

# Теорема Пифагора



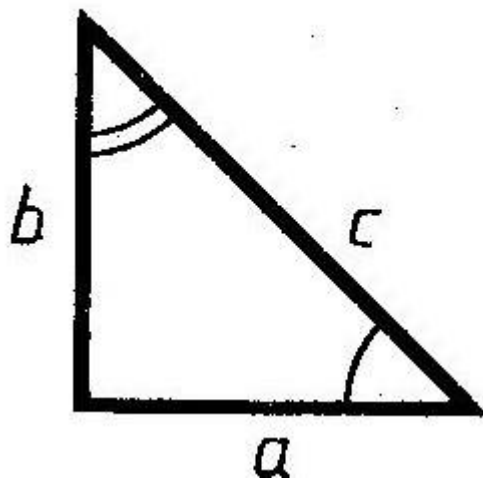
## Историческая справка



Пифагор — древнегреческий ученый VI в. до н. э.

**Историческая справка.** Существует замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника, справедливость которого была доказана древнегреческим философом и математиком Пифагором (VI в. до н.э.). Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древних китайских рукописей показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

**Теорема.** *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

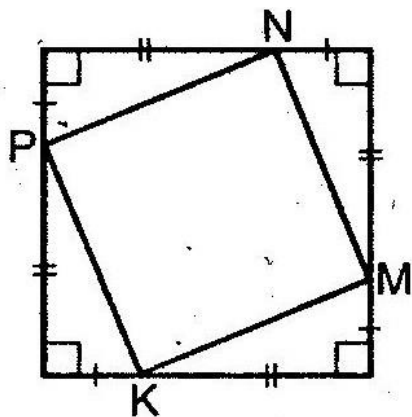


Рис. 376

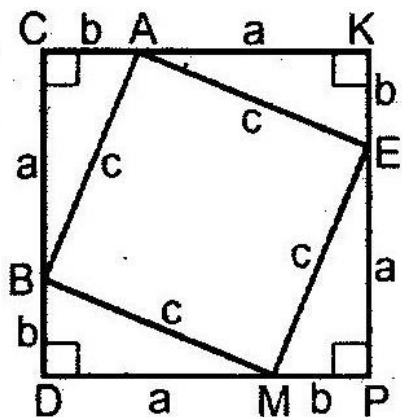


Рис. 377

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ .

Доказать:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Доказательство:

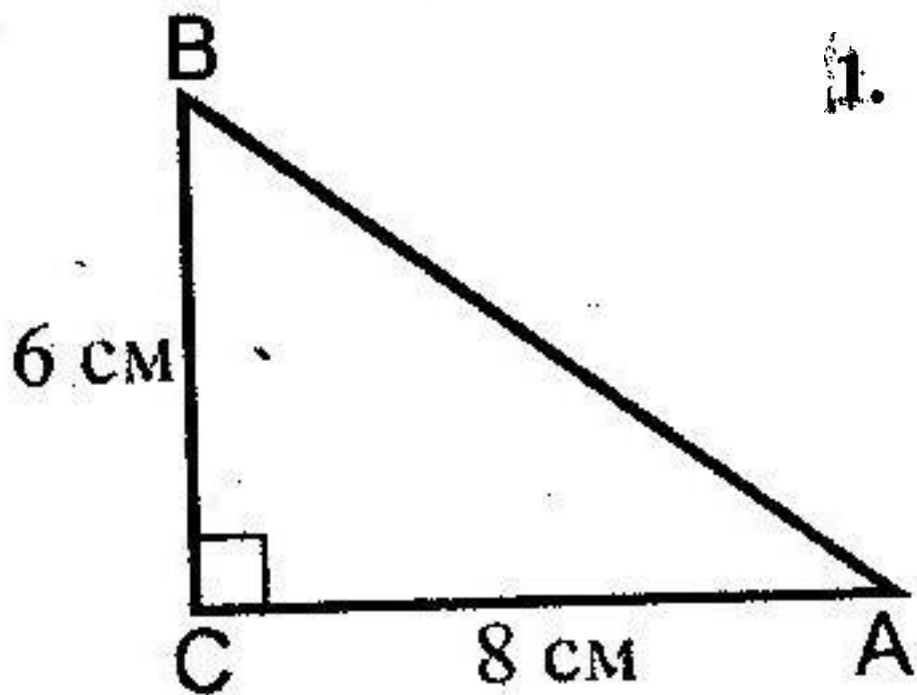
а) Построим  $\triangle ABC$  до квадрата  $CKPD$  со стороной  $(a + b)$ ;  
 $S_{CKPD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

б)  $\triangle BCA = \triangle AKE = \triangle EPM = \triangle MDB$  по двум катетам.  
 $S_{BCA} = S_{AKE} = S_{EPM} = S_{MDB} = ab/2$ .

