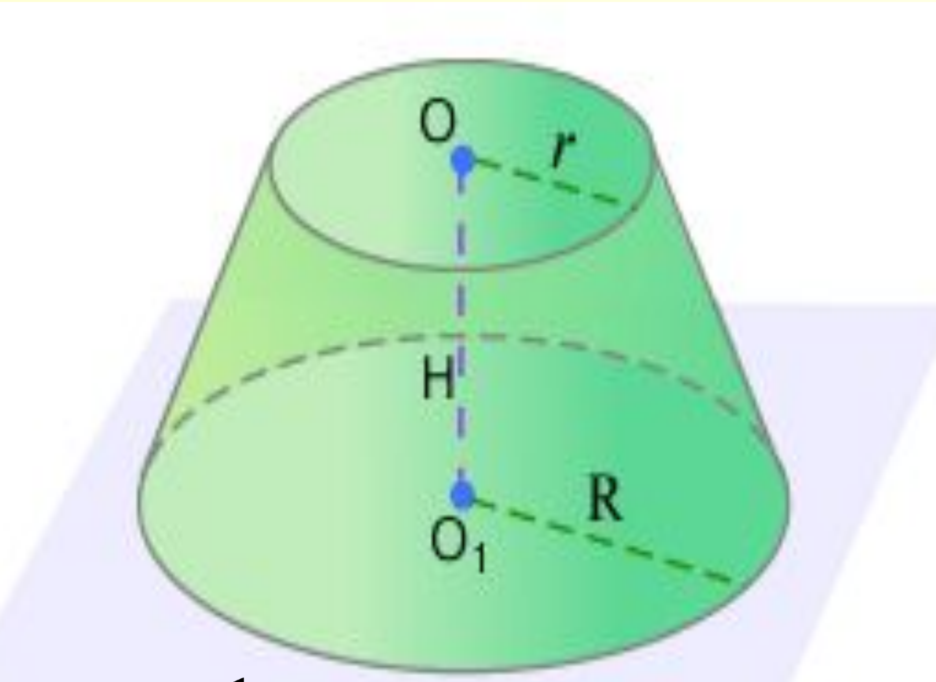
# Решение:

Достроим усеченный конус до полного и проведем осевое сечение.



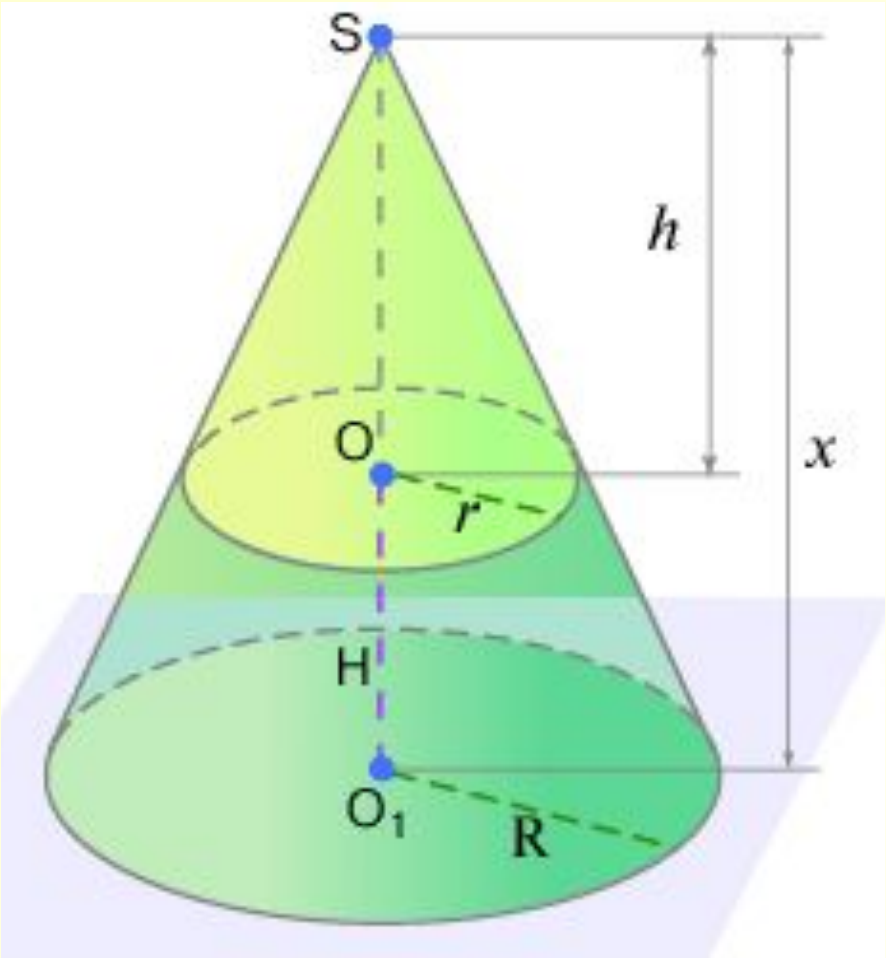
# Формула объема усеченного конуса.

- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.




$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

# Доказательство:

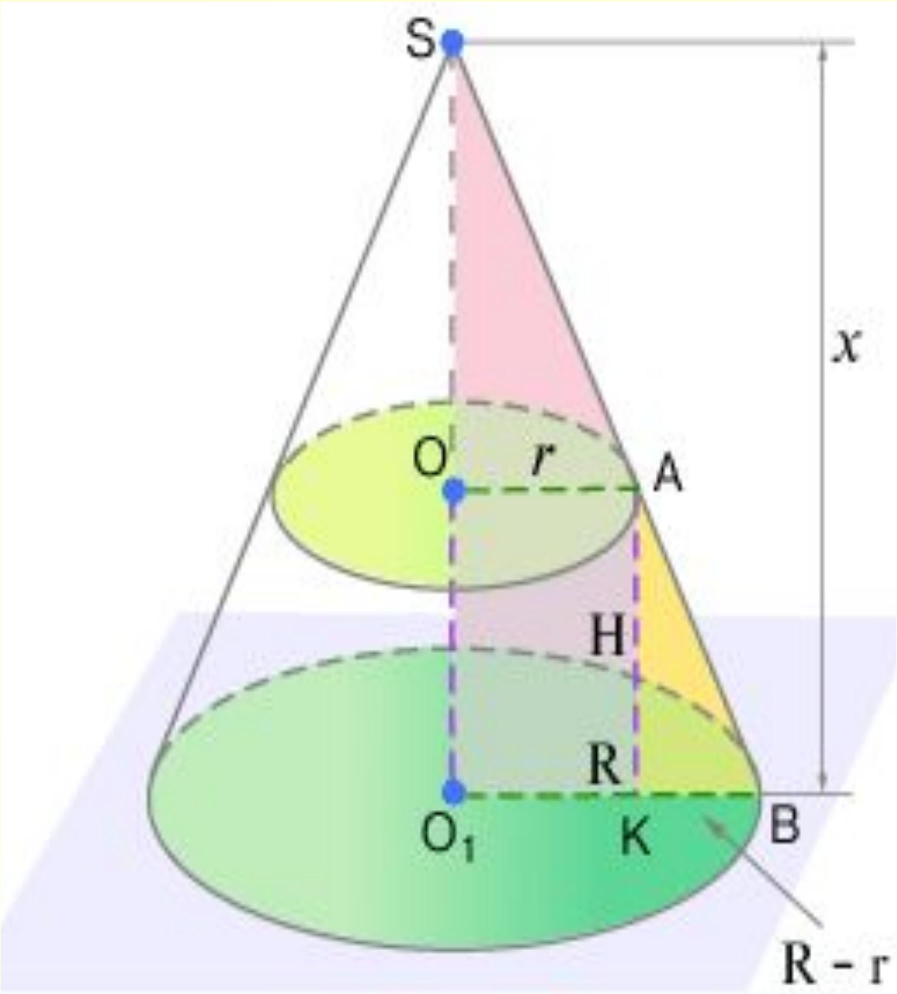



**Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.**

$$V_{усеч.кон} = V_{полн} - V_{доп} = \frac{1}{3}\pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

