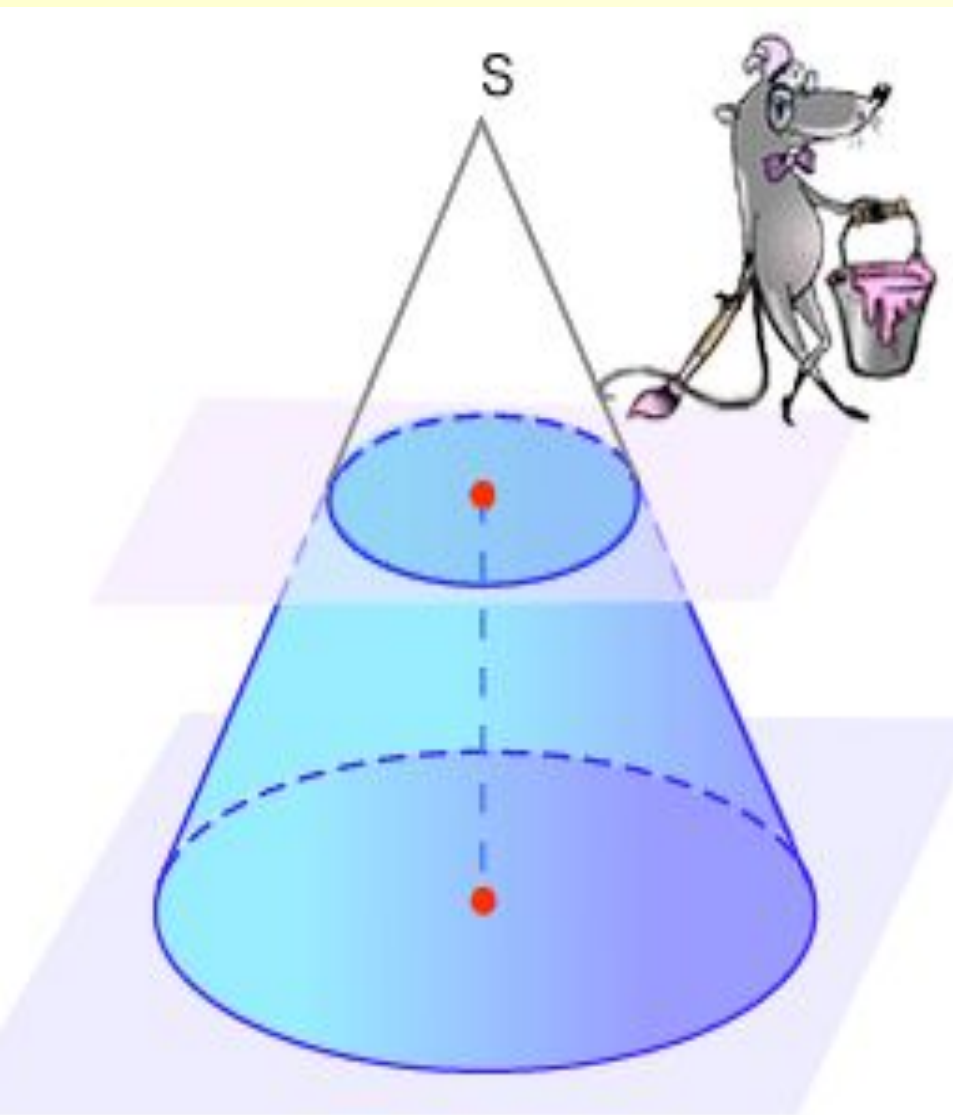
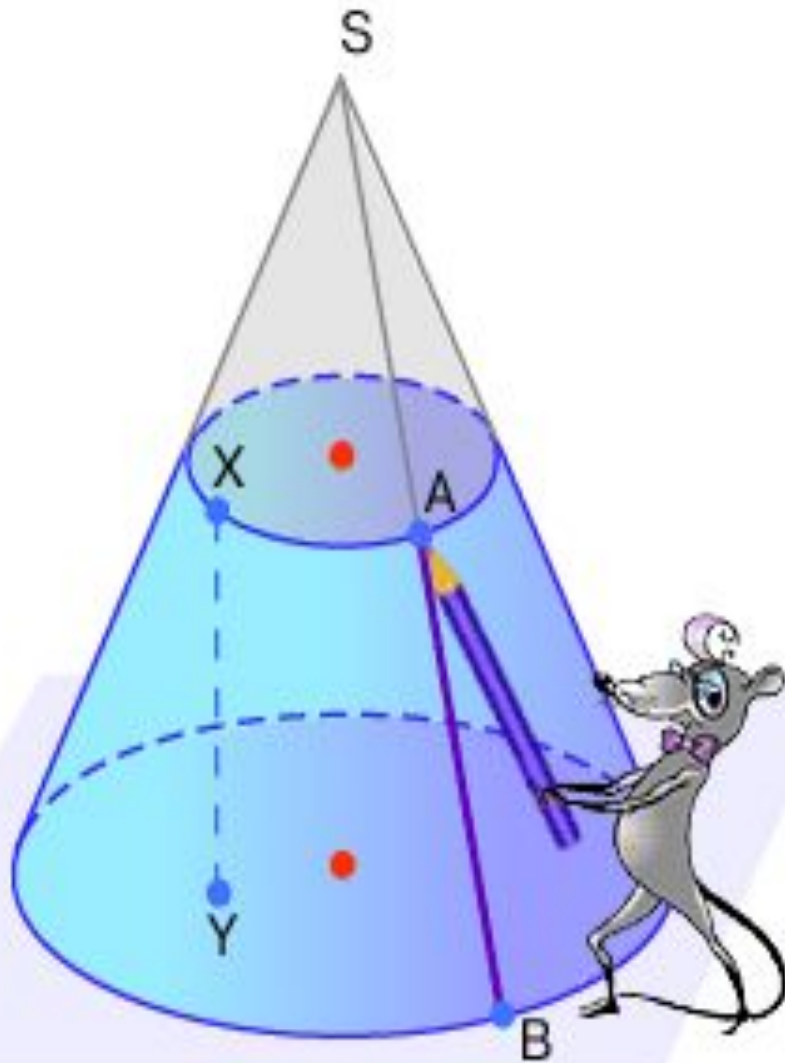


Усеченный конус.