в)  $BAEM$  – квадрат,  $S_{BAEM} = c^2$ .

г)  $S_{CKPD} = S_{BAEM} + S_{BCA} + S_{AKE} + S_{EPM} + S_{MDB} = c^2 + 4 \cdot ab/2 =$   
 $= c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$ , откуда  $c^2 = a^2 + b^2$ .

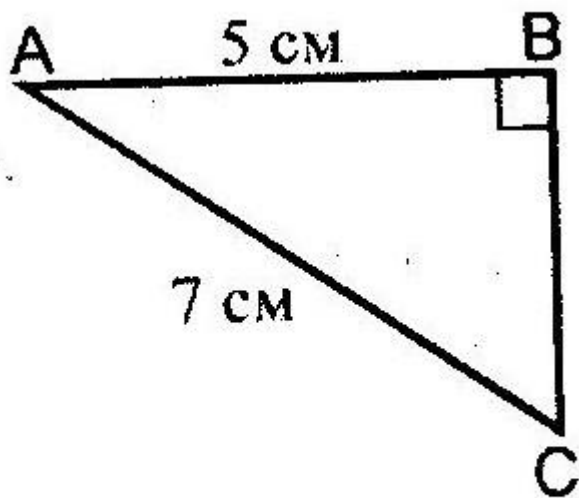
Решение задач по готовым чертежам



1. Рис. 379. Найдите:  $AB$ .

**Рис. 379**

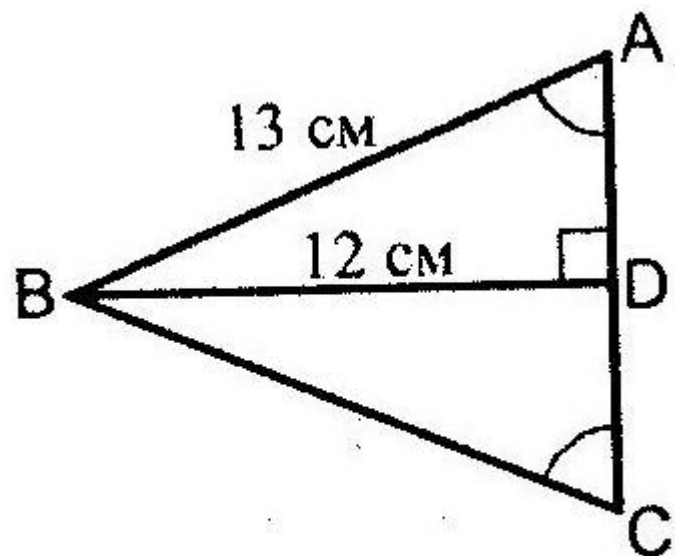
Решение задач по готовым чертежам



*Рис. 380*

2. Рис. 380. *Найти: BC.*

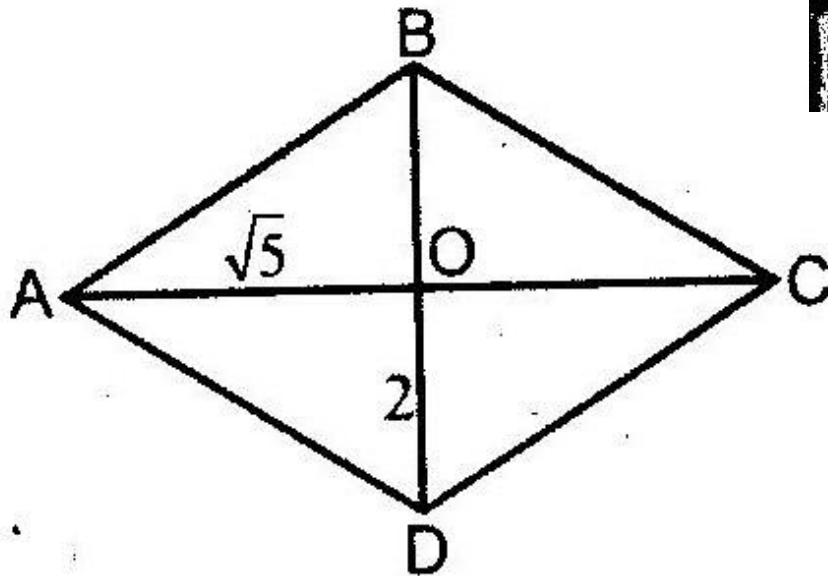
## Решение задач по готовым чертежам



*Рис. 381*

3. Рис. 381. Найдите:  $AC$ .

