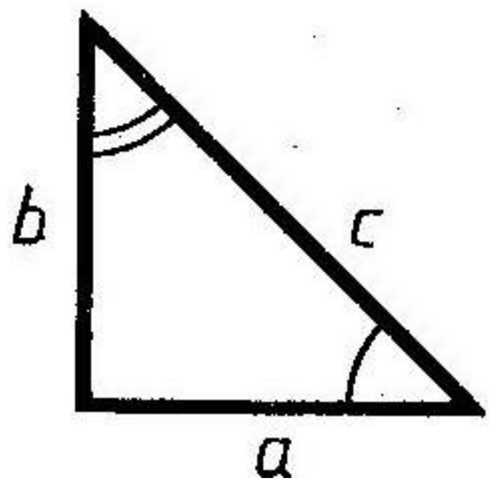
Теорема Пифагора

Историческая справка

Пифагор — древнегреческий ученый VI в. до н. э.

Историческая справка. Существует замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника, справедливость которого была доказана древнегреческим философом и математиком Пифагором (VI в. до н.э.). Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древних китайских рукописей показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

Т е о р е м а. ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

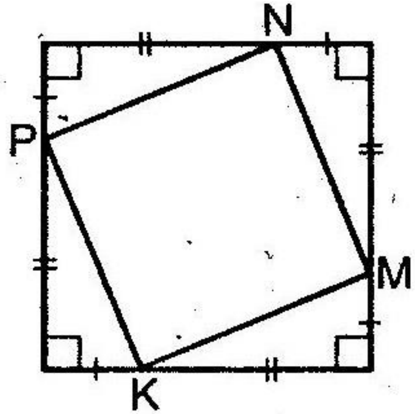


Рис. 376

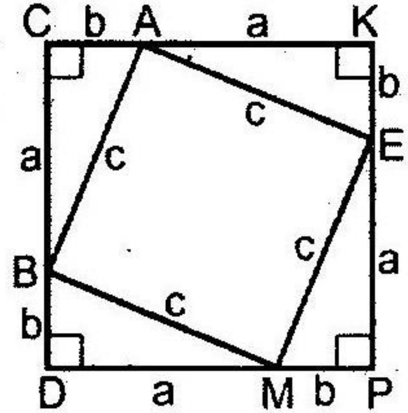


Рис. 377

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:

а) Достроим ΔABC до квадрата $CKPD$ со стороной $(a + b)$;
$S_{CKPD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

б) $\Delta BCA = \Delta AKE = \Delta EPM = \Delta MDB$ по двум катетам.
$S_{BCA} = S_{AKE} = S_{EPM} = S_{MDB} = ab/2$.

в) $BAEM$ – квадрат, $S_{BAEM} = c^2$.

г) $S_{CKPD} = S_{BAEM} + S_{BCA} + S_{AKE} + S_{EPM} + S_{MDB} = c^2 + 4 \cdot ab/2 =$
$= c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Решение задач по готовым чертежам