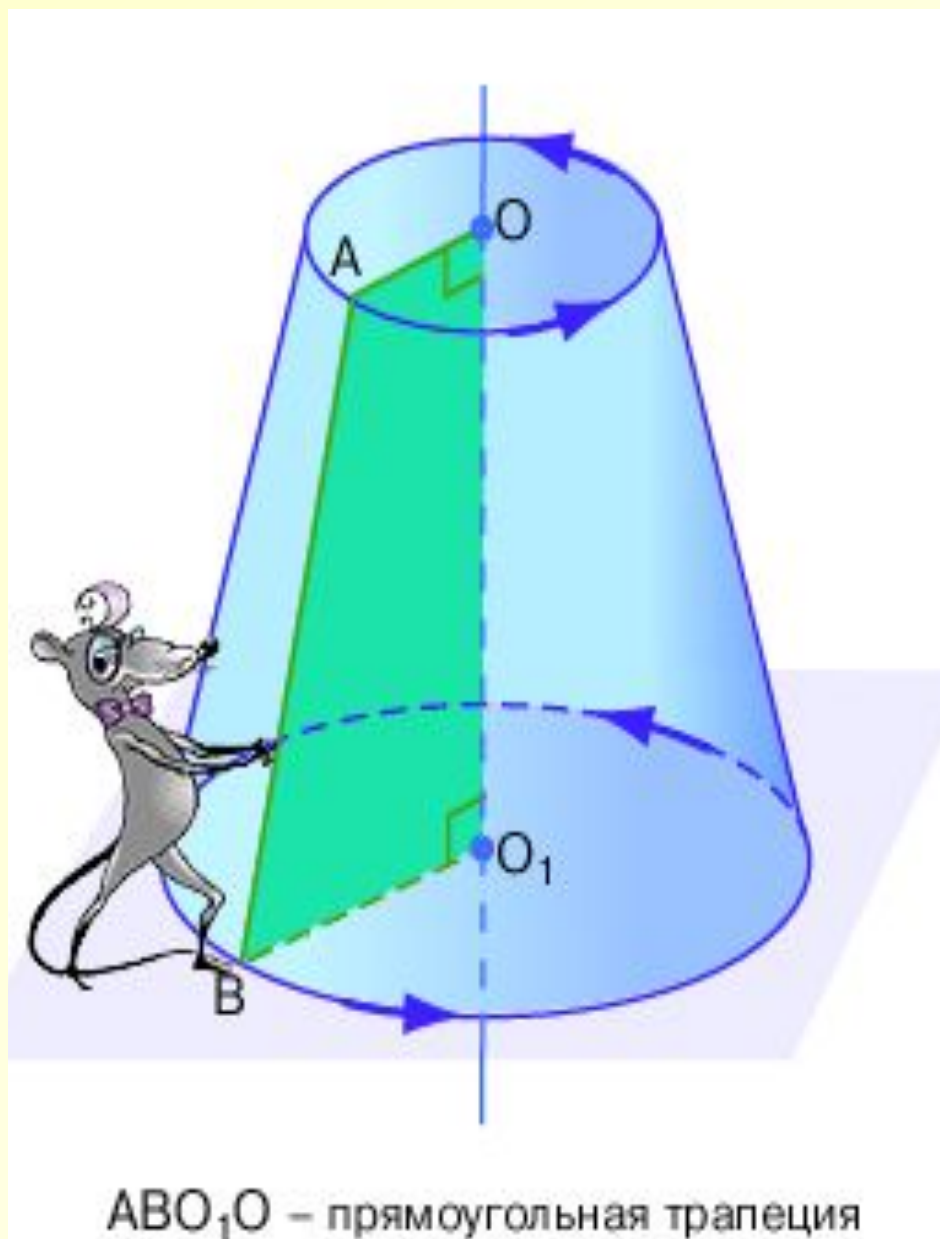


Усеченным конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

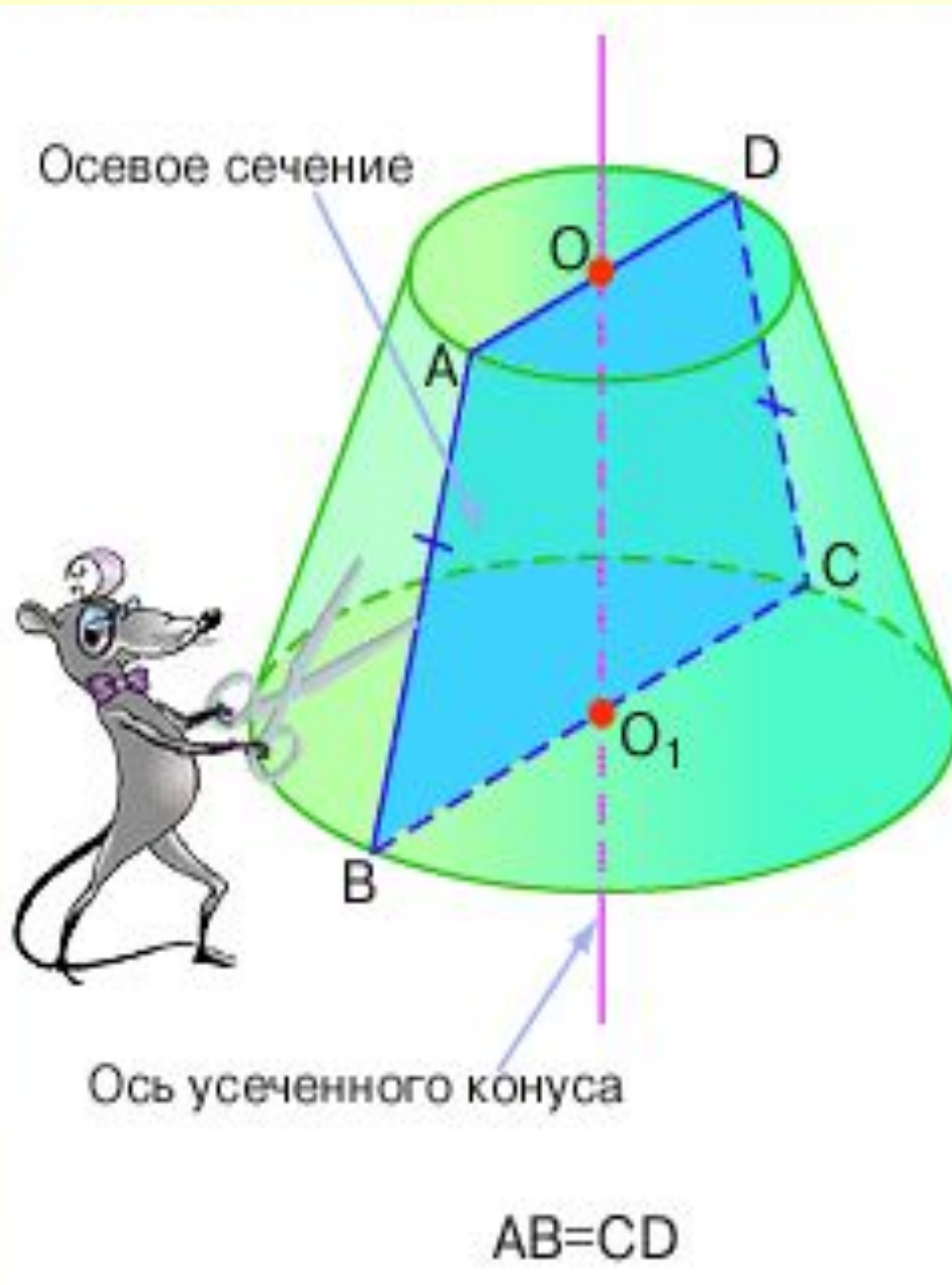


Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между основаниями.