## Решение задач по готовым чертежам

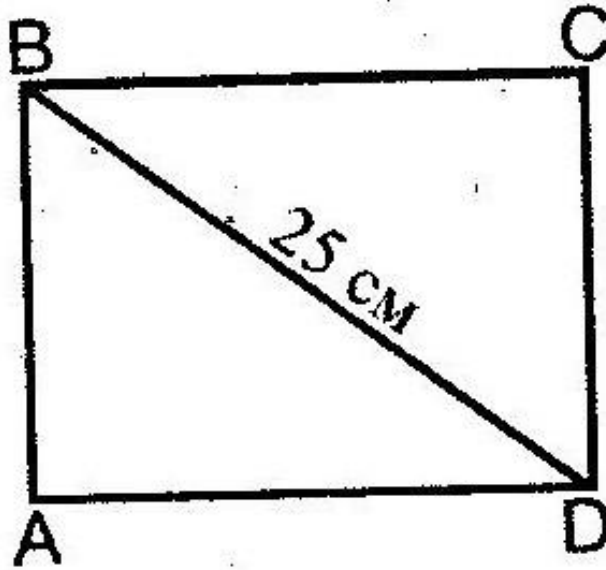


*Рис. 382*

**Рис. 382.**  $ABCD$  ромб.  
*Найти:  $BC$ .*



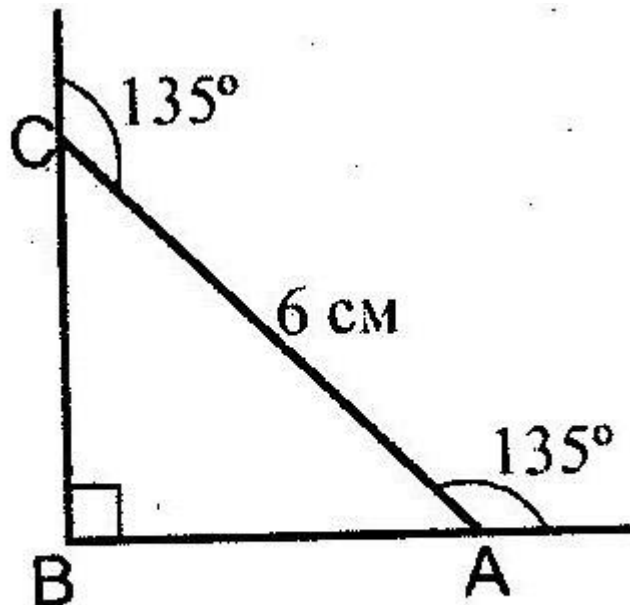
## Решение задач по готовым чертежам



*Рис. 383*

5. Рис. 383.  $ABCD$  – прямоугольник.  $AB : AD = 3 : 4$ .  
Найти:  $AD$ .

# Решение задач по готовым чертежам



*Рис. 384*

6. Рис. 384. *Найти: АВ.*

## Ответы к задачам

1.  $AB = 10$  см.

3.  $AC = 10$  см.

5.  $AD = 4$  см.

7.  $AC = 24$  см;  $S_{ABCD} = 120$  см<sup>2</sup>.

2.  $BC = 2\sqrt{6}$  см.

4.  $BC = 3$ .

6.  $AB = 3\sqrt{2}$  см.

## Решить задачи

□ 1) № 483(а,б); 484(а,б); 487

□ 2) Дополнительные задачи:

1. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание – 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см. (*Ответ:  $S_{ABCD} = 50 \text{ см}^2$ .*)

2. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите площадь трапеции.  
(*Ответ:  $42 \text{ см}^2$ .*)

## Устно:

Сформулировать утверждения, обратные данным и выяснить, верны ли они:

- Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Вертикальные углы равны.
- В параллелограмме противоположные стороны равны.
- В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

## Теорема, обратная теореме Пифагора

**Теорема.** *Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.*

-----  
Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .

Выяснить, является ли  $\triangle ABC$  прямоугольным?

