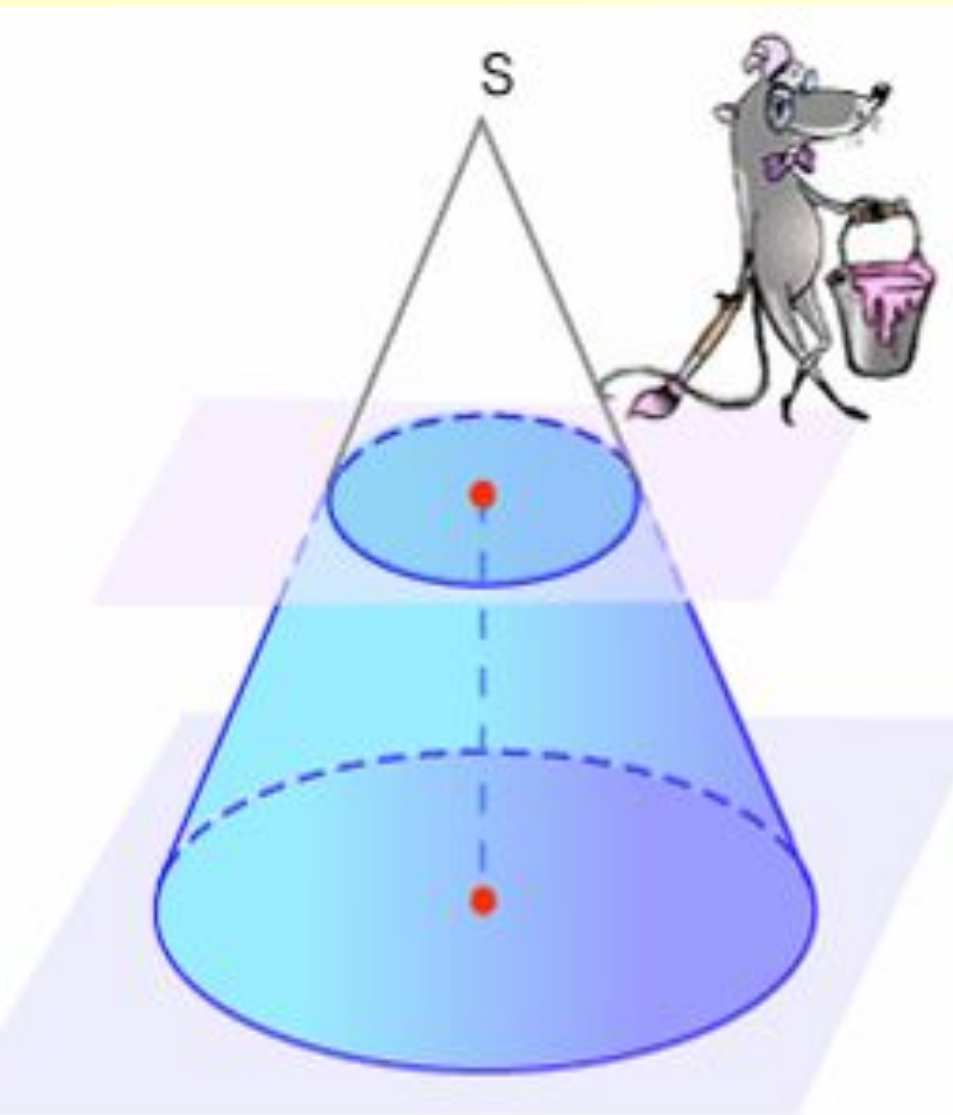
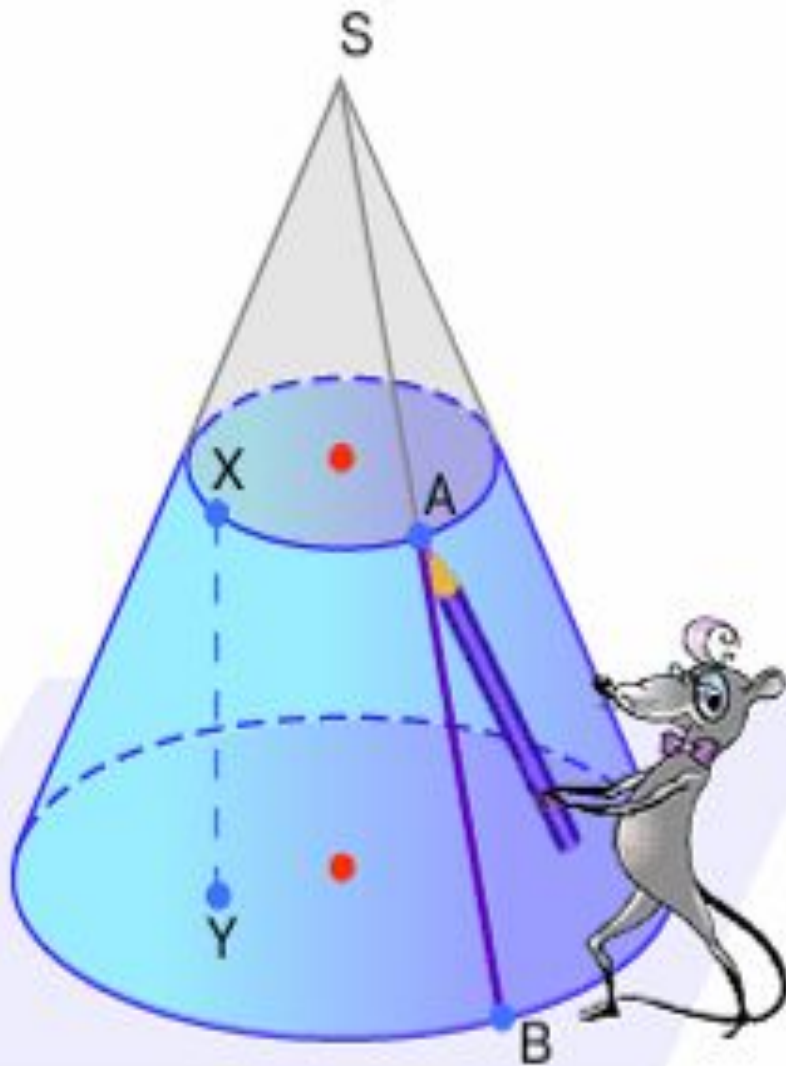