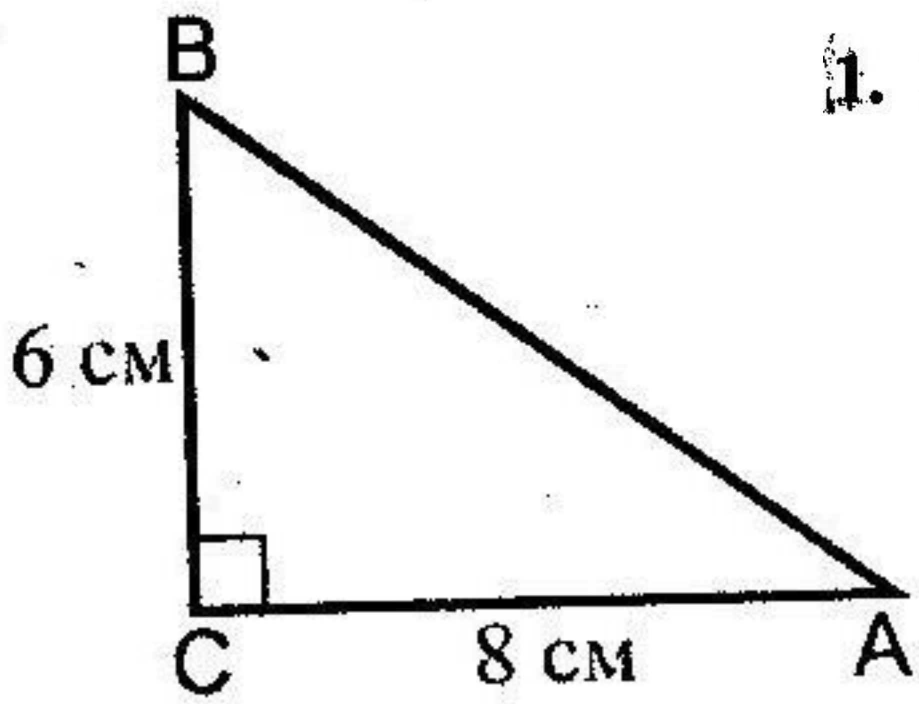


Рис. 379

1. Рис. 379. *Найти*: *AB*.

Решение задач по готовым чертежам

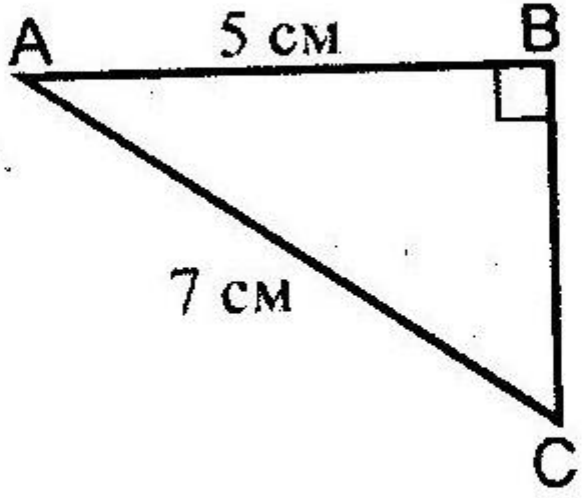


Рис. 380

2. Рис. 380. *Найти*: *BC*.

Решение задач по готовым чертежам

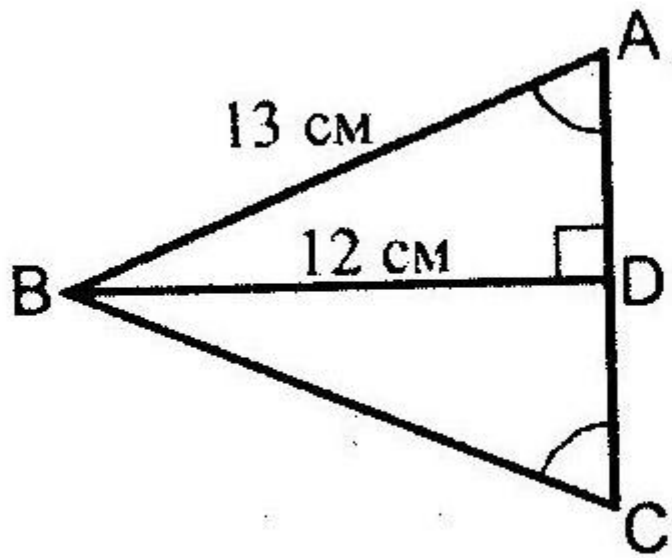


Рис. 381

3. Рис. 381. *Найти*: *AC*.

