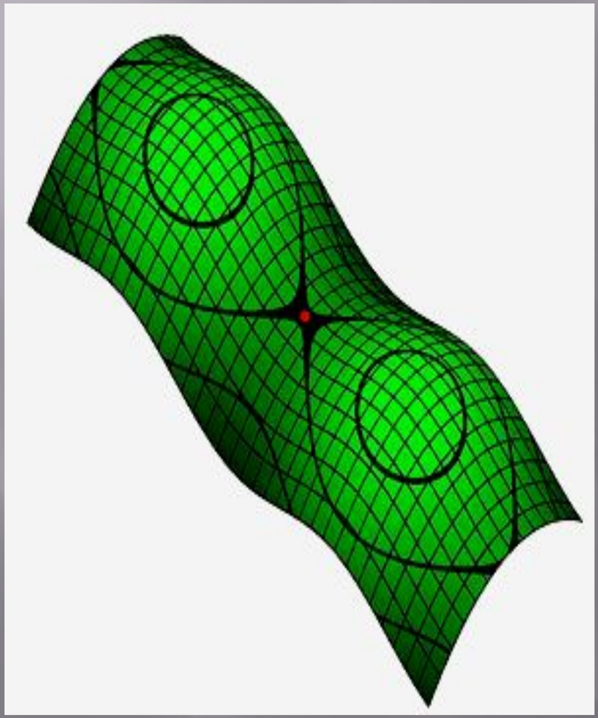
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ. КОНУС, СФЕРА

«Математика владеет не только истиной,
но и высшей красотой-красотой
отточенной
и строгой, возвышенно чистой
и стремящейся к подлинному
совершенству,
которое свойственно лишь величайшим
образцам искусства.»

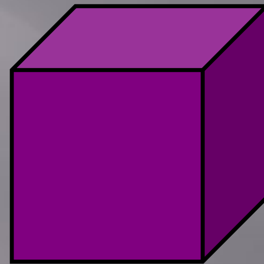
Бертран Рассел

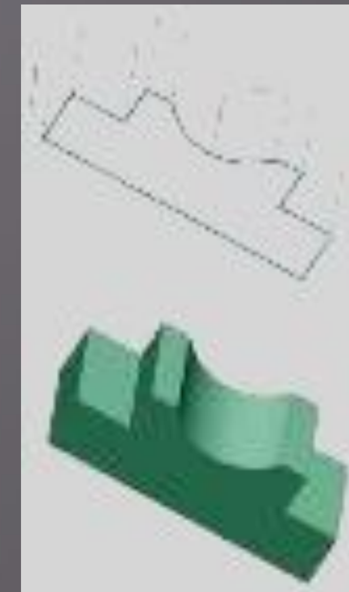
Поверхности

- ***Пример простой поверхности***



Поверхность — геометрическое понятие, при логическом уточнении этого понятия в разных разделах геометрии ему придаётся различный смысл. В элементарной геометрии рассматриваются плоскости, многогранники, а также некоторые кривые *поверхности*. При этом каждая поверхность определяется специальным способом, без общего определения, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, сфера — множество точек, отстоящих на заданном расстоянии от данной точки. Понятие «поверхности» лишь поясняется, а не определяется. Например, говорят, что *поверхность* есть граница тела или след движущейся линии.





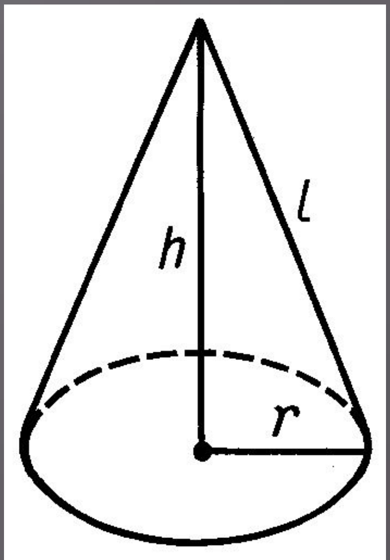
В современной геометрии поверхностью называют двумерное многообразие или двумерное подмногообразие, но иногда этим словом обозначают произвольное подмногообразие. Математически строгое определение поверхности основывается на понятиях топологии. При этом основным является понятие простой поверхности, которую можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (*растяжениям, сжатиям и изгибаниям*).

Классификация:

С точки зрения топологического строения, *поверхности* как двумерные многообразия разделяются на несколько типов:

- замкнутые и открытые,
- ориентируемые и не ориентируемые
- и т. д.

Конус

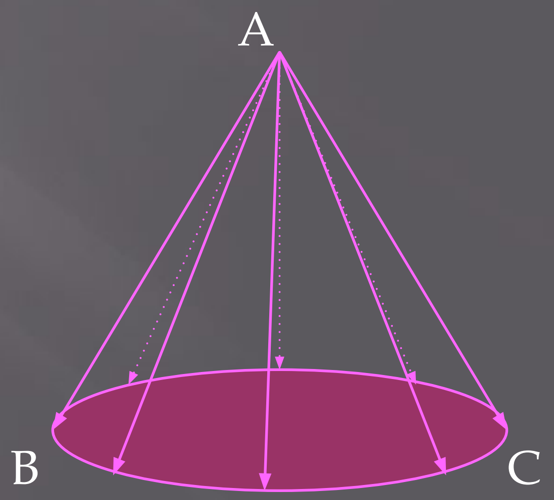


- ***Прямой круговой конус***

Конус — тело, полученное объединением
всех лучей, исходящих из одной точки
(*вершины* конуса) и проходящих
через плоскую поверхность.

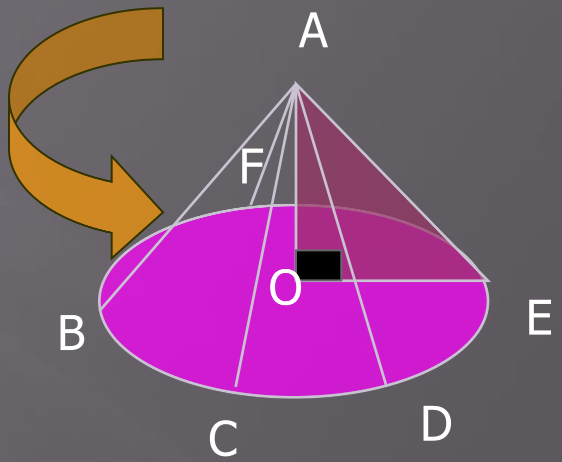
Иногда конусом называют часть такого тела, полученную объединением
всех отрезков, соединяющих вершину и точки С плоской поверхности(последнюю в таком случае называют *основанием* конуса,
а конус называют *опирающимся* на данное основание).