# Доказательство:

***Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.***

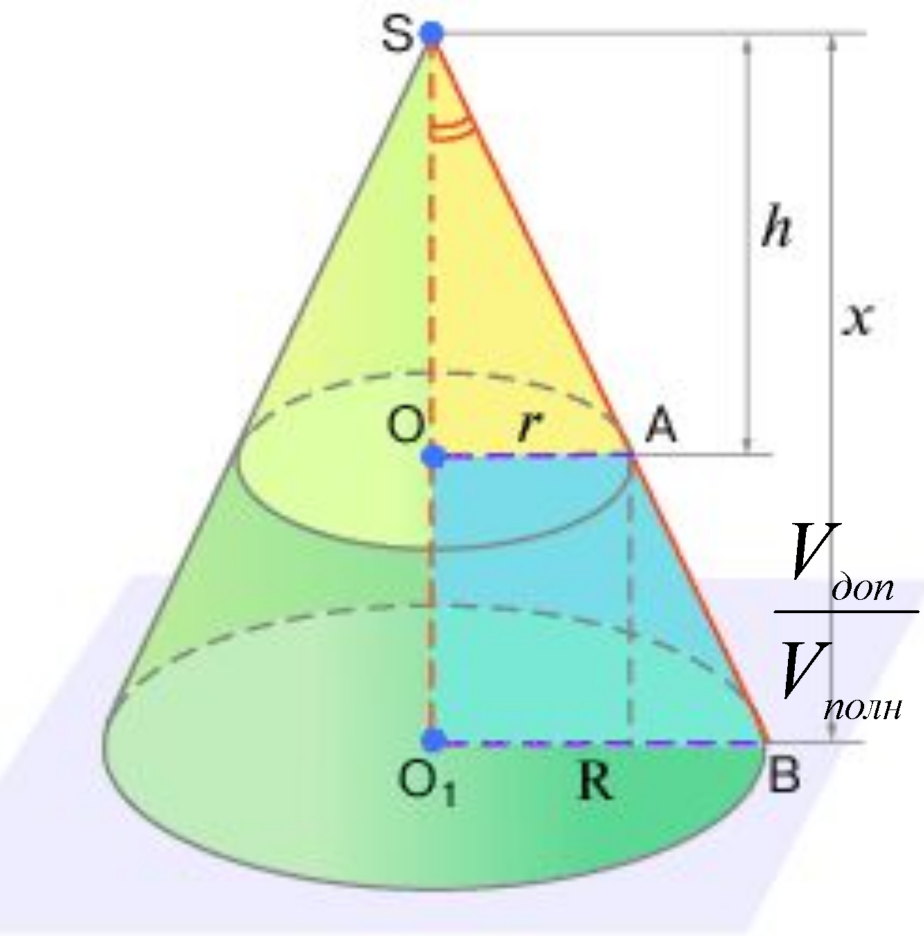



$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R-r}$$

$$x = H\frac{R}{R-r}$$

# *Доказательство:*




$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{доп}}{V_{полн}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2}\frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

**Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.**

# Доказательство:

**Вычтем из объема большого конуса объем малого конуса.**

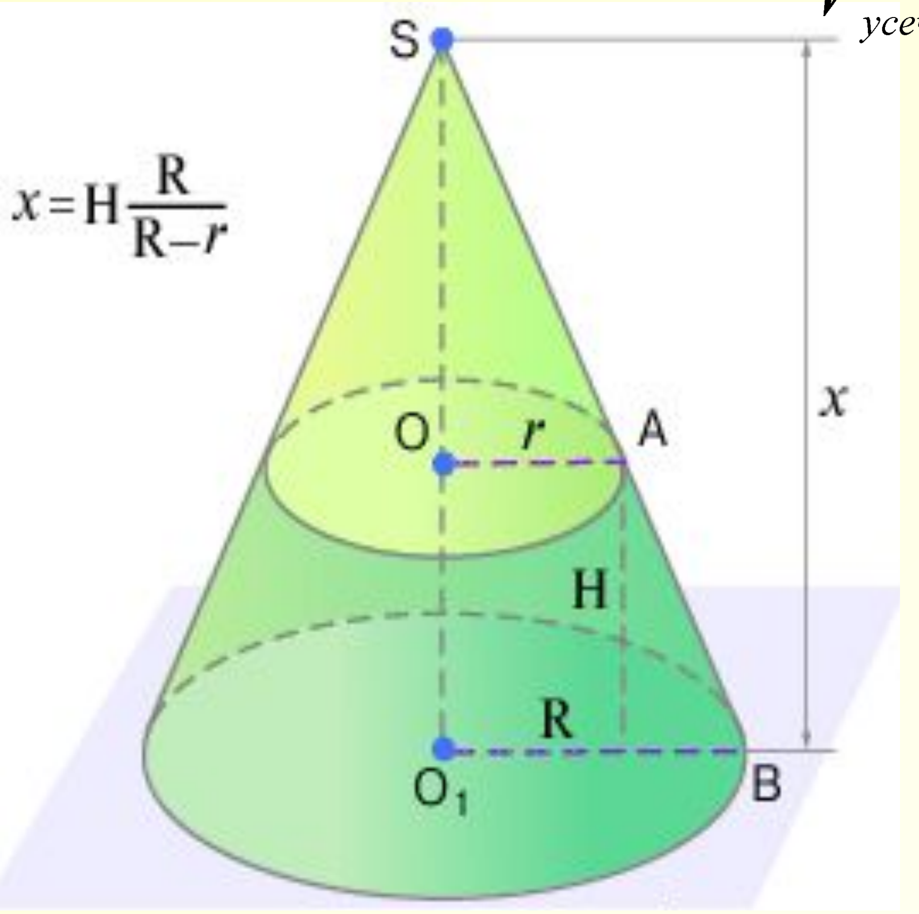
$$V_{усеч} = V_{полн} - V_{доп} = V_{полн} - \frac{r^3}{R^3} V_{полн} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 x\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) =$$

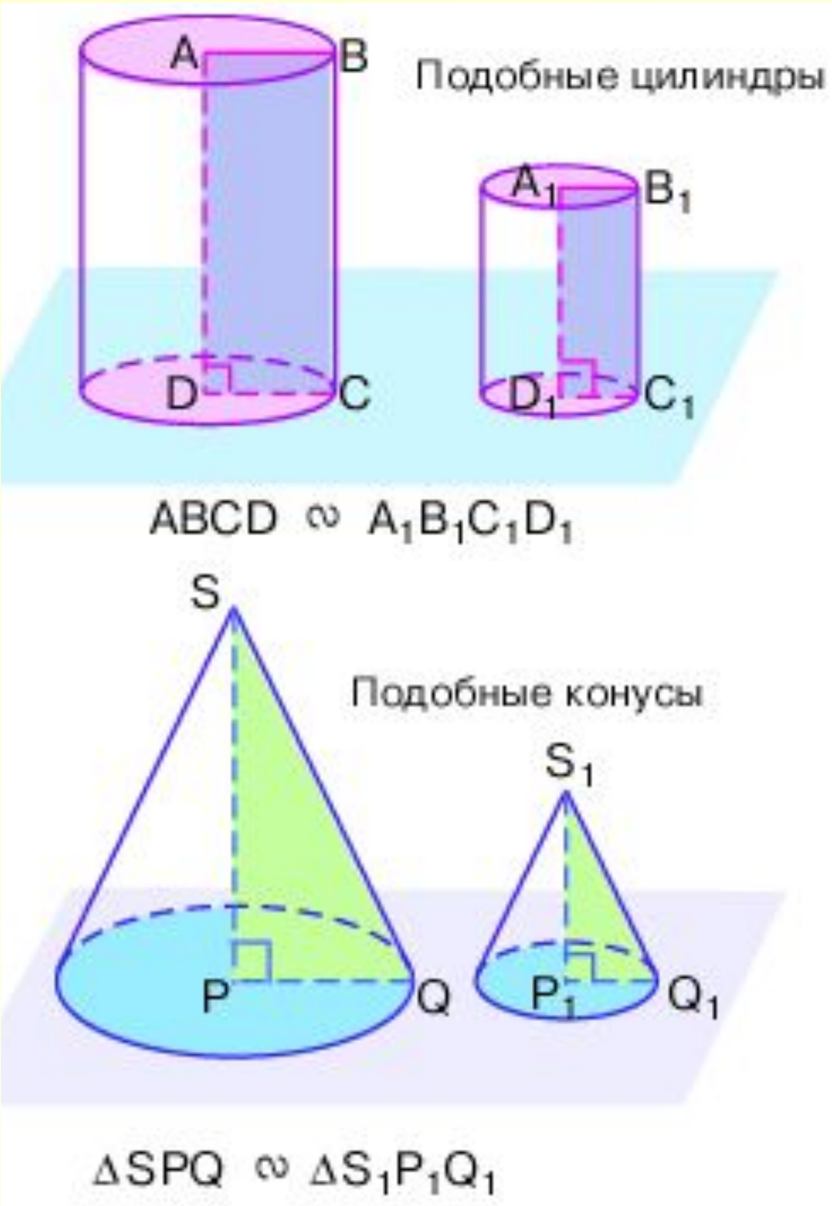
$$= \frac{1}{3}\pi \frac{R^2 HR}{R-r}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-r} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