**Объём
Усеченного
конуса.**





Усеченным конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

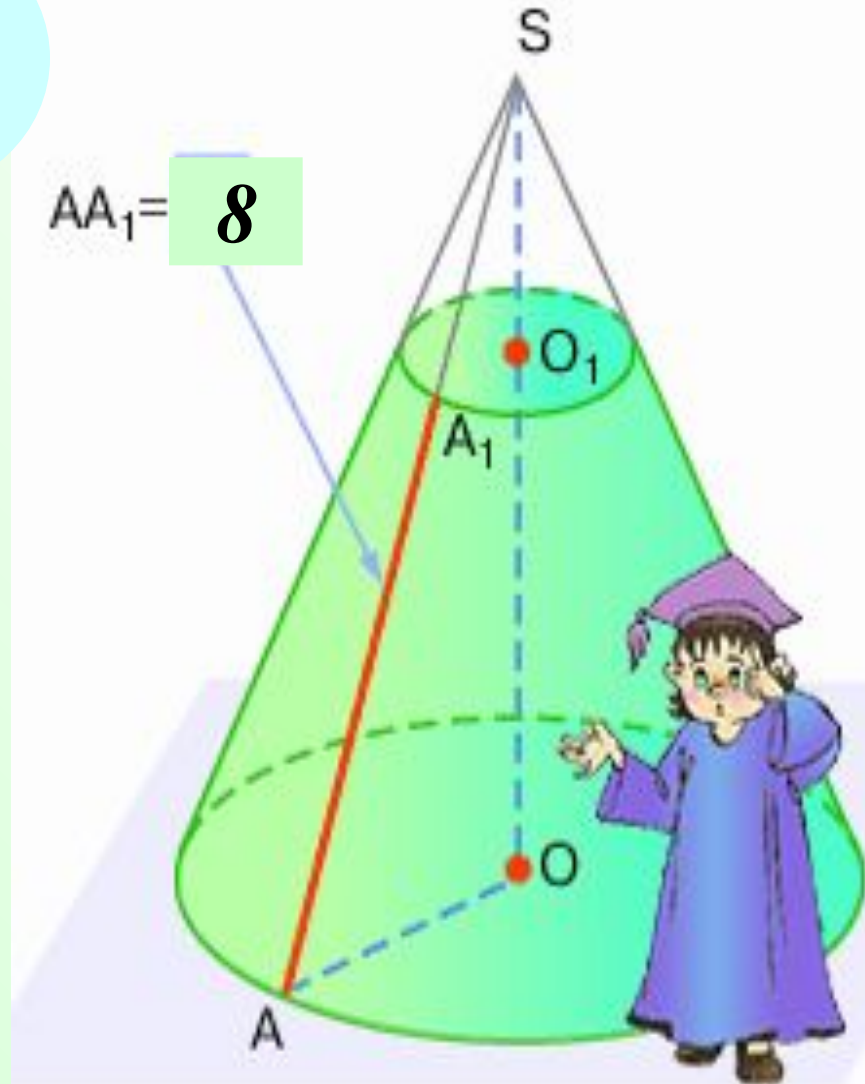


Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

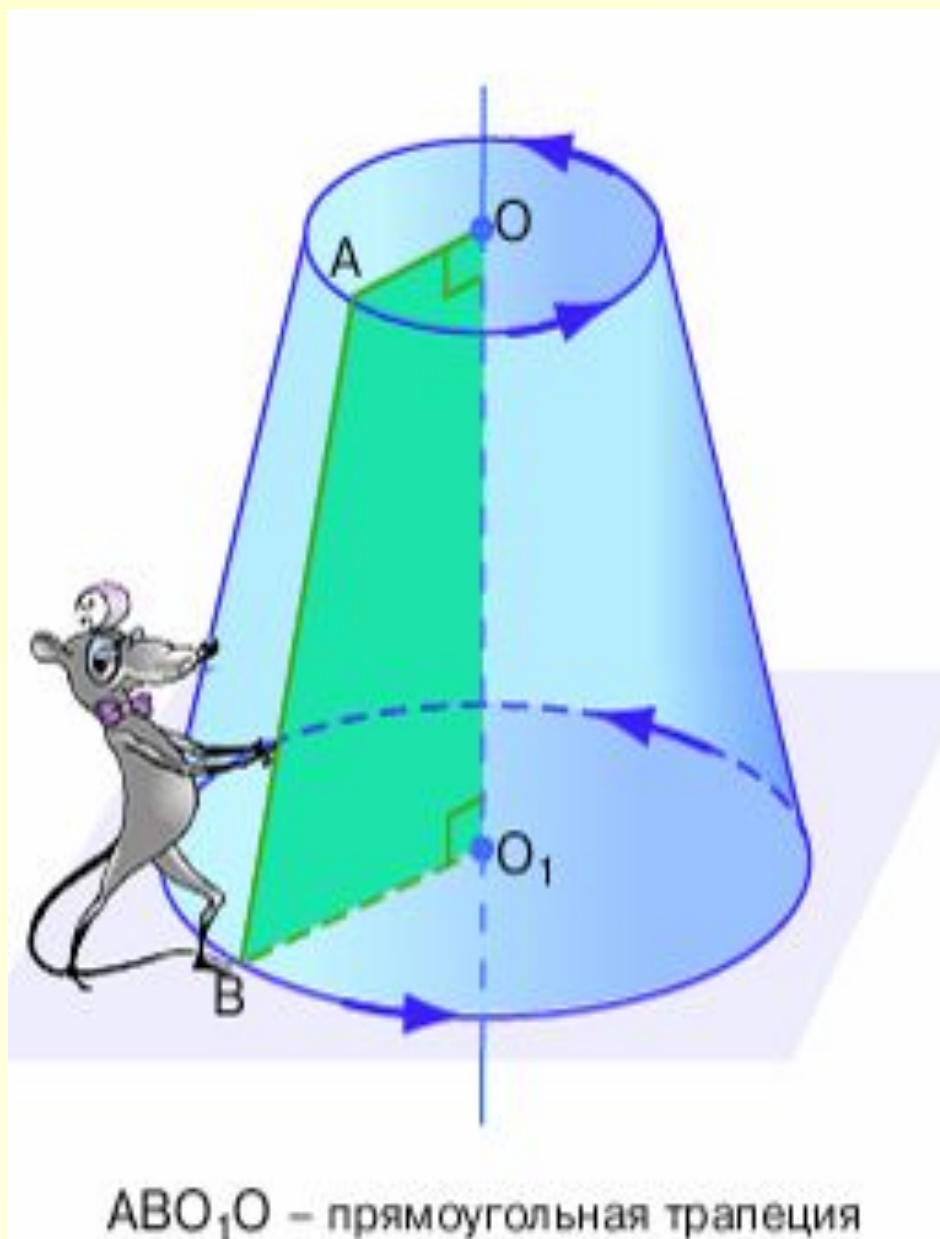
Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?