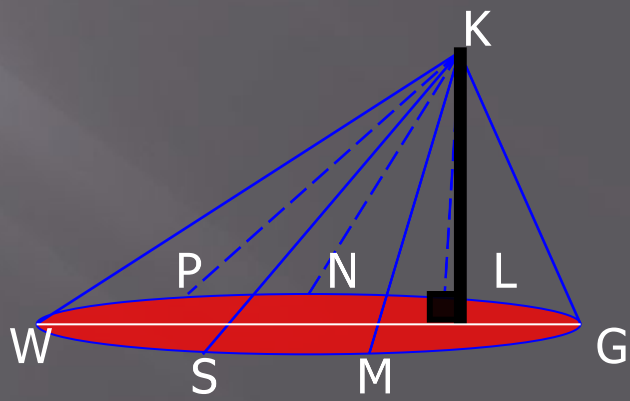
Коническая поверхность – поверхность ,с вершиной *A* и направляющей *B*, содержащая все точки всех прямых ,
проходящих через точку *O* и пересекающихся с кривой *B*.



Конус

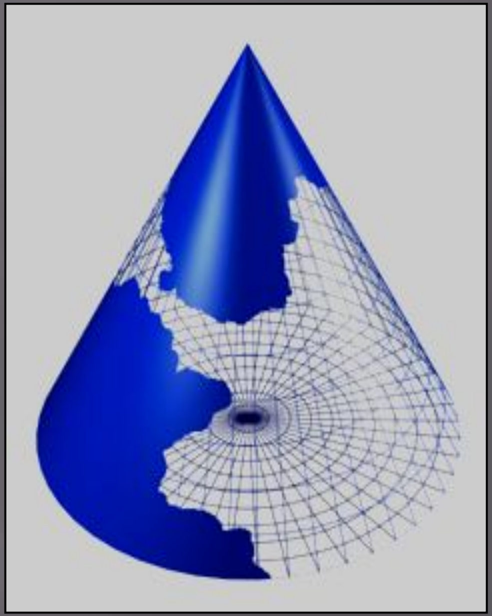
Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на
плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется высотой конуса. Если основание конуса имеет центр симметрии (например, является кругом или эллипсом) и ортогональная проекция вершины конуса на плоскость основания совпадает с этим центром,
то конус называется *прямым*. При этом прямая, соединяющая вершину и центр основания, называется
осью конуса. Если же ортогональная проекция вершины не совпадает с центром симметрии основания,
то конус называется *косым* или *наклонным*. Если основание конуса является кругом, конус называется *круговым*. **Прямой круговой конус** (часто
его называют просто конусом) можно получить
Вращением.Прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса).