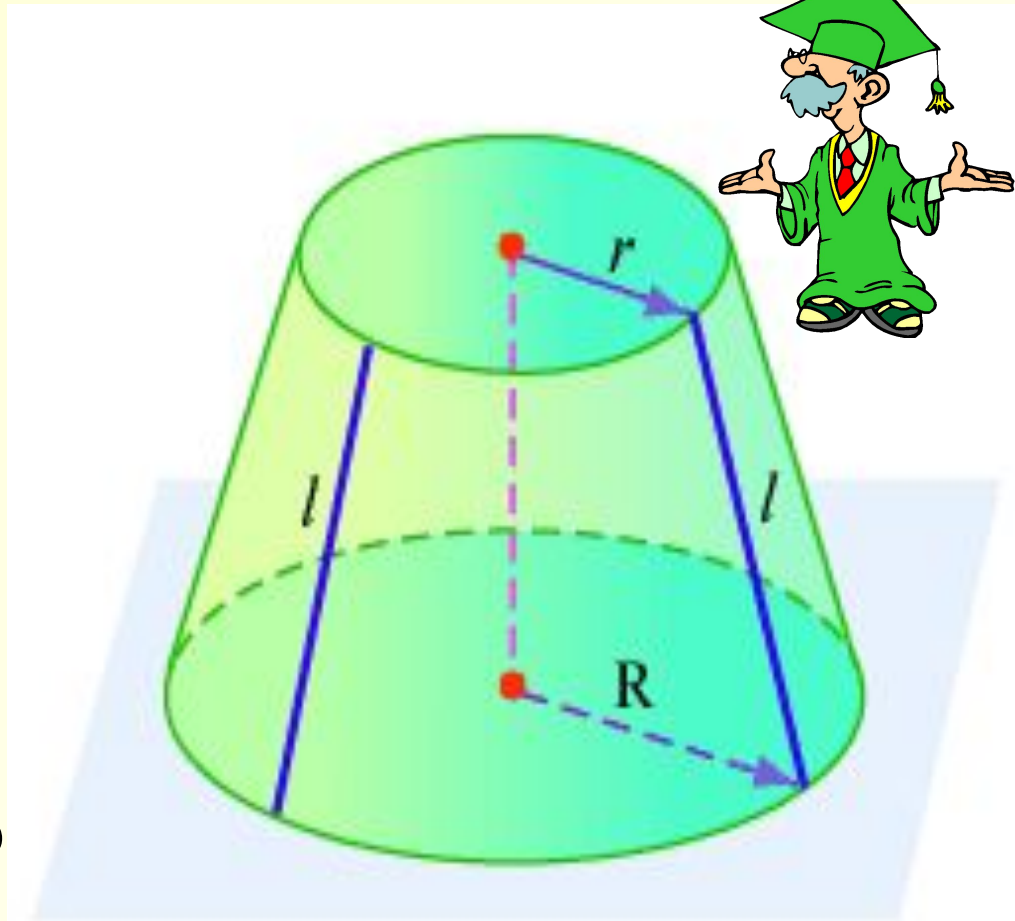
**Усеченный конус
можно
рассматривать как
тело, полученное при
вращении
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основанию.**



Прямая, соединяющая центры оснований, называется **осью** усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется **осевым**. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.

**Боковая поверхность
усеченного конуса.
Площадь боковой
поверхности
усеченного конуса.**

**Площадь боковой
поверхности усеченного
конуса равна
произведению
полусуммы длин
окружностей оснований
на образующую.**

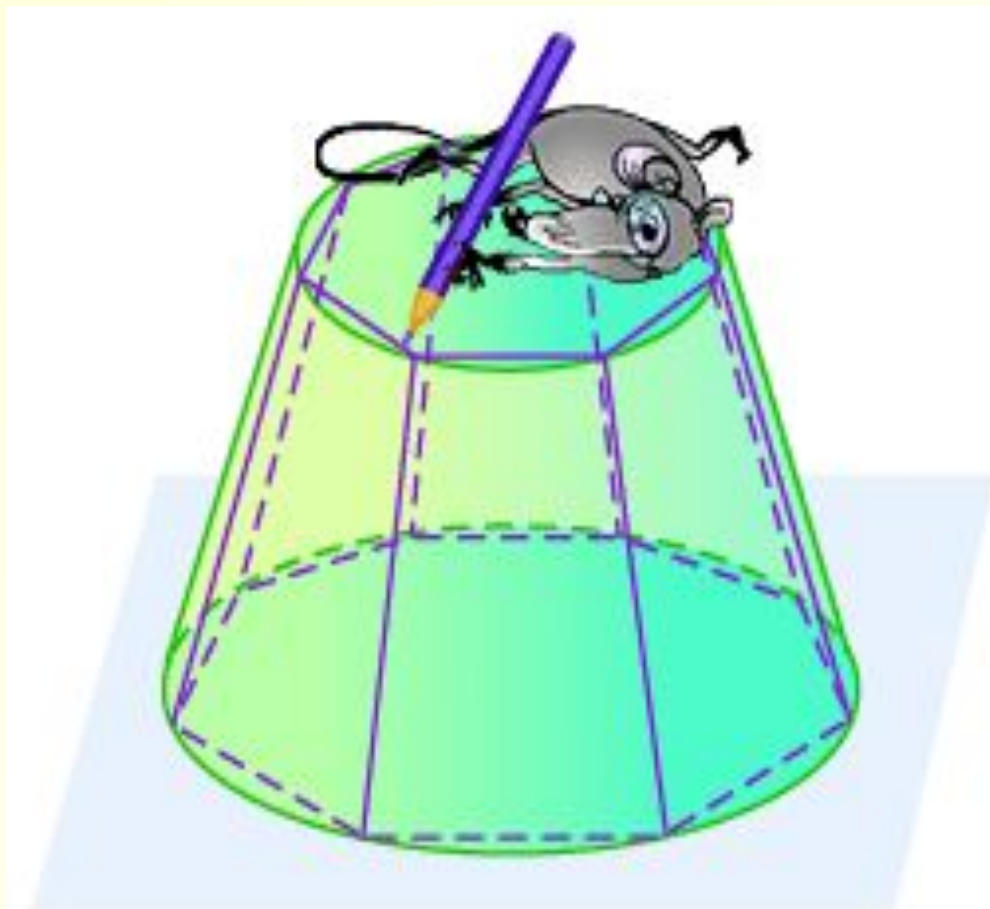


Дано: r – радиус меньшего основания
 R – радиус большего основания
 l – образующая

Докажем: $S_{\text{бок}} = \pi(R + r) \cdot l$

Доказательство:

Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.