**Решение:**

- а) Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  такой, что  $\angle C = 90^\circ$ ,  $A_1C_1 = AC$ ,  $B_1C_1 = BC$ . Тогда по теореме Пифагора  $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$ .
- б) Так как  $A_1C_1 = AC$ ,  $B_1C_1 = BC$ , то:  
 $A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$ , следовательно,  $AB^2 = A_1B_1^2$  и  $AB = A_1B_1$ .
- в)  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$  по трем сторонам, откуда  $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ , т.е.  $\triangle ABC$  – прямоугольный. Итак, если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

1. Решить устно задачи № 498 (а, б, в)
2. Решить задачу № 499 (а) письменно

Решить самостоятельно задачи:

1. Определите углы треугольника со сторонами  $1, 1, \sqrt{2}$ .

(Ответ:  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ .)

2. В треугольнике  $ABC$   $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC = 2$ . На стороне  $AC$  отмечена точка  $M$  так, что  $AM = 1$ ,  $BM = 1$ . Найдите  $AC$ .

(Ответ:  $1 + \sqrt{3}$ .)

3. В треугольнике  $MPK$   $PK = 2$ . На стороне  $MK$  отмечена точка  $A$  так, что  $MA = AP = \sqrt{3}$ ,  $AK = 1$ . Найдите  $\angle MPK$ .

(Ответ:  $75^\circ$ .)

## Домашнее задание

П. 54, вопрос 8;

Решить задачи № 483 в), г), 484 в), г), д), 486 в);

П. 55; вопросы 9, 10.

Решить задачи № 498 (г, д, е), № 499 (б), 488

*Дополнительные задачи:*

1. В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и  $\sqrt{577}$  см соответственно, высота трапеции – 24 см, меньшее основание – 7 см. Найдите площадь трапеции и вторую боковую сторону.
2. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и  $\sqrt{82}$  см соответственно. Большая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.



## Решение задач по теме «Теорема Пифагора»

»» Урок 27

## Решение задач по готовым чертежам

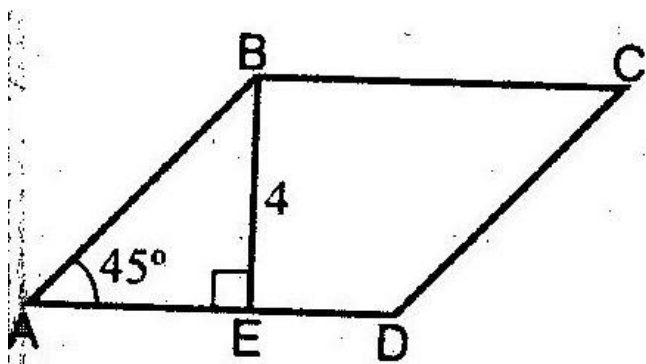


Рис. 385

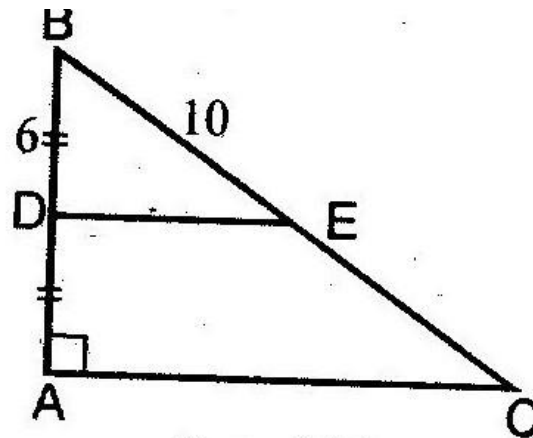


Рис. 386

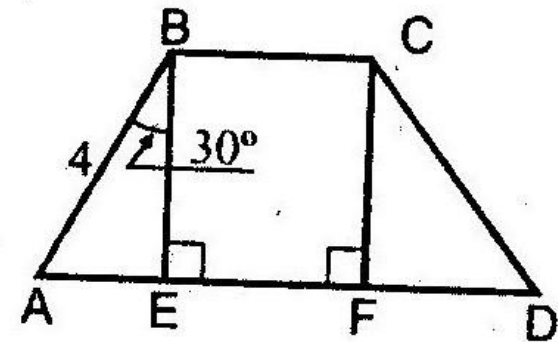


Рис. 387

1. Рис. 385.  $ABCD$  – параллелограмм. Найти:  $CD$ .
2. Рис. 386.  $DE \parallel AC$ . Найти:  $AC$ .
3. Рис. 387.  $ABCD$  – трапеция. Найти:  $CF$ .