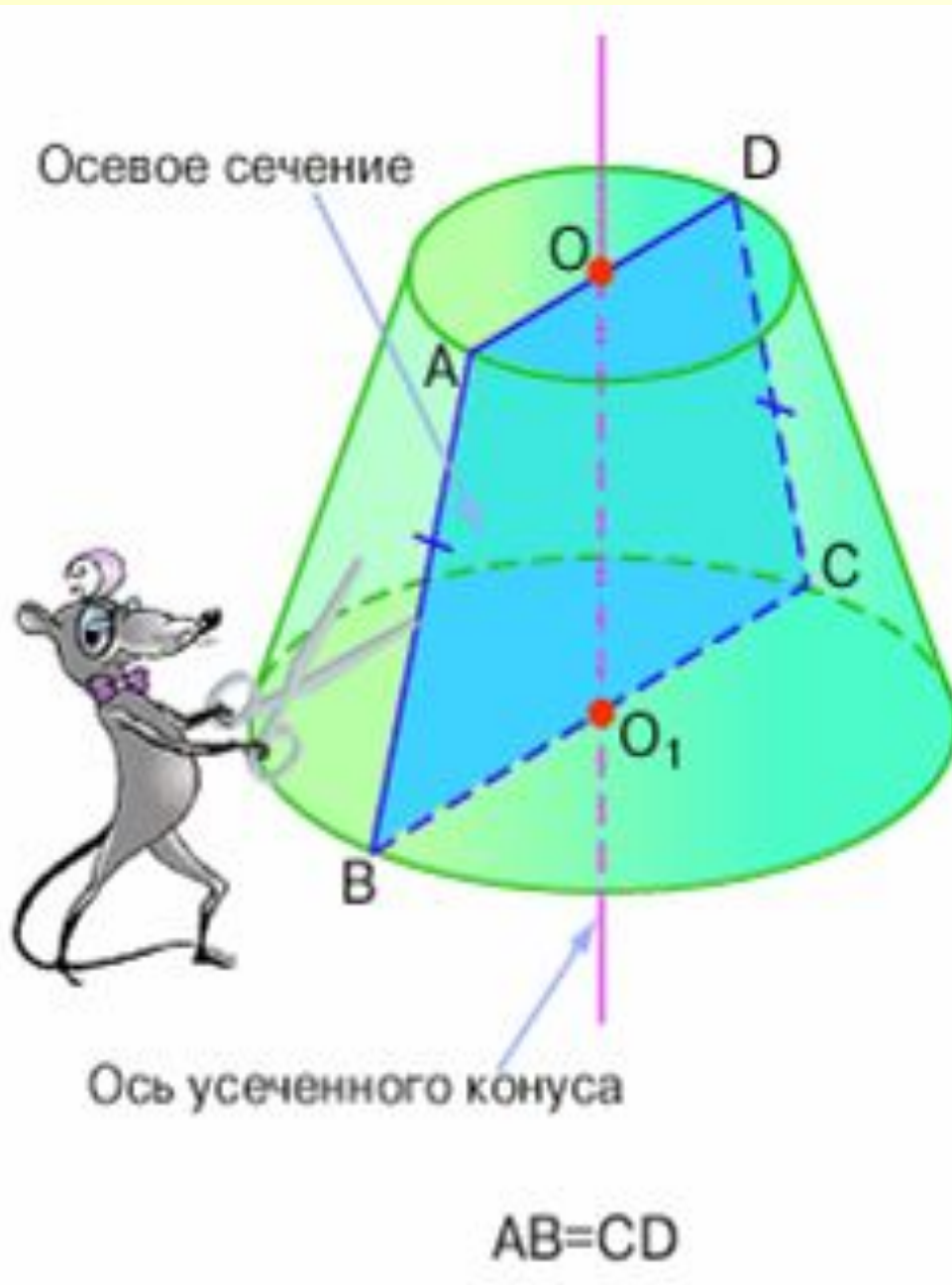
$$SO=9$$

$$SO_1=3$$

$$SA=12$$



**Усеченный конус
можно
рассматривать как
тело, полученное при
вращении
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основанию.**