$S_{\text{бок. пирамиды}}$



$S_{\text{бок. конуса}}$

Доказательство:

Впишем в конус
правильную пирамиду.
Ее боковая
поверхность состоит из
трапеций.

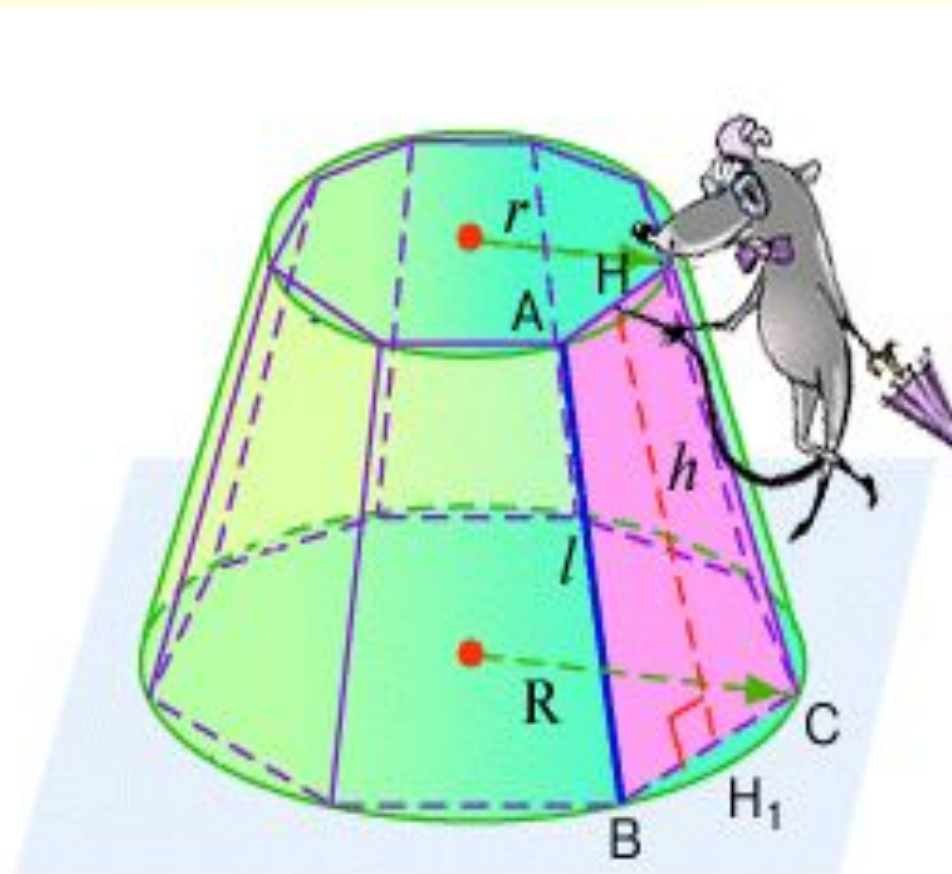
$$S_{\text{бок.пир}} = \frac{(p + P)}{2} h$$

$$S_{\text{бок.пир}} \rightarrow S_{\text{бок.кон}}$$

$$p \rightarrow c \quad P \rightarrow C \quad h \rightarrow l$$

$$c = 2\pi r \quad C = 2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R + r)}{2} l = \underline{\pi(R + r)l}$$