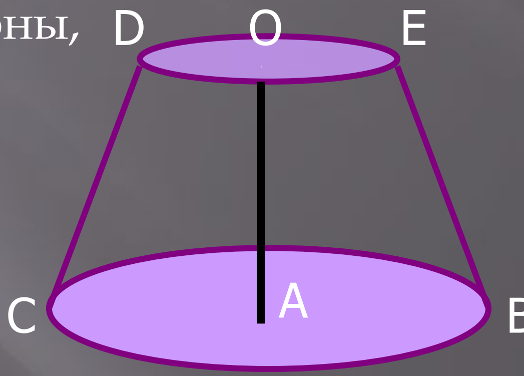




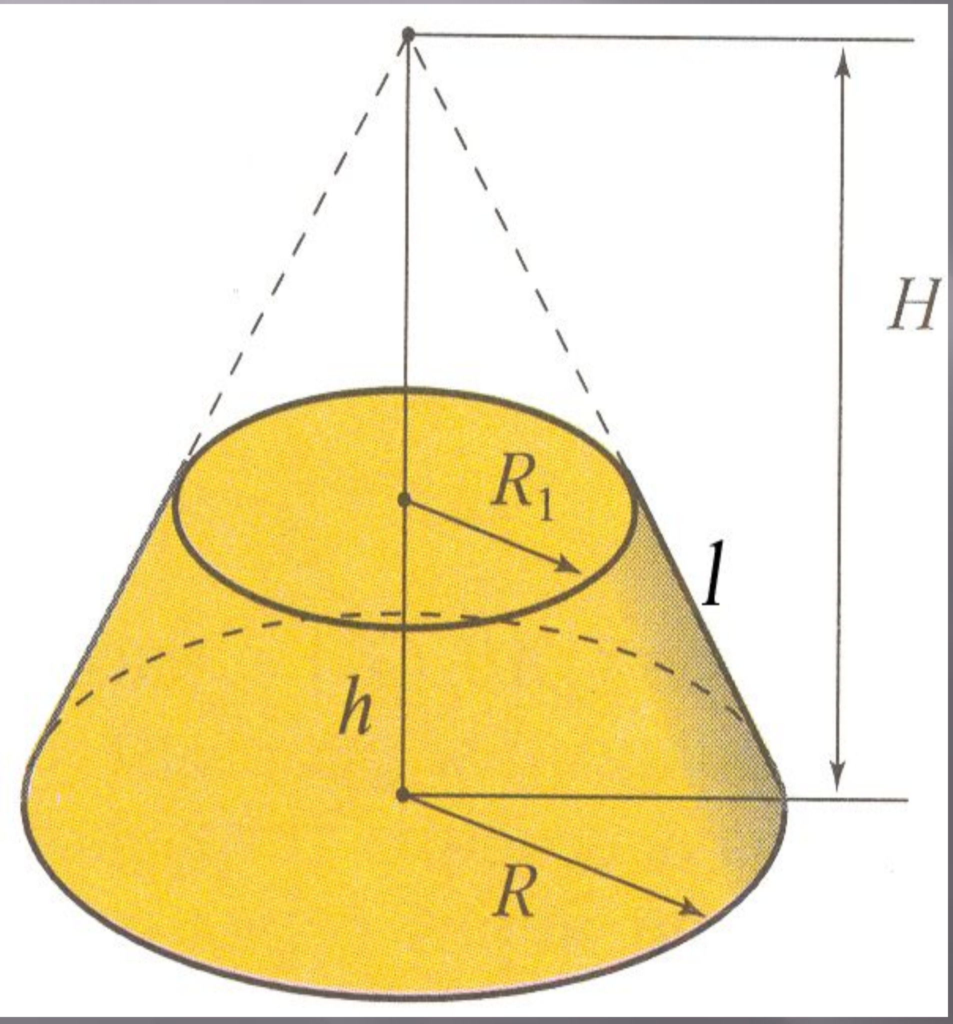
Конус

Если основание конуса представляет собой многоугольник, конус становится пирамидой; таким образом, пирамиды являются подмножеством конусов. Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется *образующей конуса*. Объединение образующих конуса называется *образующей* (или *боковой*) *поверхностью конуса*. Образующая поверхность конуса является конической поверхностью. Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется *усечённым конусом*. Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.





Усеченный прямой конус



- Формулы:

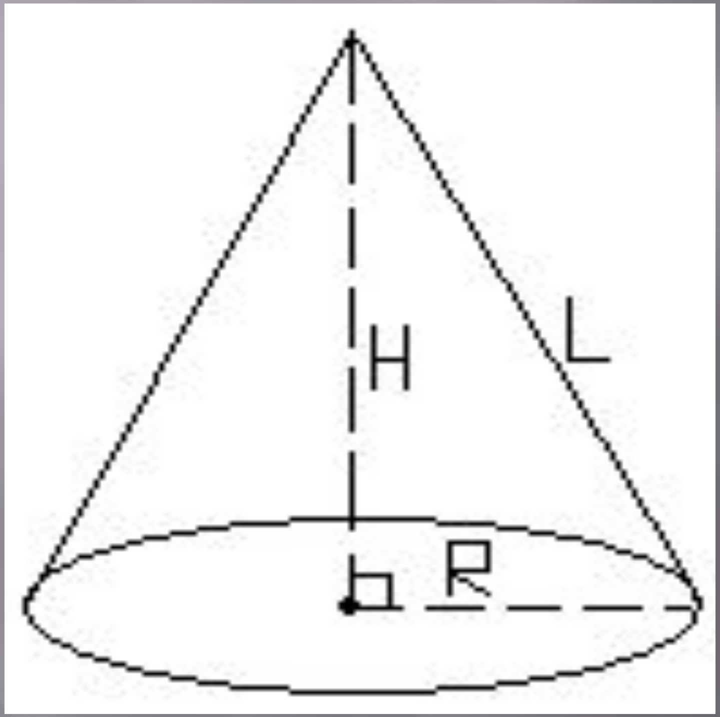
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + RR_1 + R_1^2)$$

$$S_{бок.пов.} = \pi(R + R_1)l$$

$$S_{полн.пов.} = \pi(R + R_1)l + \pi R^2 + \pi r^2$$

Здесь *h* – высота усеченного конуса*; R и R1* – радиусы его верхнего и нижнего оснований; *l* – его образующая

Основные формулы



Если R – радиус основания, H - высота, L– образующая конуса, то

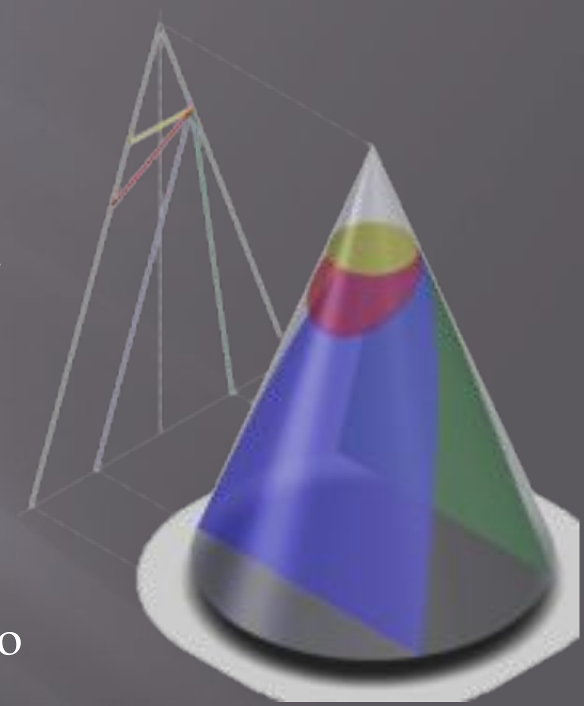
$V=1/3\pi R^2H$

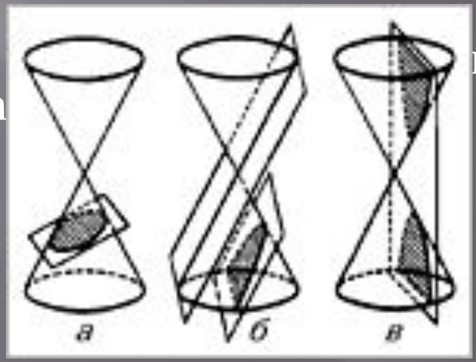
$S_{бок}=\pi RL$

$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}=\pi RL+ +\pi R^2=\pi R(L+R)$

Коника

- Конические сечения: окружность, эллипс, парабола (плоскость сечения параллельна образующей конуса), гипербола.
- *Коническое сечение* или *коника* есть пересечение плоскости с круговым конусом.
- Существует три главных типа конических сечений: *эллипс, парабола и гипербола*, кроме того существуют вырожденные сечения: точка, прямая и пара прямых, а также окружность, которую можно рассматривать как частный случай эллипса.
- Конические сечения могут быть получены как пересечение с плоскостью двустороннего конуса
- $a^2z^2 = x^2 +$ … теме координа…