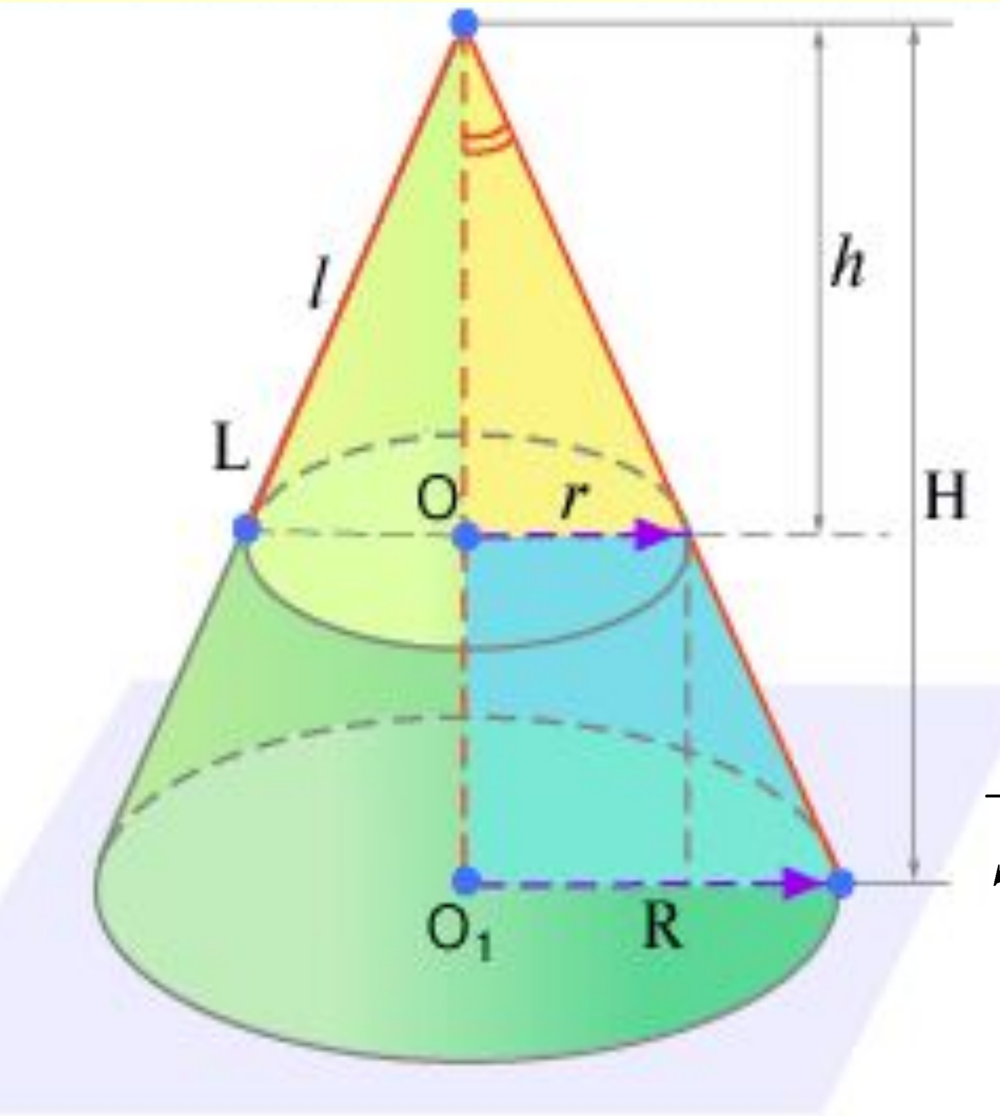


# Подобные цилиндры и конусы.




- **Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.**

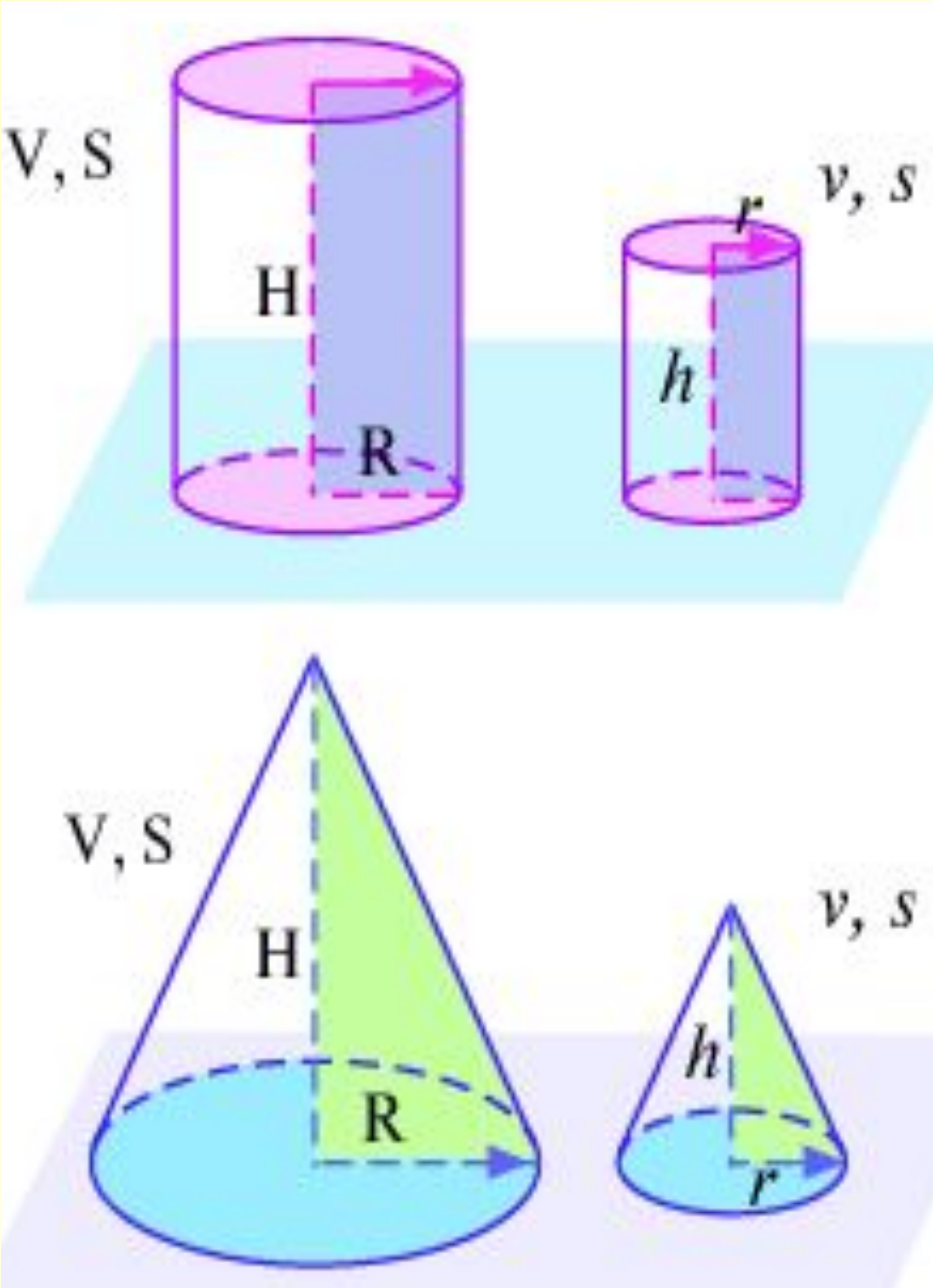
**Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.**




$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{l}{L}$$

$$\frac{V_{доп.}}{V_{полн.}}=\frac{r^3}{R^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{бок.доп}}{S_{бок.полн}}=\frac{2\pi rl}{2\pi RL}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{h^2}{H^2}$$




**Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.**

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$