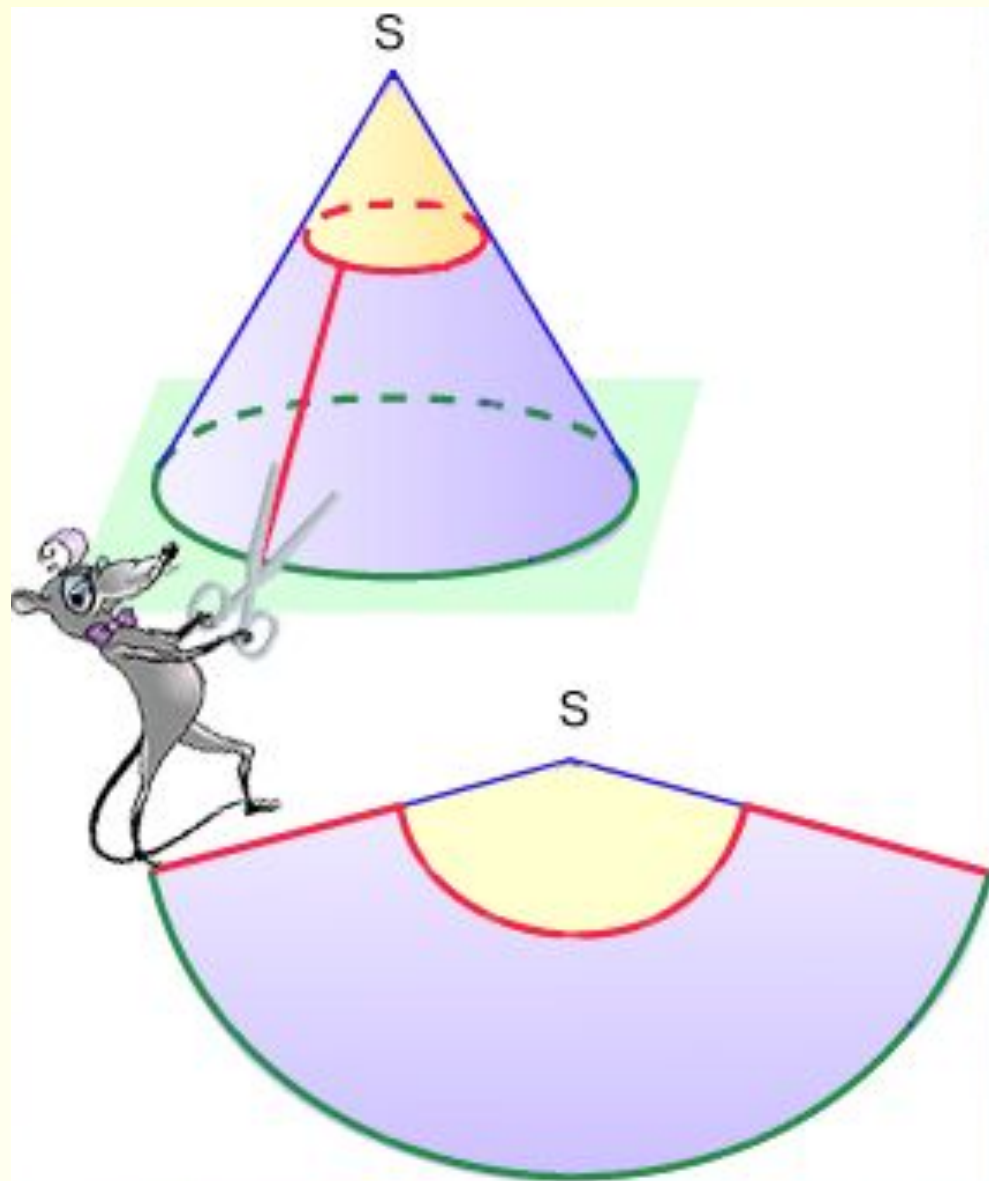


p – периметр меньшего основания

P – периметр большего основания

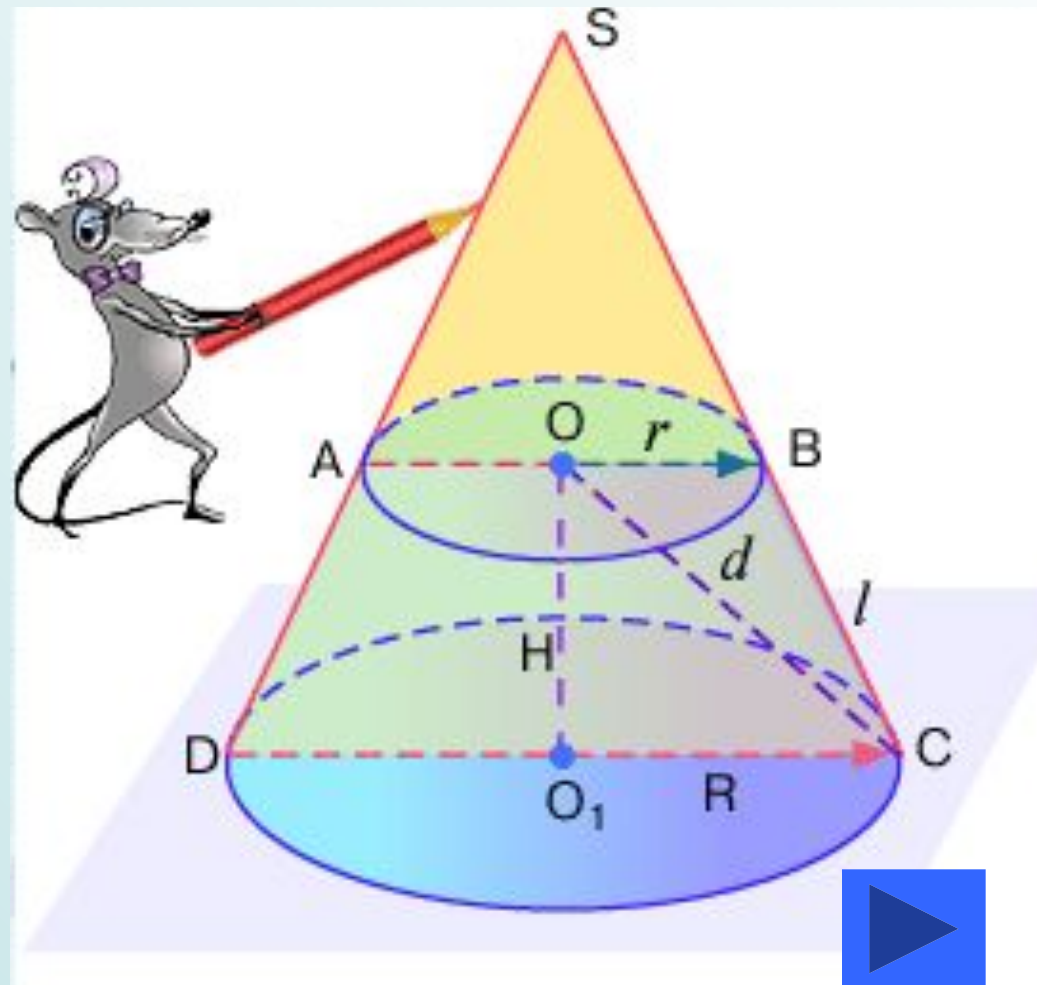
Замечание:

Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть круглого кольца.



Решение:

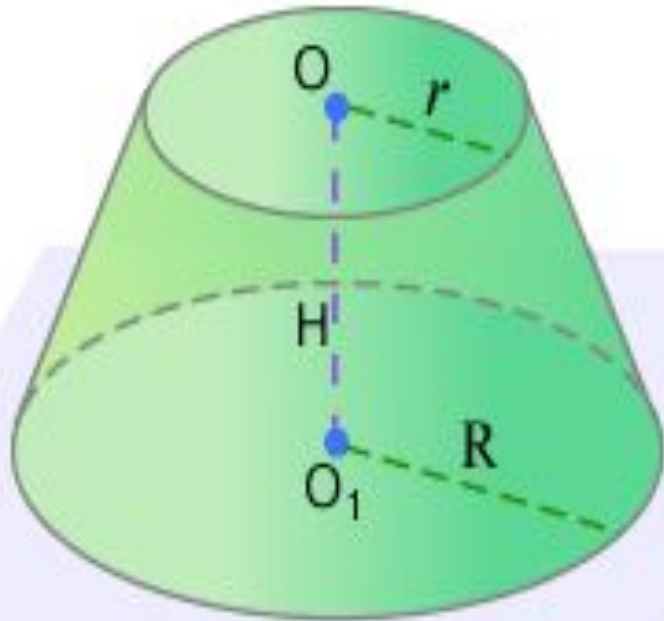
Достроим
усеченный конус до
полного и проведем
осевое сечение.



Формула объема усеченного конуса.