## Решение задач по готовым чертежам

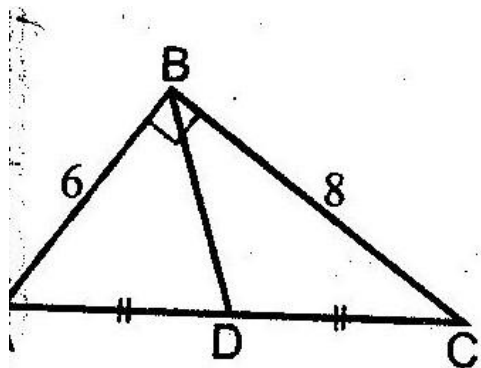


Рис. 388

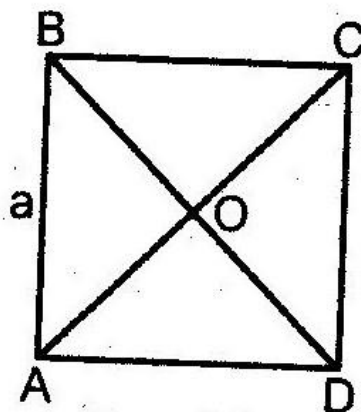


Рис. 389

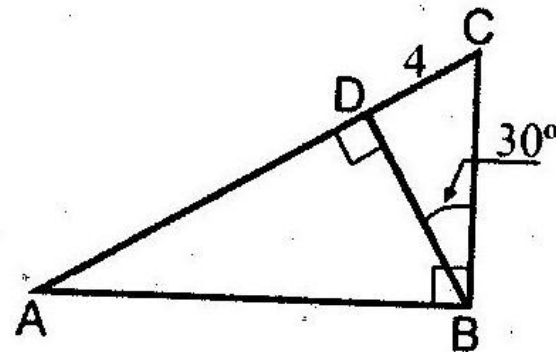


Рис. 390

4. Рис. 388. *Найти:  $BD$ .*
5. Рис. 389.  $ABCD$  – квадрат. *Найти:  $AO$ .*
6. Рис. 390. *Найти:  $DC$ ;  $AC$ ;  $AB$ .*

Решение задач по готовым чертежам

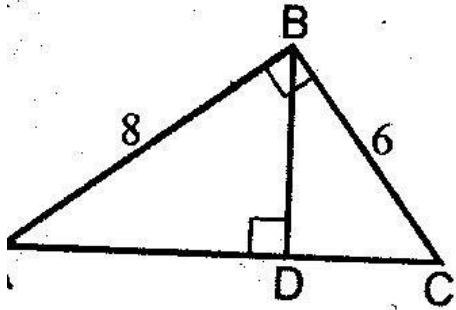


Рис. 391

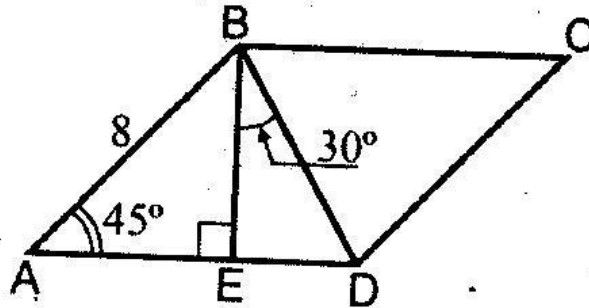


Рис. 392

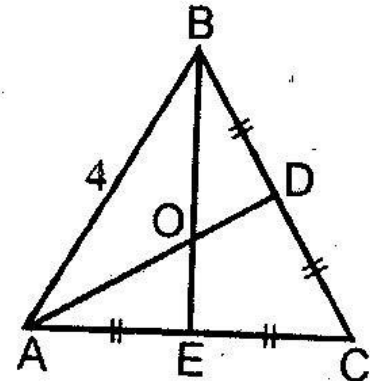


Рис. 393

7. Рис. 391. *Найти:  $BD$ .*
8. Рис. 392.  $ABCD$  – параллелограмм. *Найти:  $AD$ .*
9. Рис. 393.  $\triangle ABC$  – равносторонний. *Найти:  $AO$ ,  $OE$ .*

## Ответы к задачам

1.  $CD = 4\sqrt{2}$ .

3.  $CF = 2\sqrt{3}$ .

5.  $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

7. 4,8.

9.  $OE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $AO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

2.  $AC = 16$ .