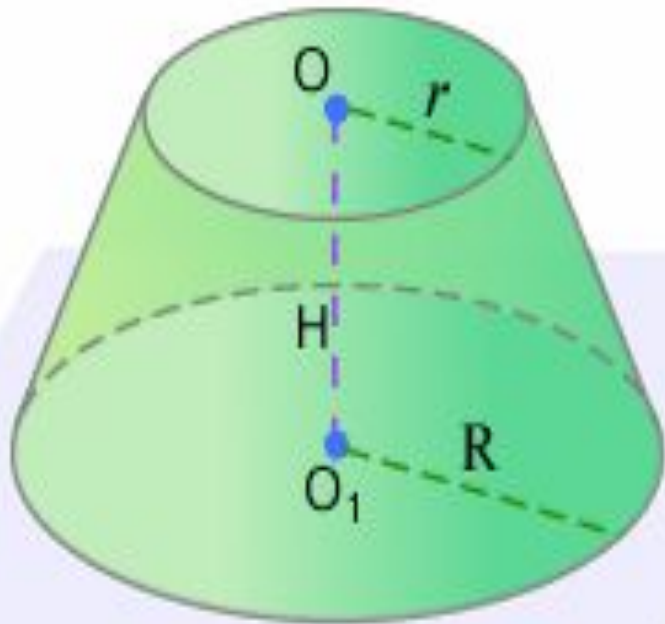


Прямая, соединяющая центры оснований, называется **осью** усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется **осевым**. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.

Формула объема усеченного конуса.

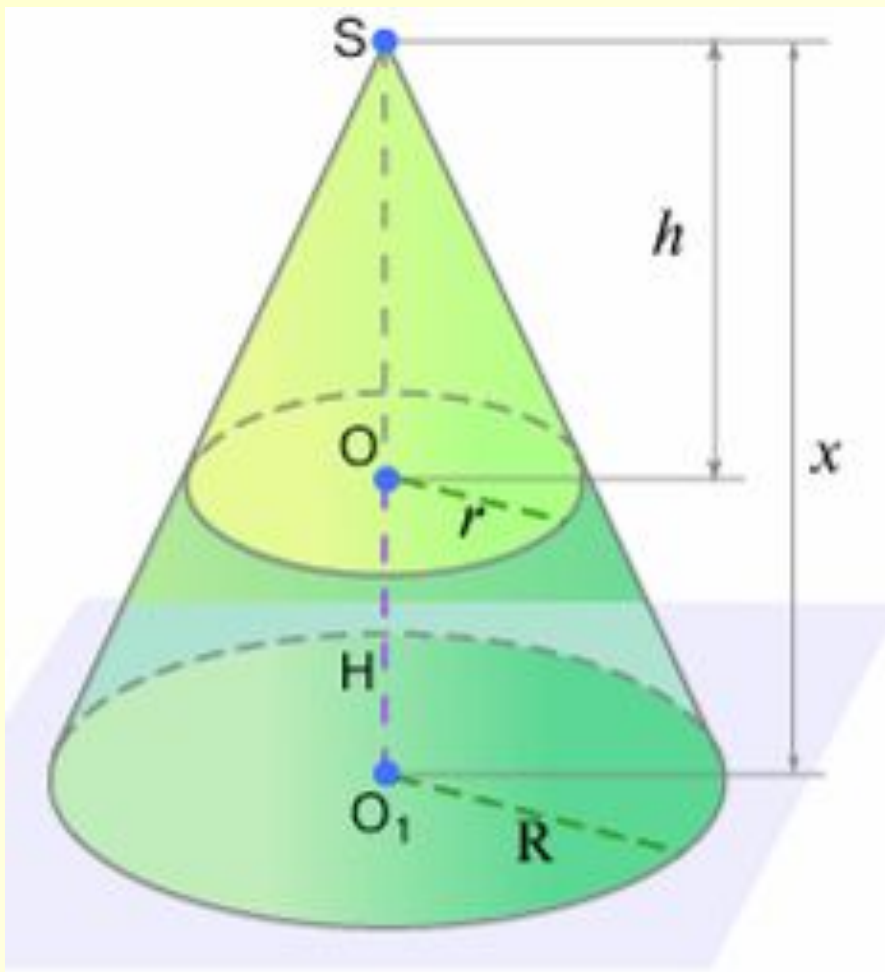


- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.