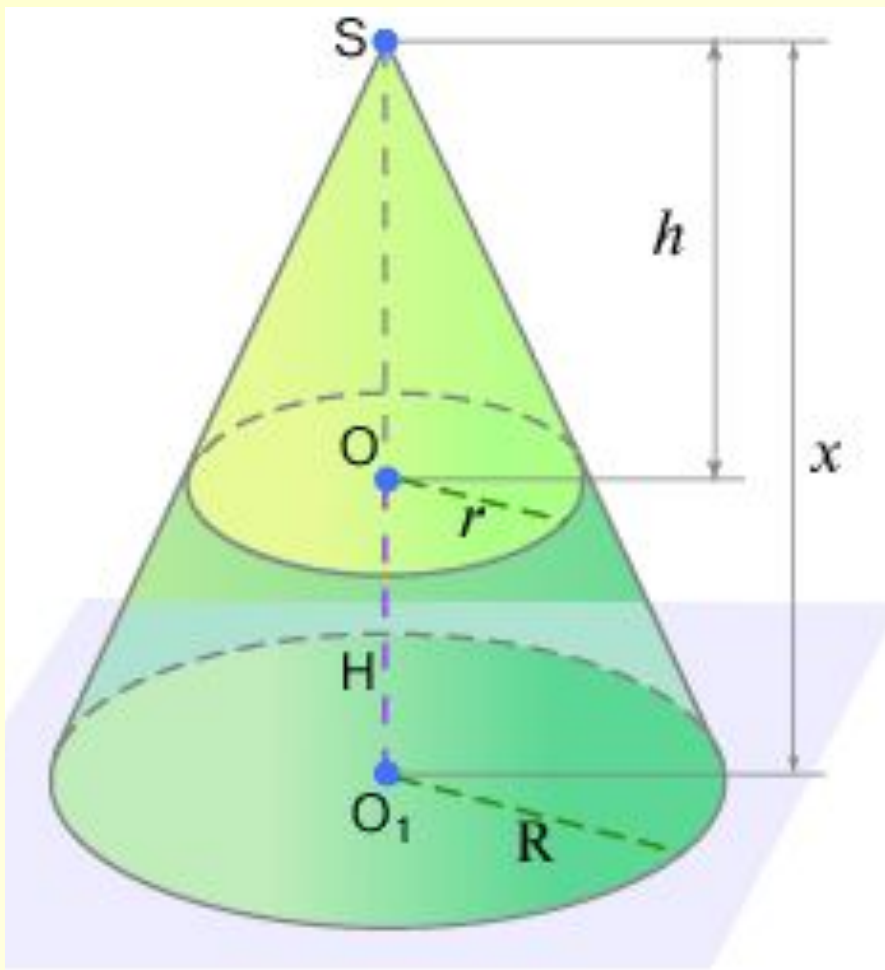


- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.



$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

Доказательство:

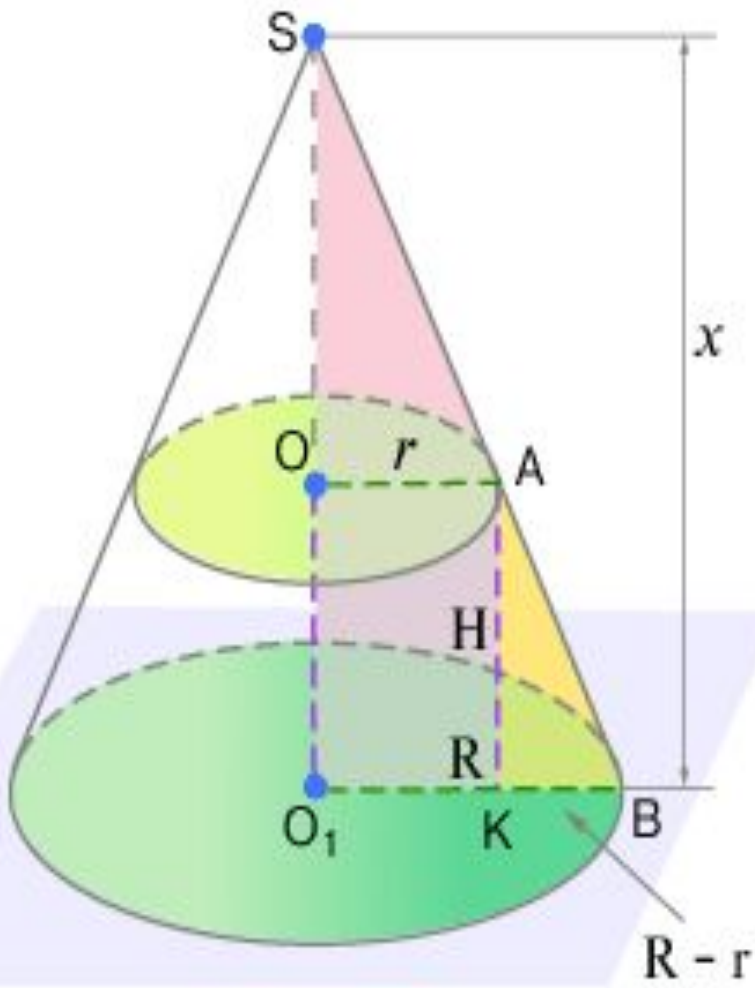


Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.

$$V_{\text{усеч.кон}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 x - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Доказательство:

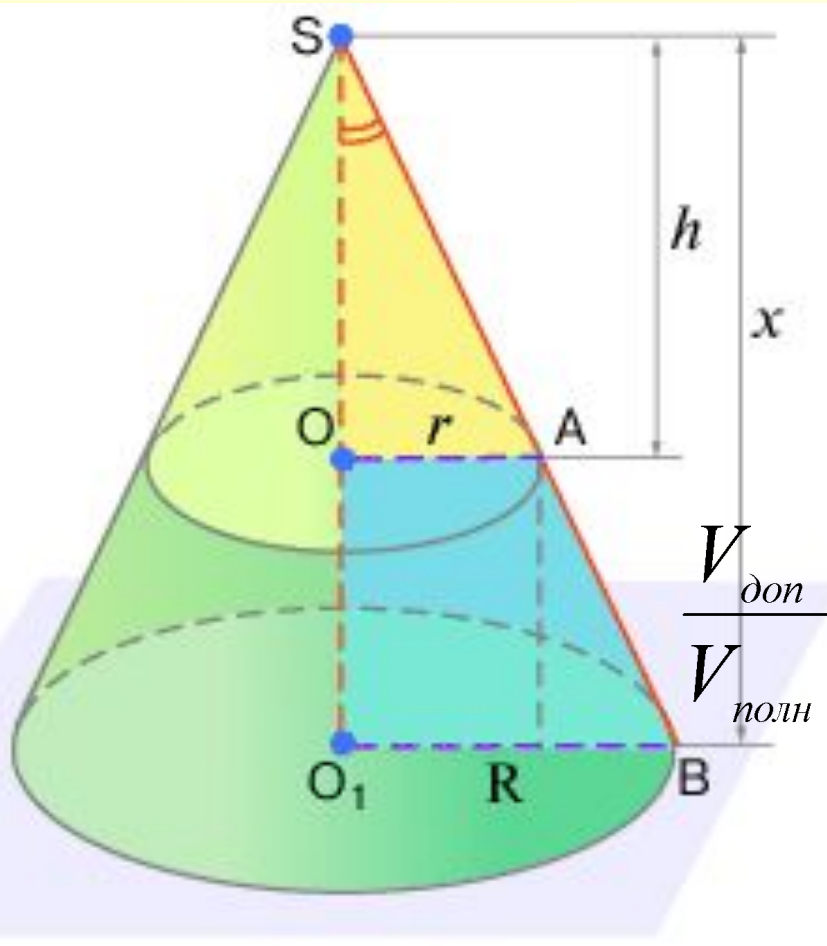
Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.