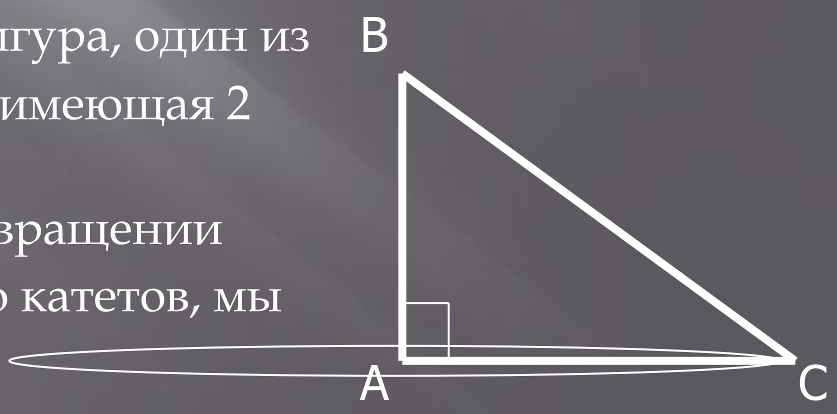


Прямоугольный треугольник

- *Понятие треугольника*

Треугольник - фигура, состоящая из 3х точек: не лежащих на одной прямой, и 3х отрезков, попарно соединяющих эти точки.

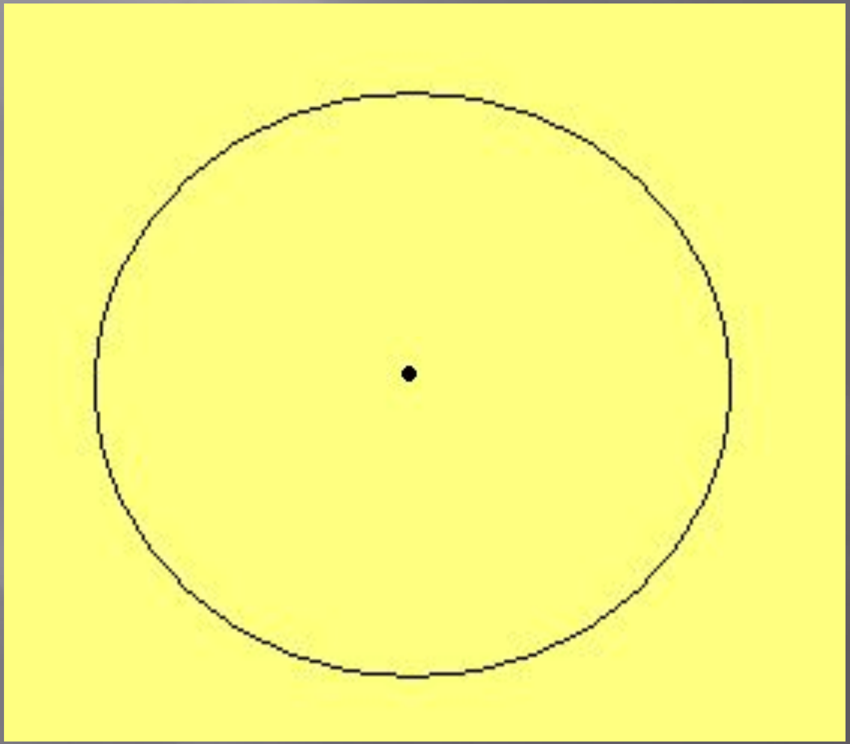
Прямоугольный треугольник – фигура, один из углов которого равен 90 градусов, имеющая 2 катета и гипотенузу (АВ, АС, ВС, А).При вращении треугольника вокруг одного из его катетов, мы получим конус.



Окружность

Окружность – это множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки. *Сфера* может быть получена вращением полуокружности вокруг ее

диаметра.

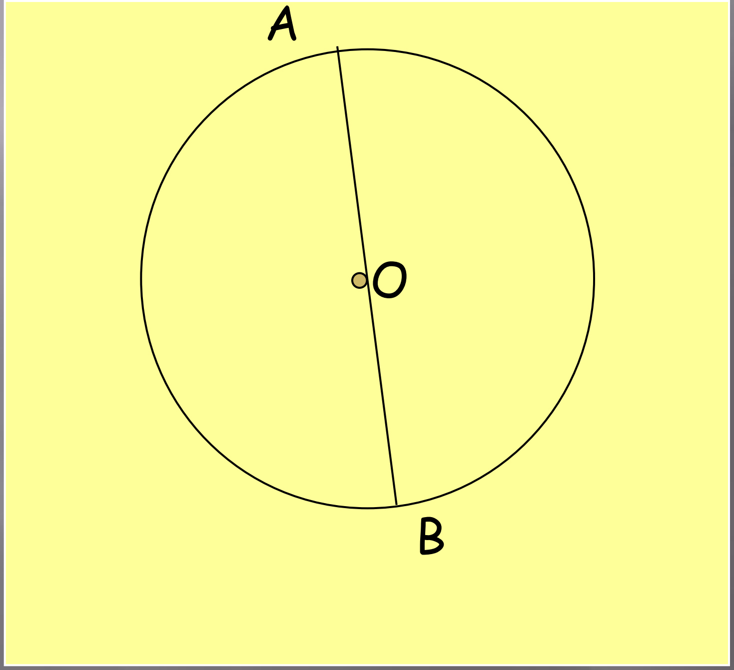


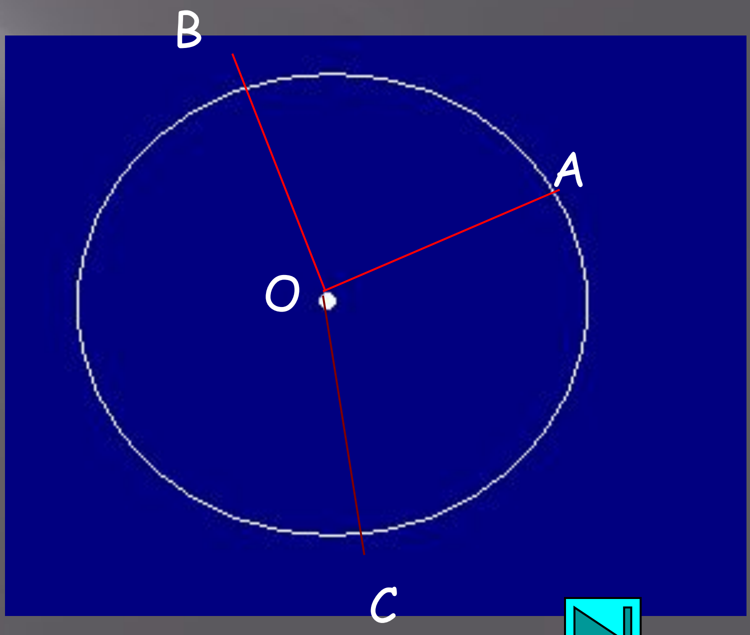
Радиус и диаметр окружности

- *Радиус* - это отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой на ней.
- На рисунке представлены 3 радиуса одной окружности.
- *Диаметр* - это отрезок, соединяющий любые