Решение задач по готовым чертежам

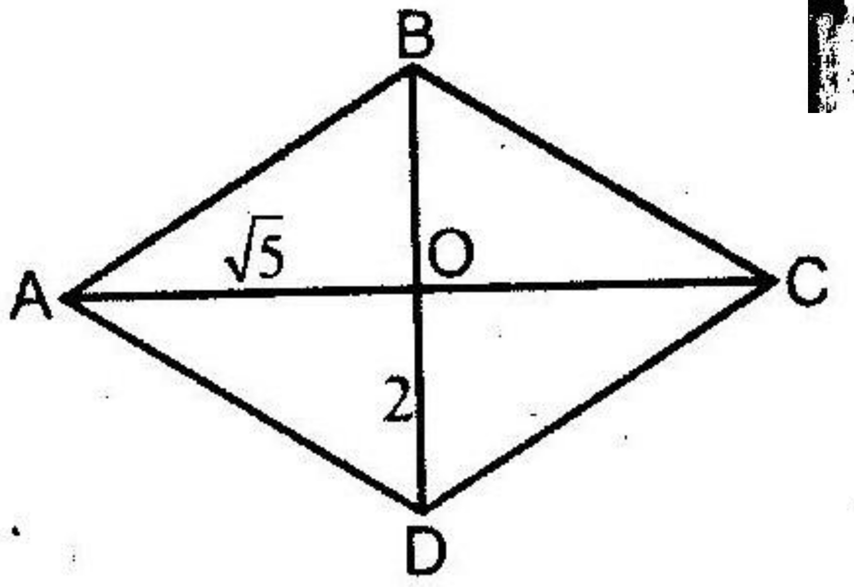


Рис. 382

Рис. 382. *ABCD* ромб.
Найти: *BC*.

Решение задач по готовым чертежам

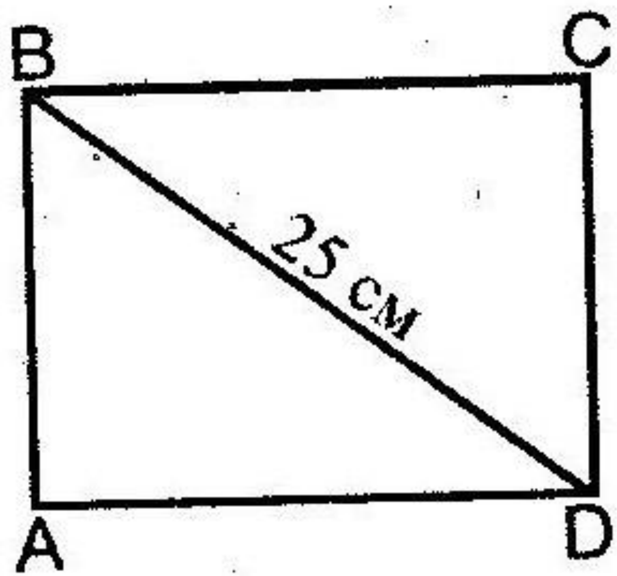


Рис. 383

5. Рис. 383. *ABCD* – прямоугольник. *AB* : *AD* = 3 : 4.
Найти: *AD*.

Решение задач по готовым чертежам

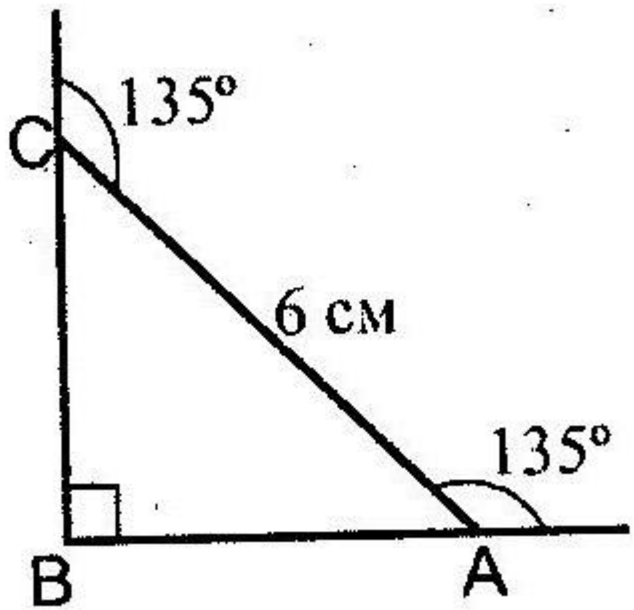


Рис. 384

6. Рис. 384. *Найти*: *AB*.

Ответы к задачам

1. $AB = 10$ см.
2. $BC = 2\sqrt{6}$ см.
3. $AC = 10$ см.
4. $BC = 3$.
5. $AD = 4$ см.
6. $AB = 3\sqrt{2}$ см.
7. $AC = 24$ см; $S_{ABCD} = 120$ см^2.

Решить задачи

- 1) **№ 483(а,б); 484(а,б); 487**
- 2) **Дополнительные задачи:**

1. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание – 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см. (*Ответ*: $S_{ABCD} = 50$ см^2.)

2. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите площадь трапеции. (*Ответ*: 42 см^2.)

Устно:

Сформулировать утверждения, обратные данным и выяснить, верны ли они:

– Сумма смежных углов равна 180°.
– Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
– Вертикальные углы равны.
– В параллелограмме противолежащие стороны равны.
– В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема. ***Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.***

Дано: ΔABC, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Выяснить, является ли ΔABC прямоугольным?