$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R - r}$$
$$x = H \frac{R}{R - r}$$

Доказательство:



$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

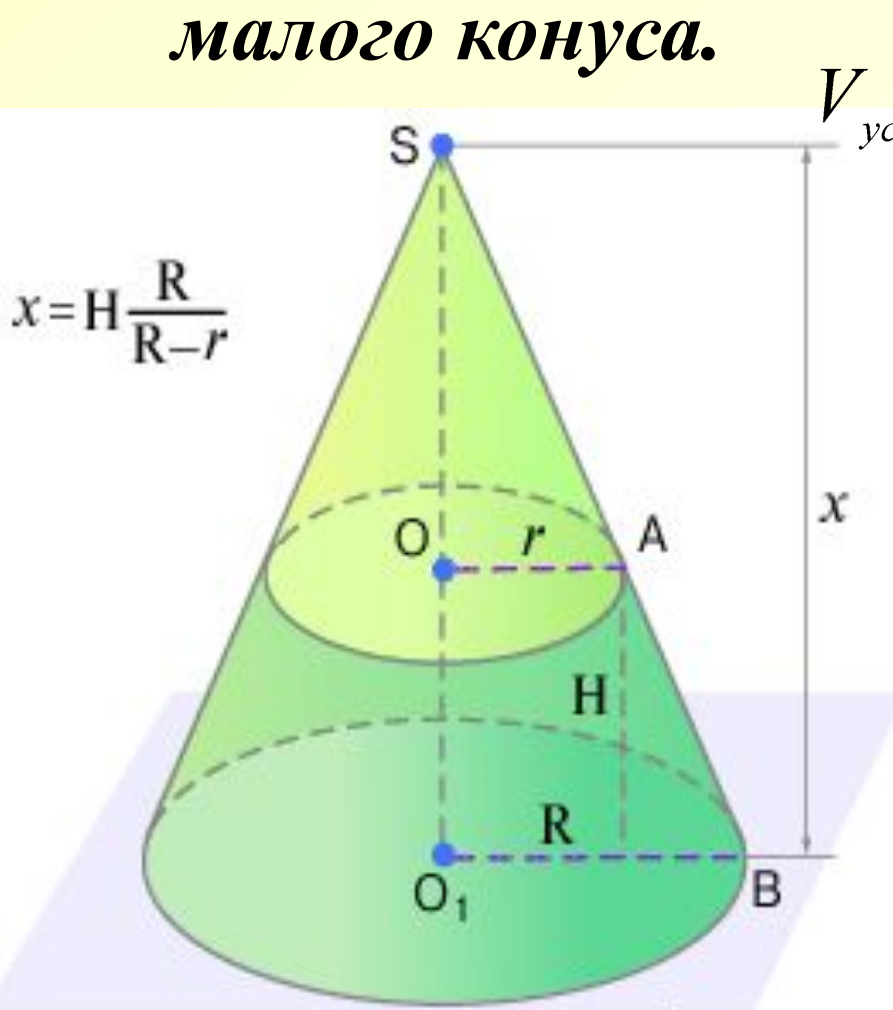
$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{\text{дон}}}{V_{\text{полн}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.

Доказательство:

Вычтем из объема большого конуса объем
малого конуса.



$$V_{\text{усеч}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = V_{\text{полн}} - \frac{r^3}{R^3} V_{\text{полн}} =$$

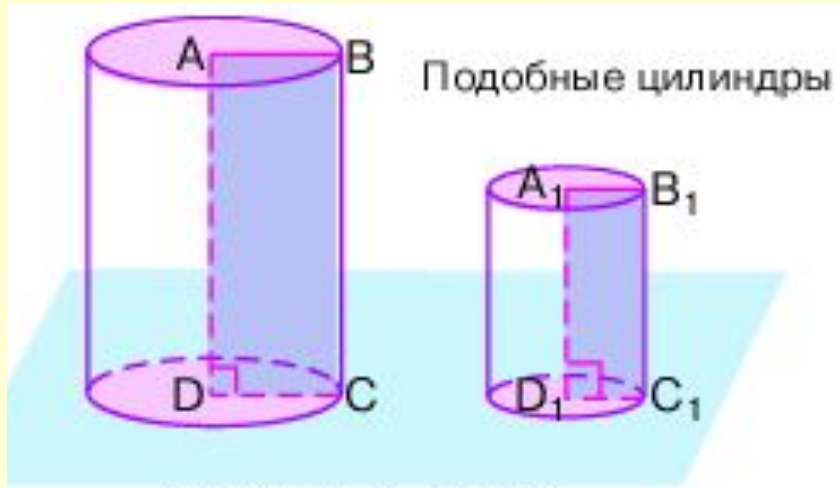
$$= \frac{1}{3} \pi R^2 x \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 H R}{R - r} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3} \right) =$$

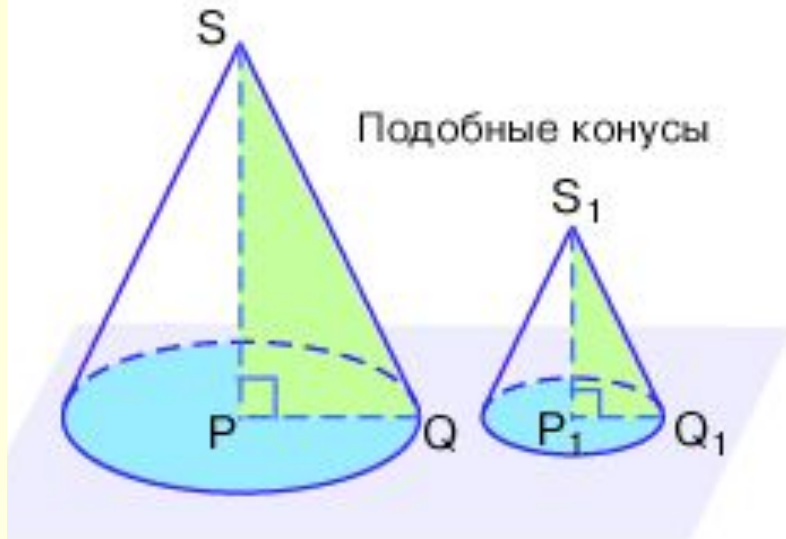
$$= \frac{1}{3} \pi H \frac{(R - r)(R^2 + Rr + r^2)}{R - r} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

Подобные цилиндры и конусы.