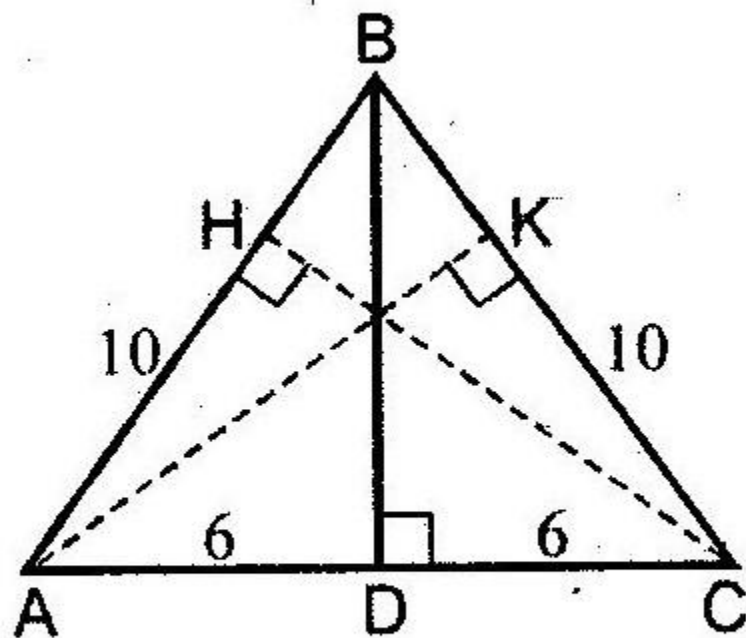
4.  $BD = 5$ .

6.  $DC = 4\sqrt{2}$ ,  $AC = 8\sqrt{3}$ ;  $AB = 16$ .

8.  $AD = 4\sqrt{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ .

**Решить задачи № 492, 495а), записав краткое решение**

**№ 492**



*Рис. 394*

# № 492

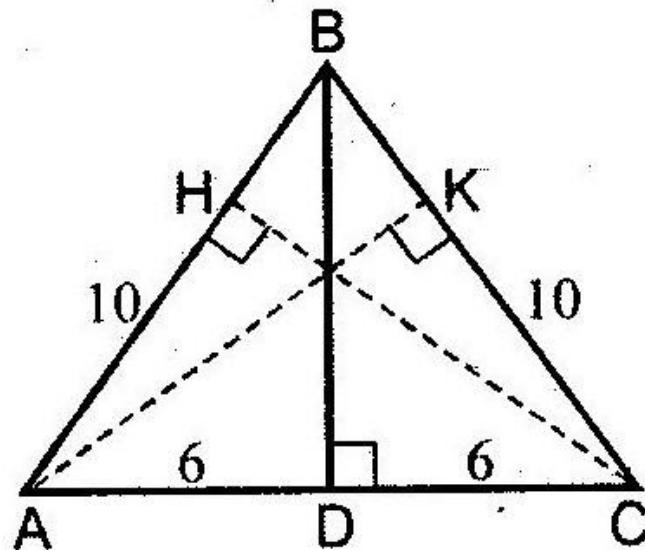


Рис. 394

Из  $\triangle ABD$   $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$  (см).

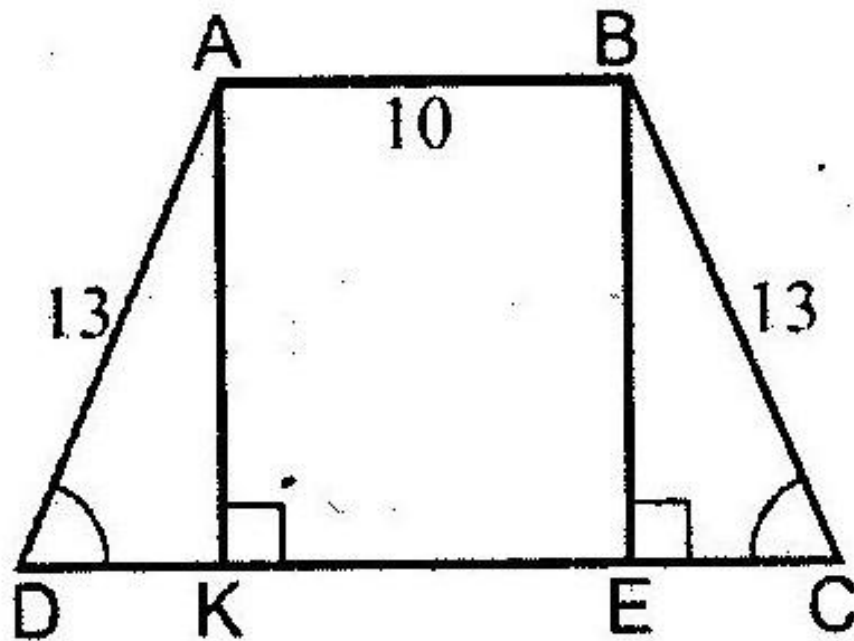
$\triangle ABC$  – равнобедренный  $\Rightarrow CH = AK$ .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} CH \cdot AB \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9,6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 18; 9,6; 9,6 см.