Решение:

а) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ такой, что $\angle C = 90°$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тогда по теореме Пифагора $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2$.

б) Так как $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, то: $A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, следовательно, $AB^2 = A_1B_1{}^2$ и $AB = A_1B_1$.

в) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ по трем сторонам, откуда $\angle C = \angle C_1 = 90°$, т.е. ΔABC – прямоугольный. Итак, если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

1. Решить устно задачи № 498 (а, б, в)
2. Решить задачу № 499 (а) письменно

Решить самостоятельно задачи:

1. Определите углы треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$.
(*Ответ*: 45°, 45°, 90°.)
2. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM = 1$, $BM = 1$. Найдите AC.
(*Ответ*: $1 + \sqrt{3}$.)
3. В треугольнике MPK $PK = 2$. На стороне MK отмечена точка A так, что $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$. Найдите $\angle MPK$.
(*Ответ*: 75°.)

Домашнее задание

П. 54, вопрос 8;

Решить задачи № 483 в), г), 484 в), г), д), 486 в);

П. 55; вопросы 9, 10.

Решить задачи № 498 (г, д, е), № 499 (б), 488

Дополнительные задачи:

1. В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции – 24 см, меньшее основание – 7 см. Найдите площадь трапеции и вторую боковую сторону.
2. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ см соответственно. Большая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение задач по теме «Теорема Пифагора»

- Урок 27

Решение задач по готовым чертежам

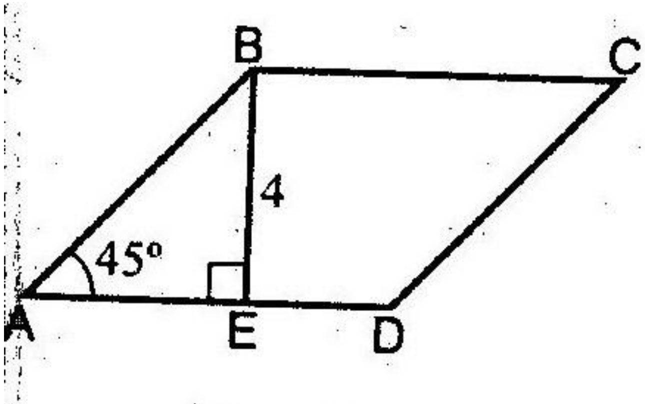


Рис. 385

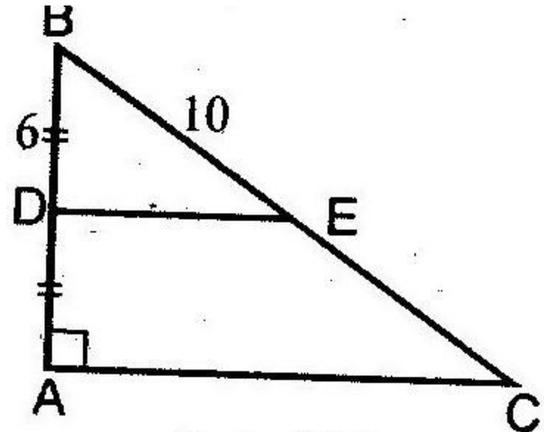


Рис. 386

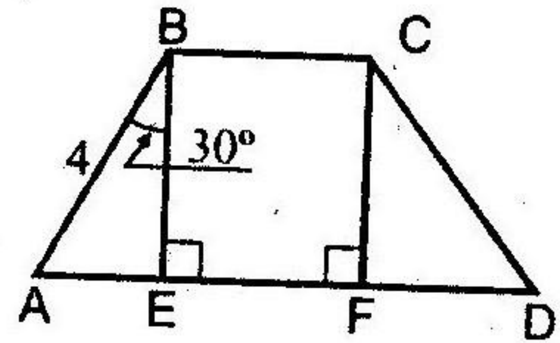


Рис. 387

1. Рис. 385. *ABCD* – параллелограмм. *Найти*: *CD*.
2. Рис. 386. *DE* || *AC*. *Найти*: *AC*.
3. Рис. 387. *ABCD* – трапеция. *Найти*: *CF*.