$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$

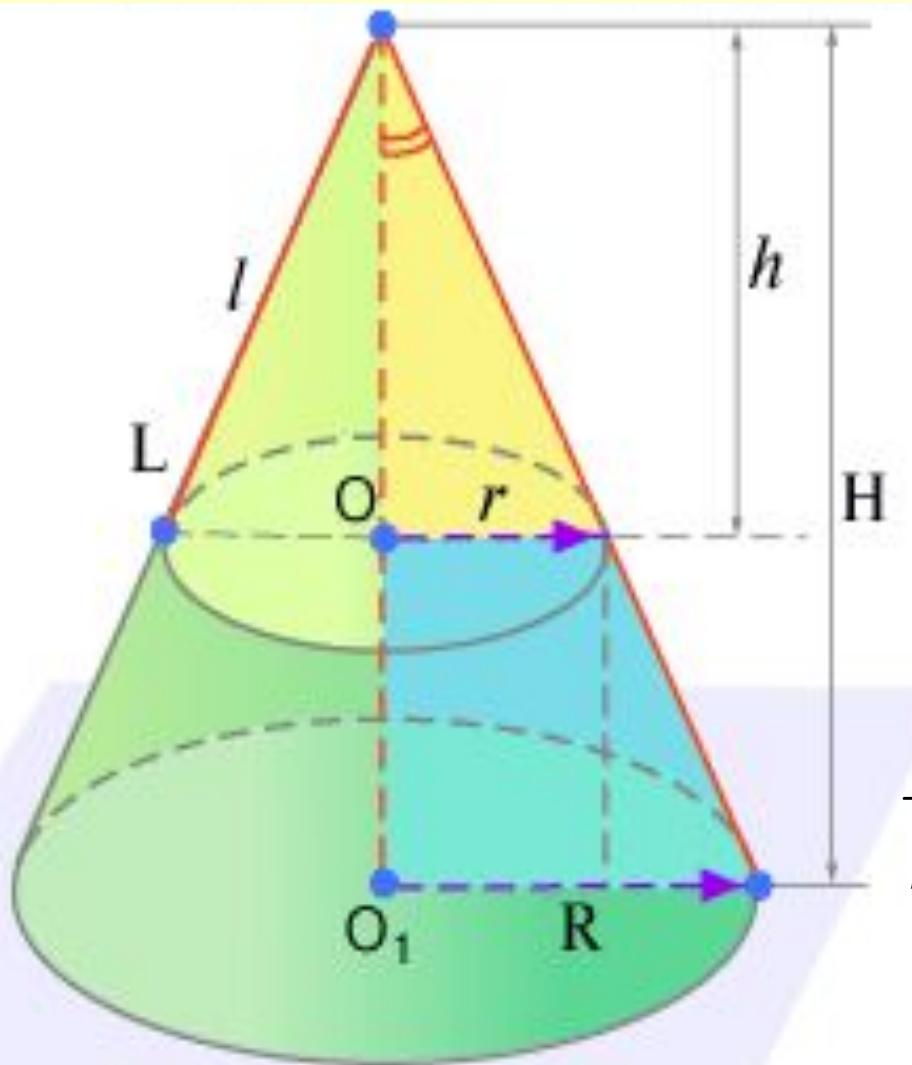


$$\triangle SPQ \sim \triangle S_1P_1Q_1$$



- **Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.**

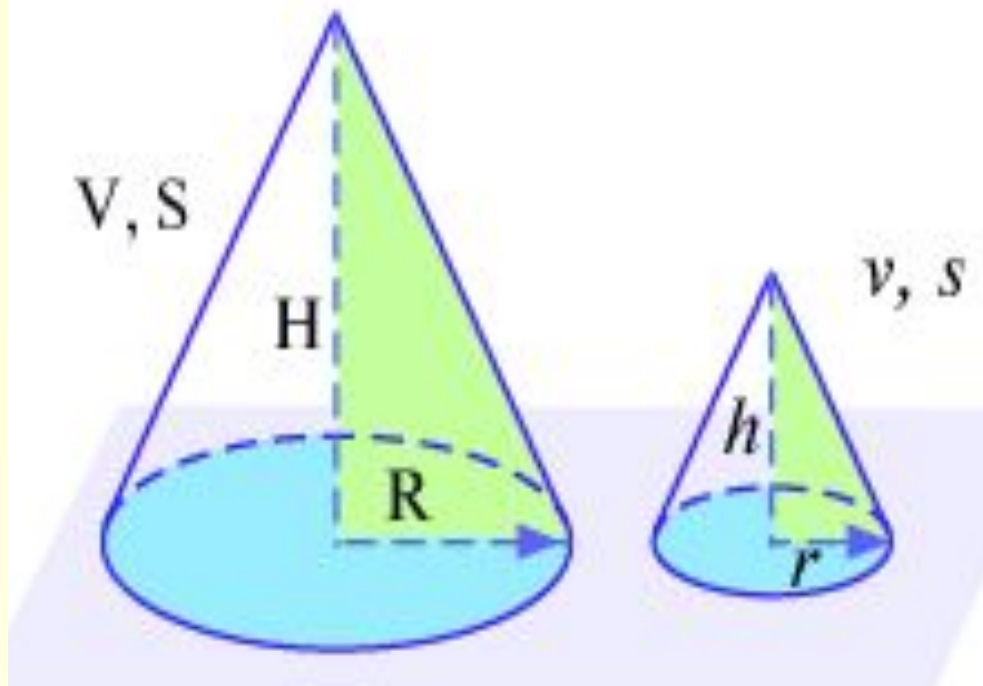
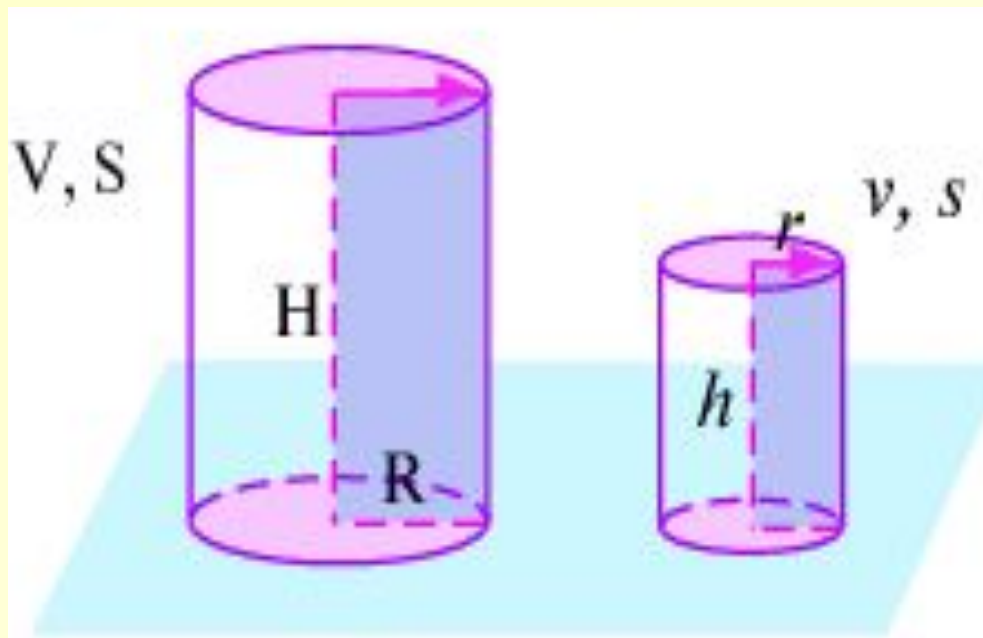
Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.



$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

$$\frac{V_{\text{доп.}}}{V_{\text{полн.}}} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{\text{бок.доп}}}{S_{\text{бок.полн}}} = \frac{2\pi r l}{2\pi R L} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$



Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$