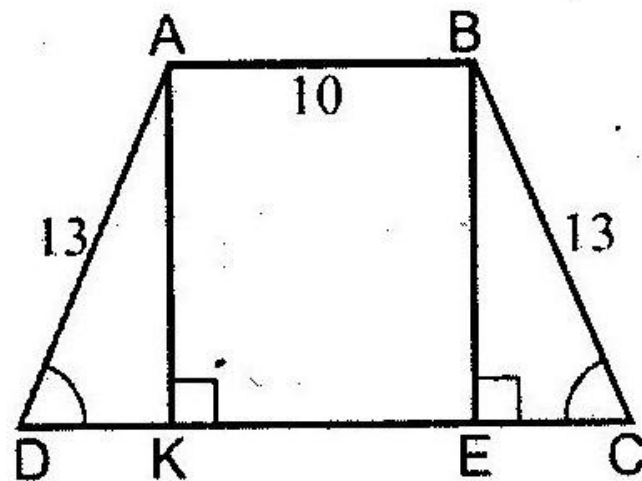


495a)



*Рис. 395*

**495a)**



*Рис. 395*

$DK = CE$  ( $\triangle ADK = \triangle BCE$  по гипотенузе и острому углу),  
 $ABEK$  – прямоугольник, тогда  $KE = 10$  см,  $DK = \frac{20-10}{2} = 5$  (см).

$\triangle ADK$  – прямоугольный  $\Rightarrow AK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$  (см).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AK \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (10 + 20) = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

*Ответ:* 180 см<sup>2</sup>.

# Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

## I уровень

### I вариант

1. Рис. 396.

Так как  $AC = 14$  см,  $BD = 48$  см, то  $AO = 7$  см,  $BO = 24$  см.  
 $AB^2 = AO^2 + BO^2 = 7^2 + 24^2 = 625$ .  $AB = 25$  см.

Ответ:  $AB = 25$  см.

2. Рис. 397.  $\triangle ABC$  – прямоугольный, равнобедренный

$$x^2 + x^2 = 20^2; x = 10\sqrt{2}.$$

Ответ:  $10\sqrt{2}$  см,  $10\sqrt{2}$  см.

### II вариант

1. Рис. 398.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 8^2 = 208. AC = 4\sqrt{13} \text{ см.}$$

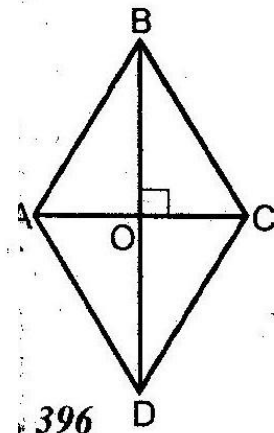
Ответ:  $10\sqrt{2}$ .

2. Рис. 399. Так как  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle A = 90^\circ$ , то  $AC = BC : 2$ , т. е.

$$AC = x \text{ см, } BC = 2x \text{ см.}$$

$$x^2 + 6^2 = (2x)^2; x = 2\sqrt{3}.$$

Ответ:  $2\sqrt{3}$ ,  $4\sqrt{3}$ .



396

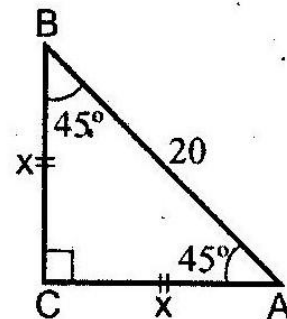


Рис. 397

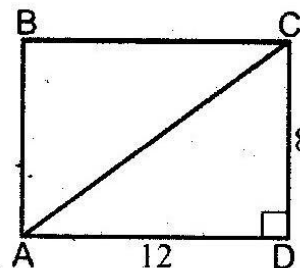


Рис. 398

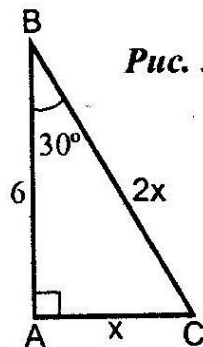


Рис. 399

## II уровень

### вариант

1. Рис. 400. Проведем  $CE \perp AD$ .  $CD^2 = CE^2 + DE^2$ ;  $CE = 5$  см.

$$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 55 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $55 \text{ см}^2$ .