Решение задач по готовым чертежам

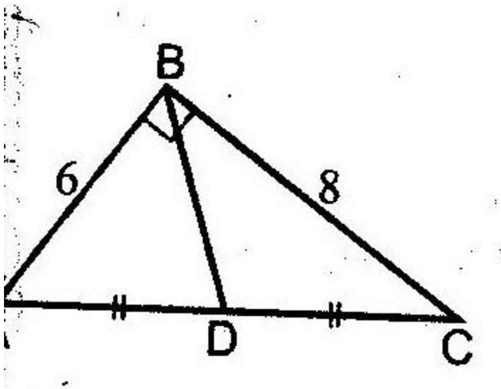


Рис. 388

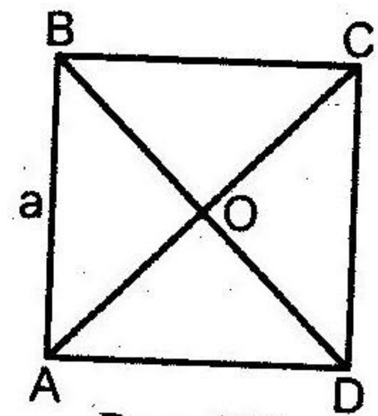


Рис. 389

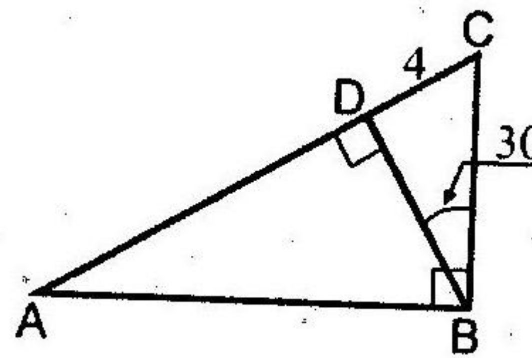


Рис. 390

4. Рис. 388. *Найти*: *BD*.

5. Рис. 389. *ABCD* – квадрат. *Найти*: *AO*.

6. Рис. 390. *Найти*: *DC*; *AC*; *AB*.

Решение задач по готовым чертежам

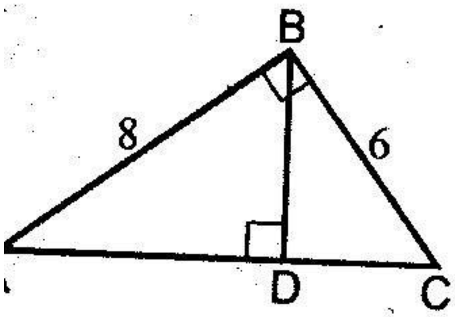


Рис. 391

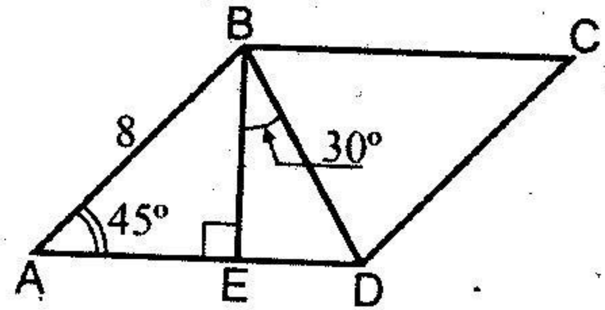


Рис. 392

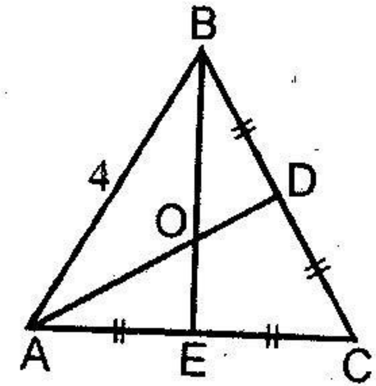


Рис. 393

7. Рис. 391. *Найти*: *BD*.

8. Рис. 392. *ABCD* – параллелограмм. *Найти*: *AD*.

9. Рис. 393. ΔABC – равносторонний. *Найти*: *AO*, *OE*.

Ответы к задачам

1. $CD = 4\sqrt{2}$.

2. $AC = 16$.

3. $CF = 2\sqrt{3}$.

4. $BD = 5$.

5. $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

6. $DC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{3}$; $AB = 16$.