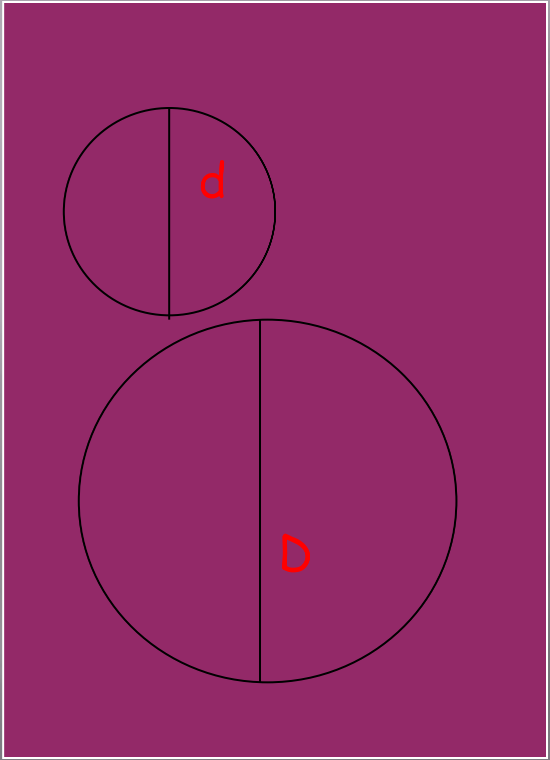
две точки окружности и проходящий через ее центр.

D=2R





Учеными было установлено, что длина окружности прямо пропорционально длине ее диаметра. Поэтому для всех окружностей отношение длины окружности к длине ее диаметра является одним и тем же числом. Это число обозначили – П (читается «пи»)