$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

Доказательство:

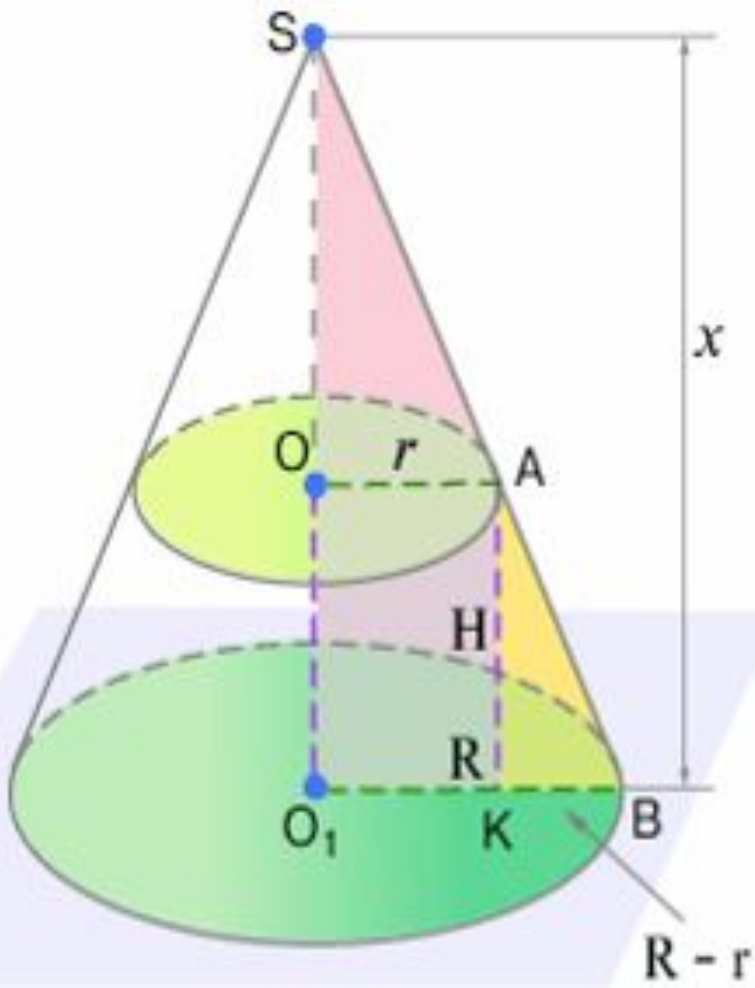


Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.

$$V_{\text{усеч.кон}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 x - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Доказательство:

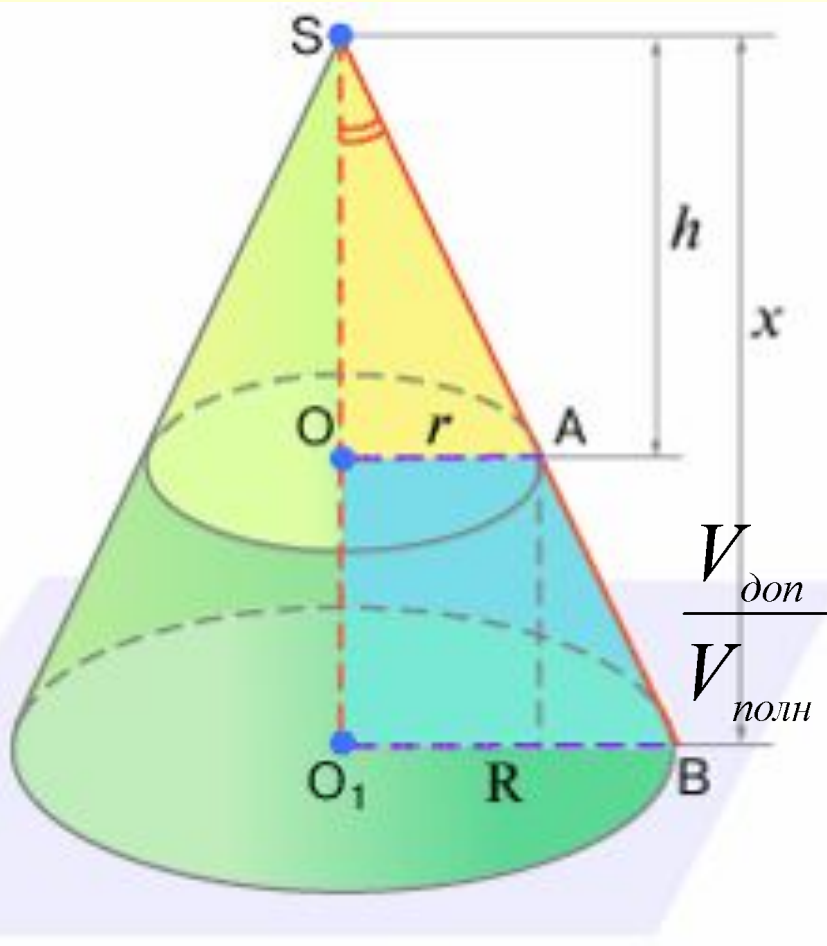
Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.