7. 4,8.

8. $AD = 4\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. $OE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Решить задачи № 492, 495а), записав краткое решение

№ 492

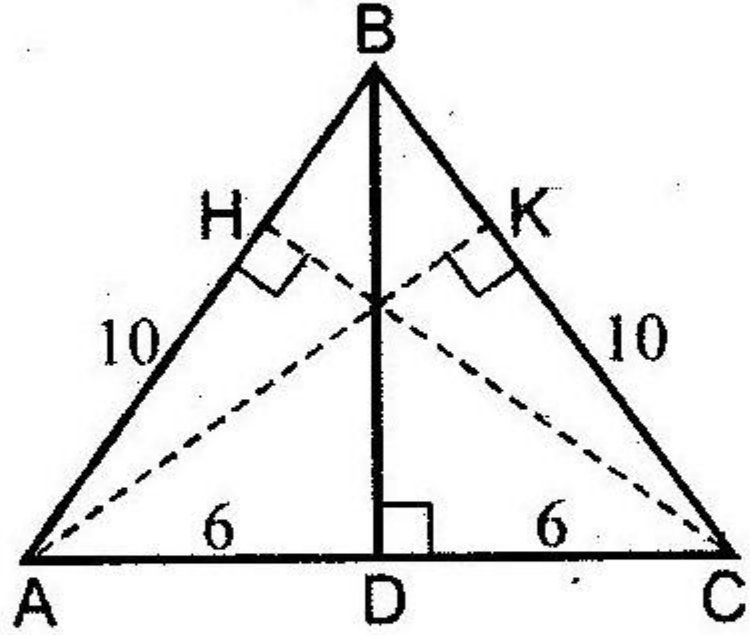


Рис. 394

№ 492

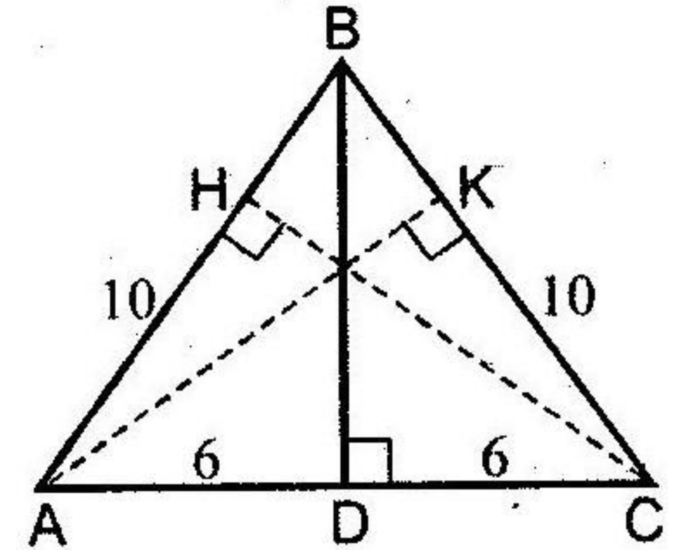


Рис. 394

Из ΔABD $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

ΔABC – равнобедренный $\Rightarrow$ CH = AK.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} CH \cdot AB \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9{,}6$ (см).

Ответ: 18; 9,6; 9,6 см.

495а)