- *Если C и C1– длины окружностей, а d, D – диаметры, то*

$$\frac{C}{d} = \frac{C1}{D} = П$$

Формулы для нахождения длины окружности

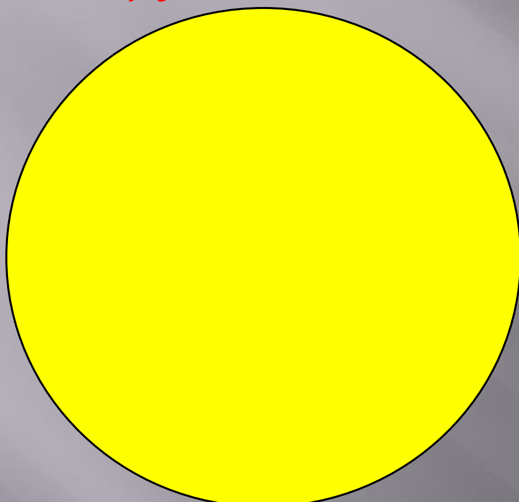
C = 2пR

где C – длина окружности,
R-радиус ее, п = 3,14

- *C = пD*
- *где C – длина окружности,*
- *D –диаметр ее, п = 3,14*

Круг

- *Круг* – это часть плоскости, ограниченная окружностью

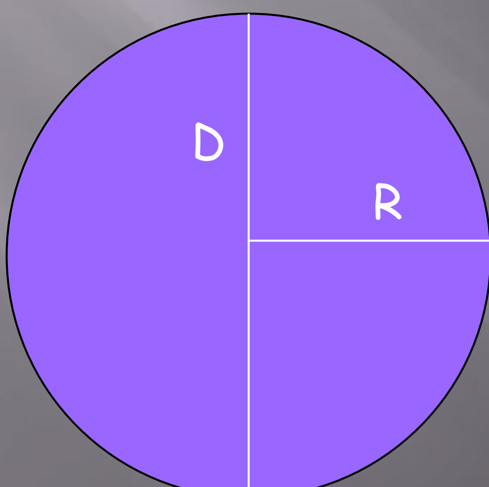


У круга есть: радиус, диаметр

D – диаметр круга, R – радиус круга

Формула для нахождения площади круга

$$S = ПR^2$$

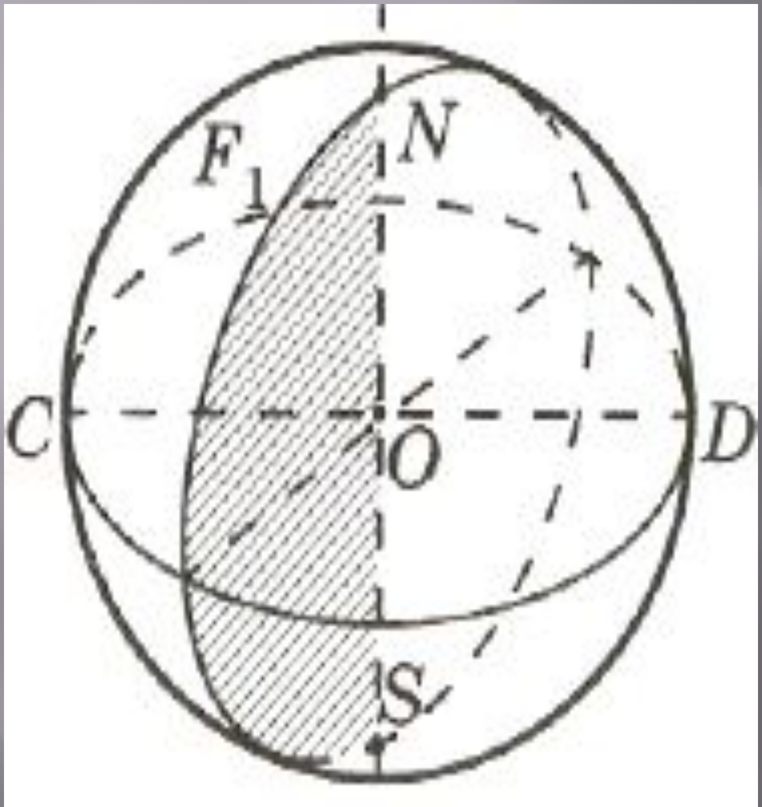


S – площадь круга

R – радиус круга

П = 3,14

Шар – тело вращения

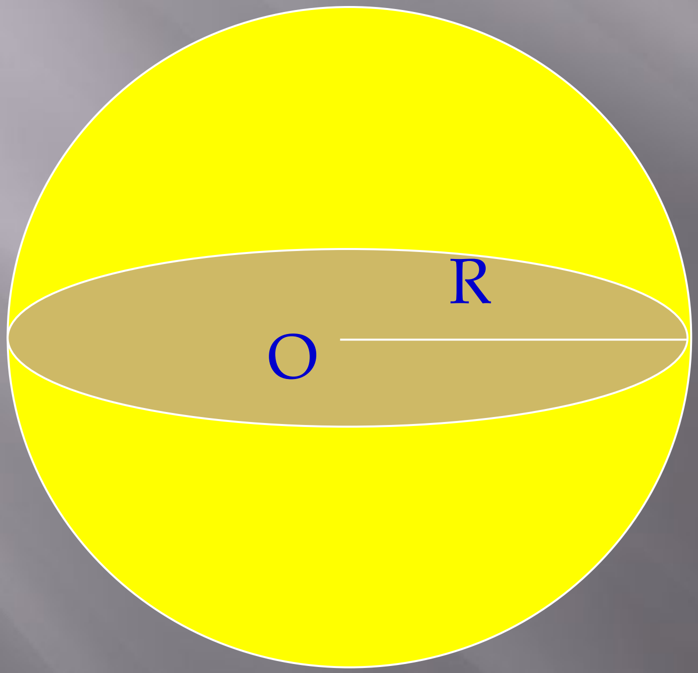


- OS, ON, OC, OD – радиусы;
- NS, CD – диаметры шара;
- C и D, N и S – диаметрально противоположные точки

Шар

Теорема:

Объём шара радиуса R равен $\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