2. Рис. 401.

Проведем  $BE \perp AC$ , тогда в  $\triangle ABE$   $AE = BE = x$  см,  $\angle E = 90^\circ$ ,

$$AB^2 = x^2 + x^2, \text{ откуда } x = 5\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 30\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

Ответ:  $30\sqrt{2} \text{ см}^2$ .

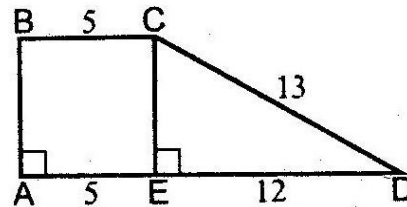


Рис. 400

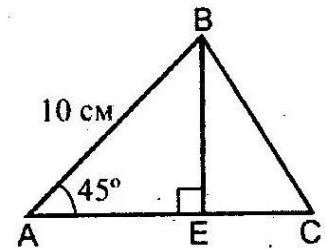


Рис. 401

### II вариант

1. Рис. 402.

Проведем  $CE \perp AD$ .

$$DE^2 = CD^2 - CE^2 = 144, DE = 12 \text{ см, тогда } BC = AE = 8 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 126 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $126 \text{ см}^2$ .

2. Рис. 403.

Проведем  $BE \perp AC$ , тогда в  $\triangle ABE$   $AE = 6$  см,

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 108, BE = 6\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 24\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $24\sqrt{3} \text{ см}^2$ .

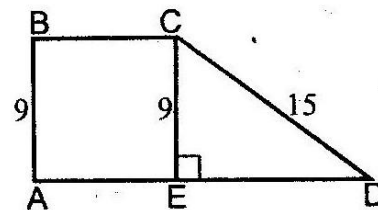


Рис. 402

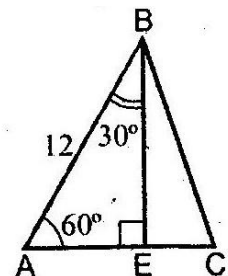


Рис. 403

### III уровень

#### I вариант

1. Рис. 404.

$$BO = OD = BD : 2 = \sqrt{41} \text{ см. } AO = OC = AC : 2 = 13 \text{ см.}$$

Если  $KD = x$  см, то  $AK = 16 - x$  (см).

$$OK^2 = OD^2 - KD^2 = AO^2 - AK^2.$$

$$41 - x^2 = 13^2 - (16 - x)^2; x = 4.$$

$$KD = 4 \text{ см, } AK = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 4 см, 12 см.

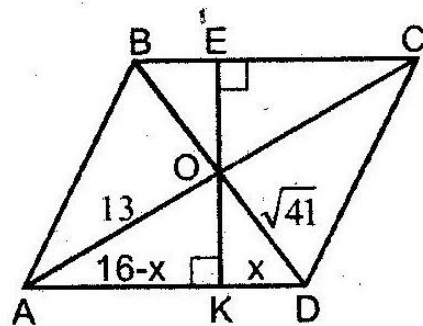


Рис. 404

2. Рис. 405.

$$AB = BC = BK + KC = 25 \text{ см. } AK^2 = AB^2 - BK^2 = 49, AK = 7 \text{ см.}$$

$$AC^2 = AK^2 + KC^2 = 50, AC = 5\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = AK \cdot BC : 2 = 7 \cdot 25 : 2 = 87,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $AC = 5\sqrt{2}$  см.  $S = 87,5 \text{ см}^2$ .

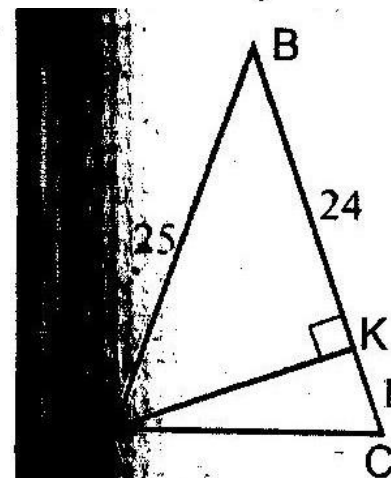


Рис. 405