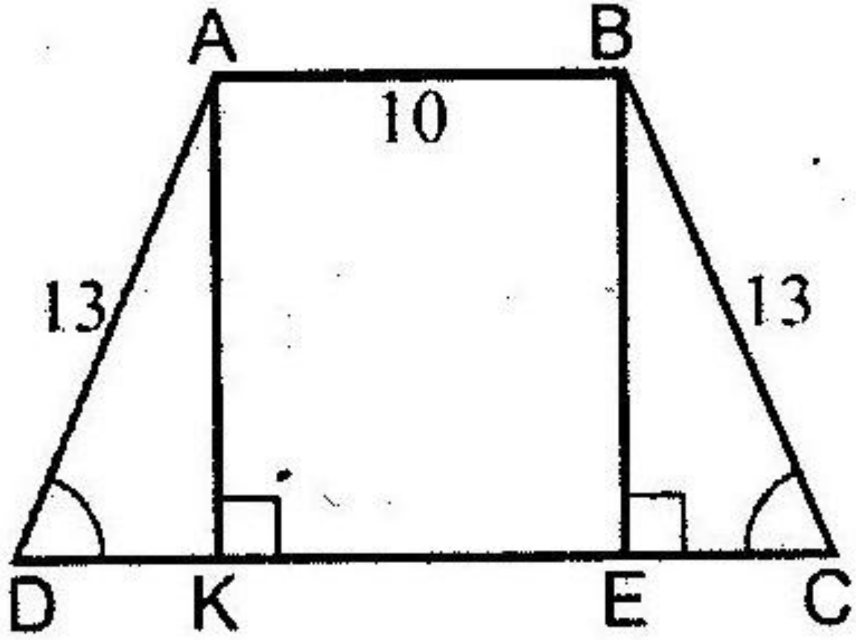


Рис. 395

495а)

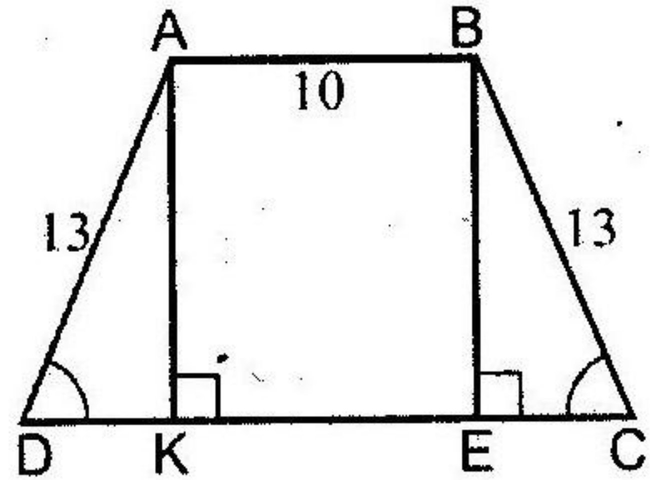


Рис. 395

$DK = CE$ ($\Delta ADK = \Delta CBE$ по гипотенузе и острому углу),

$ABEK$ – прямоугольник, тогда $KE = 10$ см, $DK = \dfrac{20-10}{10} = 5$ (см).

ΔADK – прямоугольный $\Rightarrow AK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AK \cdot (AB + CD) = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot (10 + 20) = 180$ (см^2).

Ответ: 180 см^2.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. Рис. 396.

Так как $AC = 14$ см, $BD = 48$ см, то $AO = 7$ см, $BO = 24$ см.
$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 7^2 + 24^2 = 625$. $AB = 25$ см.

Ответ: $AB = 25$ см.

2. Рис. 397. ΔABC – прямоугольный, равнобедренный

$x^2 + x^2 = 20^2$; $x = 10\sqrt{2}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$ см, $10\sqrt{2}$.

II вариант

1. Рис. 398.

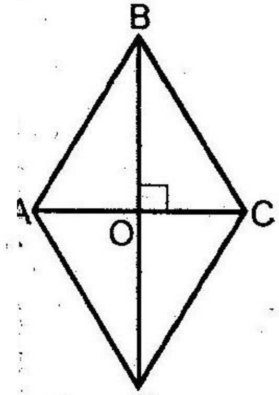
$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$. $AC = 4\sqrt{13}$ см.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

2. Рис. 399. Так как $\angle B = 30°$, $\angle A = 90°$, то $AC = BC : 2$, т. е. $AC = x$ см, $BC = 2x$ см.

$x^2 + 6^2 = (2x)^2$; $x = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$.



396

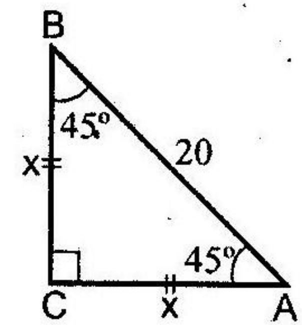


Рис. 397

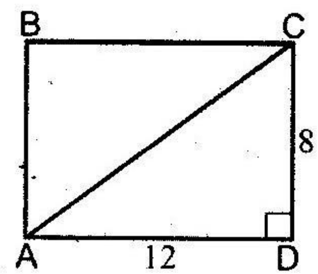


Рис. 398

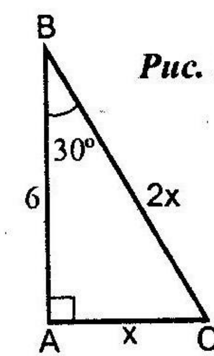


Рис. 399

II уровень

вариант

1. Рис. 400. Проведем $CE \perp AD$. $CD^2 = CE^2 + DE^2$; $CE = 5$ см.
$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 55$ (см^2).