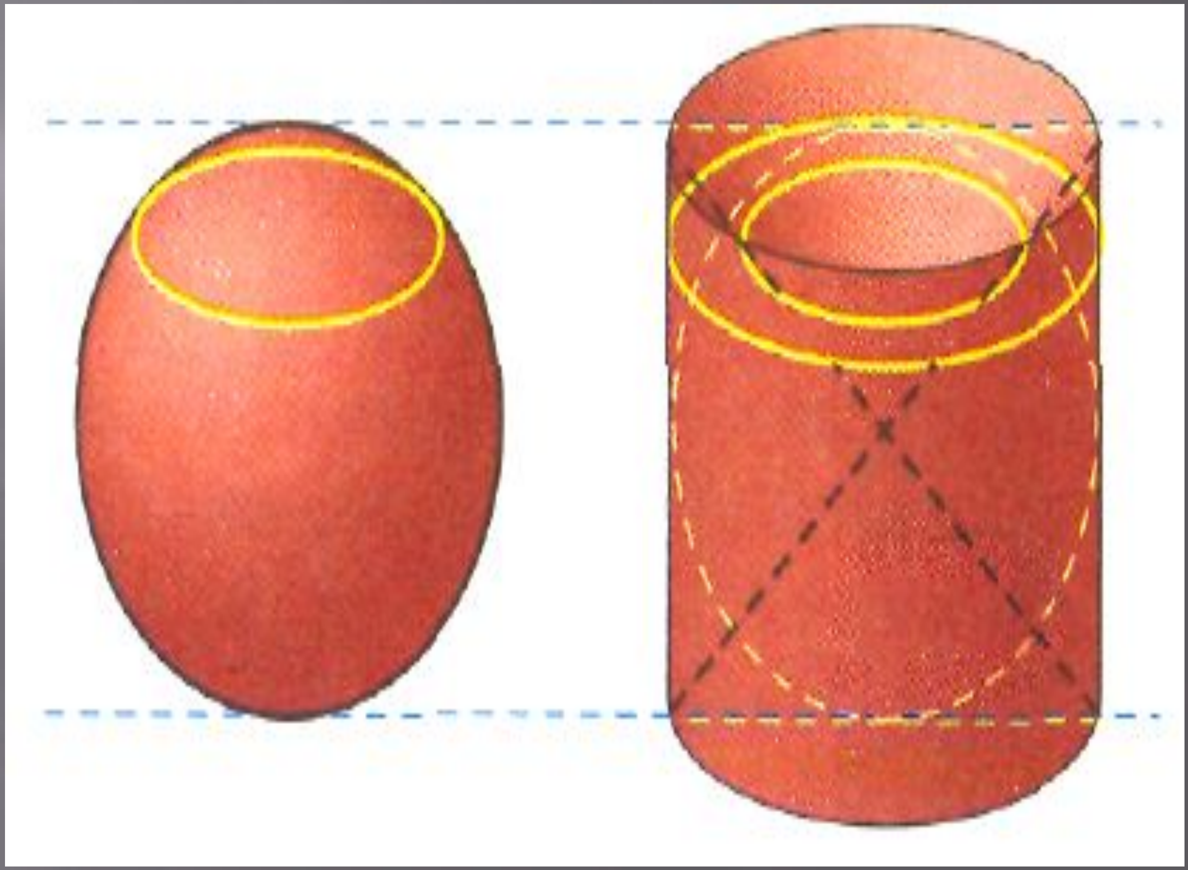


Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O

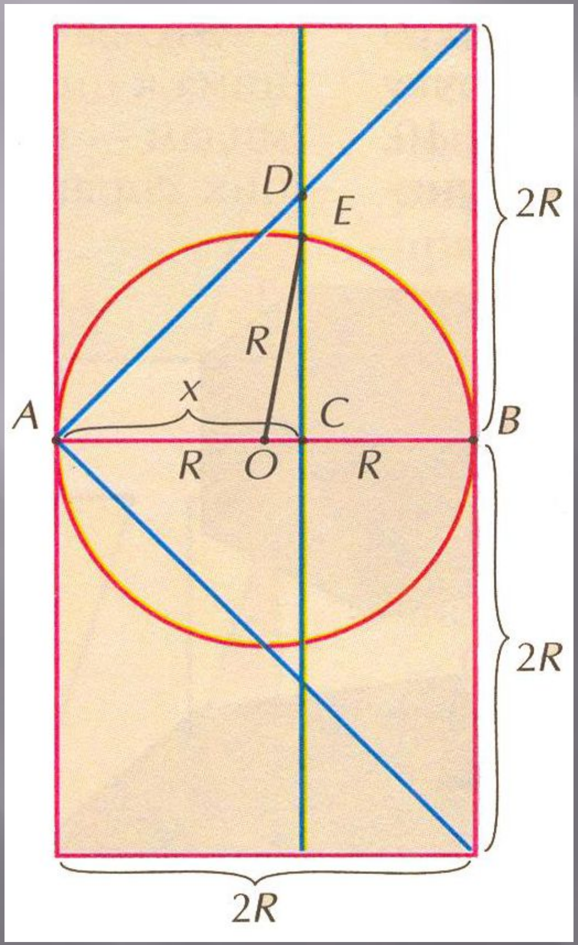
Объем шара

Архимед считал, что объем шара в 1,5 раза меньше объема описанного около него цилиндра:

$V_ш=4/3\pi R^3$.



Как Архимед находил объем шара



- Площади сечений:

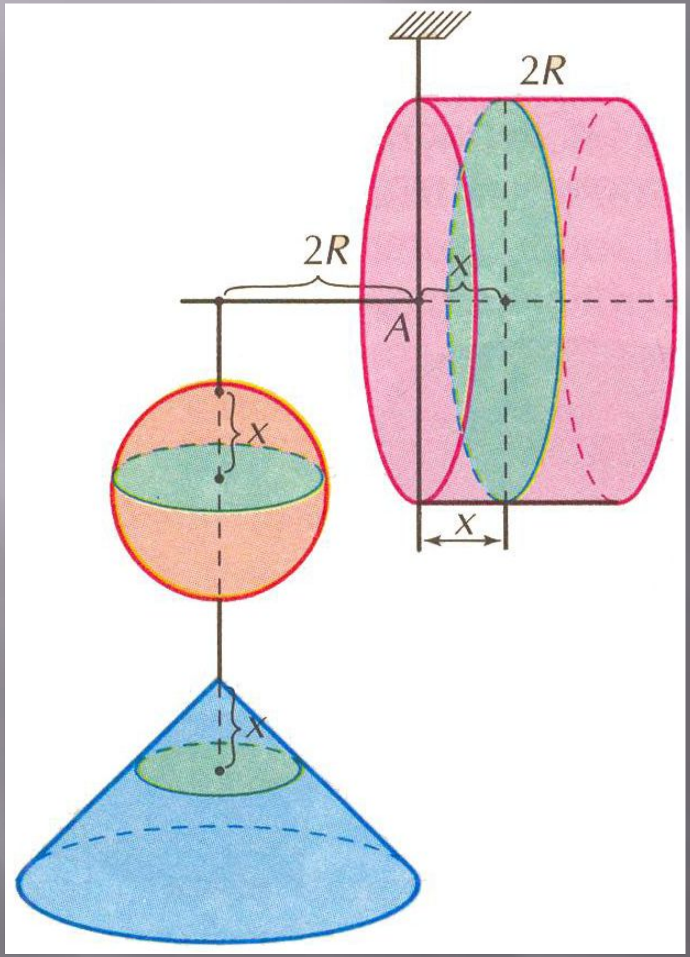
  $S_ц$, $S_ш$, $S_к$.

$S_ц=4\pi R^2$;

$S_ш=\pi[CE]^2$, где $[CE]^2=[EO]^2-[OC]^2=R^2-$

$-(x-R)^2=2Rx-x^2$;