Ответ: 55 см^2.

2. Рис. 401.
Проведем $BE \perp AC$, тогда в ΔABE $AE = BE = x$ см, $\angle E = 90°$,
$AB^2 = x^2 + x^2$, откуда $x = 5\sqrt{2}$ (см^2).
$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 30\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: $30\sqrt{2}$ см^2.

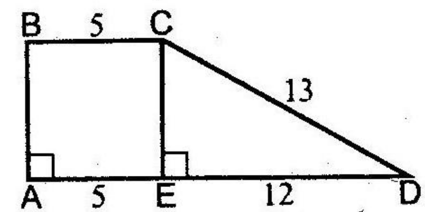


Рис. 400

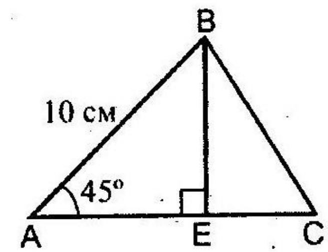


Рис. 401

II вариант

1. Рис. 402.
Проведем $CE \perp AD$.
$DE^2 = CD^2 - CE^2 = 144$, $DE = 12$ см, тогда $BC = AE = 8$ см.
$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 126$ (см^2).

Ответ: 126 см^2.

2. Рис. 403.
Проведем $BE \perp AC$, тогда в ΔABE $AE = 6$ см,
$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 108$, $BE = 6\sqrt{3}$ см.
$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 24\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $24\sqrt{3}$ см^2.

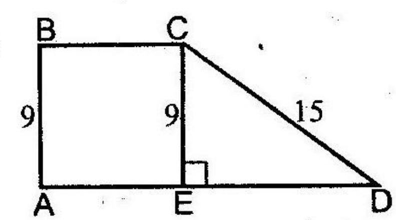


Рис. 402

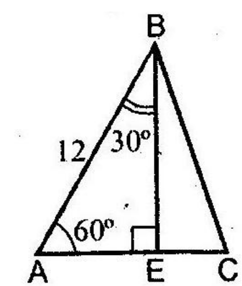


Рис. 403

III уровень

I вариант

1. Рис. 404.

$BO = OD = BD : 2 = \sqrt{41}$ см. $AO = OC = AC : 2 = 13$ см.

Если $KD = x$ см, то $AK = 16 - x$ (см).

$OK^2 = OD^2 - KD^2 = AO^2 - AK^2$.

$41 - x^2 = 13^2 - (16 - x)^2$; $x = 4$.

$KD = 4$ см, $AK = 12$ см.

Ответ: 4 см, 12 см.

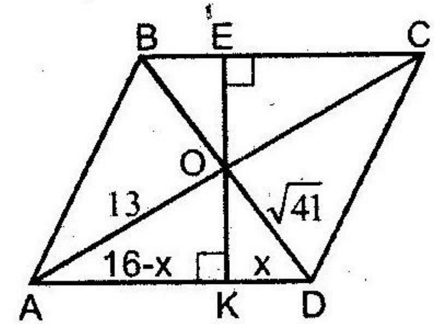


Рис. 404

2. Рис. 405.

$AB = BC = BK + KC = 25$ см. $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 49$, $AK = 7$ см.

$AC^2 = AK^2 + KC^2 = 50$, $AC = 5\sqrt{2}$ см.

$S_{ABC} = AK \cdot BC : 2 = 7 \cdot 25 : 2 = 87{,}5$ (см^2).

Ответ: $AC = 5\sqrt{2}$ см. $S = 87{,}5$ см^2.

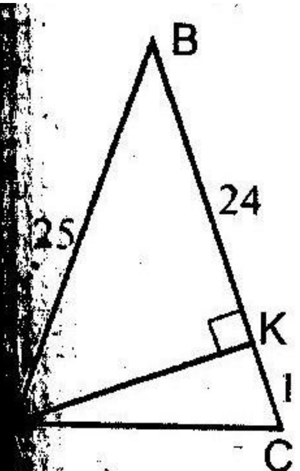


Рис. 405