$S_к=\pi[CD]^2=\pi x^2$



$$R \times V_ц = 2R(V_ш + V_к)$$

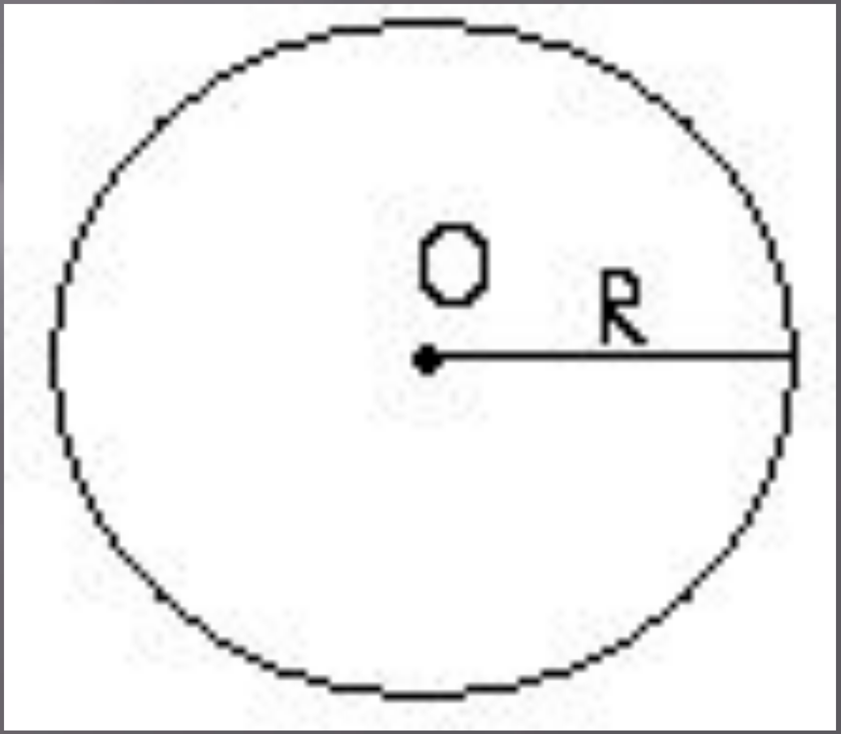
$$V_ш = \frac{V_ц}{2} - V_к$$

Основные формулы

R – радиус шара

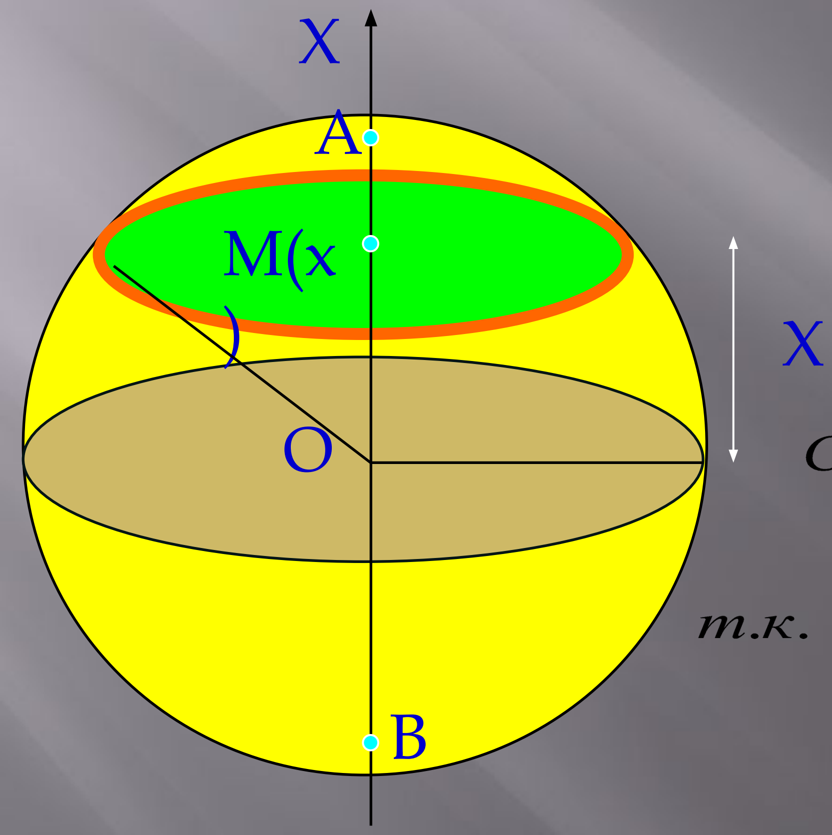
Vшара=4/3πR^3

Sсферы=4πR^2



Выберем ось ОХ произвольным образом

R – радиус шара



S(x) – сечение шара плоскостью, перпендикулярной к Оси ОХ и проходящей через т. М(х) этой оно, есть круг с центром в т. М

Выразим S(x) через X и R

Из прямоугольного ОМС:

$$CM = r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$т.к.\ S(x) = \pi r^2,\ то\ S(x) = \pi (R^2 - x^2)$$

Сфера

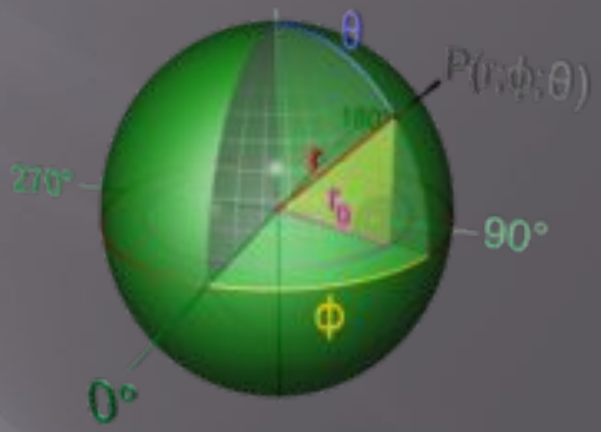
- Двумерная сфера
- ***Сфера*** — замкнутая поверхность
  геометрическое место точек в
  пространстве, равноудалённых от данной точки,
  называемой центром сферы. **Двумерная сфера (в трёхмерном пространстве).**

Уравнение сферы

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты центра сферы,

- R — её радиус. Сфера является поверхностью шара. *Площадь поверхности сферы 4πR2.*
- Окружность, лежащая на сфере, центр которой совпадает с центром сферы, называется **большим кругом** сферы. Большие круги являются геодезическими линиями на сфере.



n-мерная сфера. **Гиперсфера**

- В общем случае уравнение *n-1-мерной сферы* (в евклидовом пространстве) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 = r^2$$

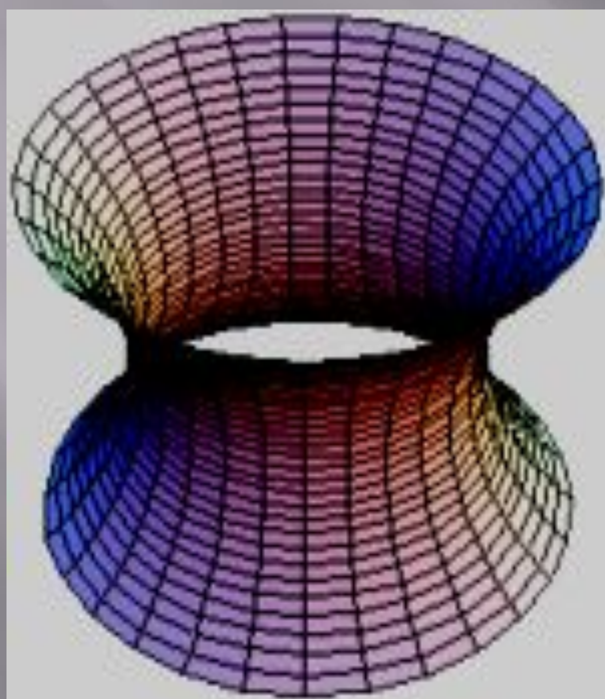
, где *(a1,…,an)* — центр сферы, а *r* — радиус.

- Пересечение двух *n*-мерных сфер — *n-1*-мерная сфера, лежащая на радикальной гиперплоскости этих сфер.
- В *n*-мерном пространстве могут попарно касаться друг друга (в разных точках) не более *n*+2 *n-1*-мерных сфер.
- *n*-мерная инверсия переводит *n-1*-мерную сферу в *n-1*-мерную сферу или гиперплоскость.

Катеноид

Катеноид — поверхность, образуемая вращением цепной линии

вокруг оси *OX*.



$$y = a \operatorname{ch} x$$