$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R - r}$$
$$x = H \frac{R}{R - r}$$

Доказательство:



$$\triangle SOA \sim \triangle SO_1B$$

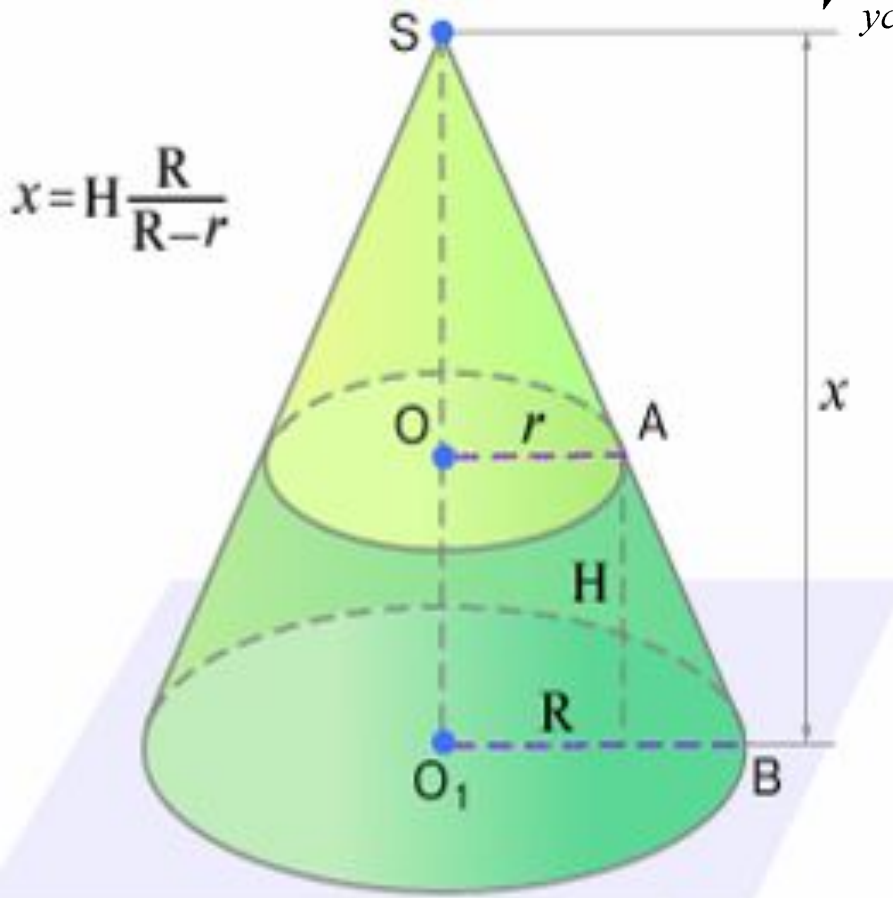
$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{\text{дон}}}{V_{\text{полн}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi r^2 h}{\frac{1}{3} \pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.

Доказательство:

Вычтем из объема большого конуса объем
малого конуса.



$$V_{\text{усеч}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = V_{\text{полн}} - \frac{r^3}{R^3} V_{\text{полн}} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 x \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) =$$

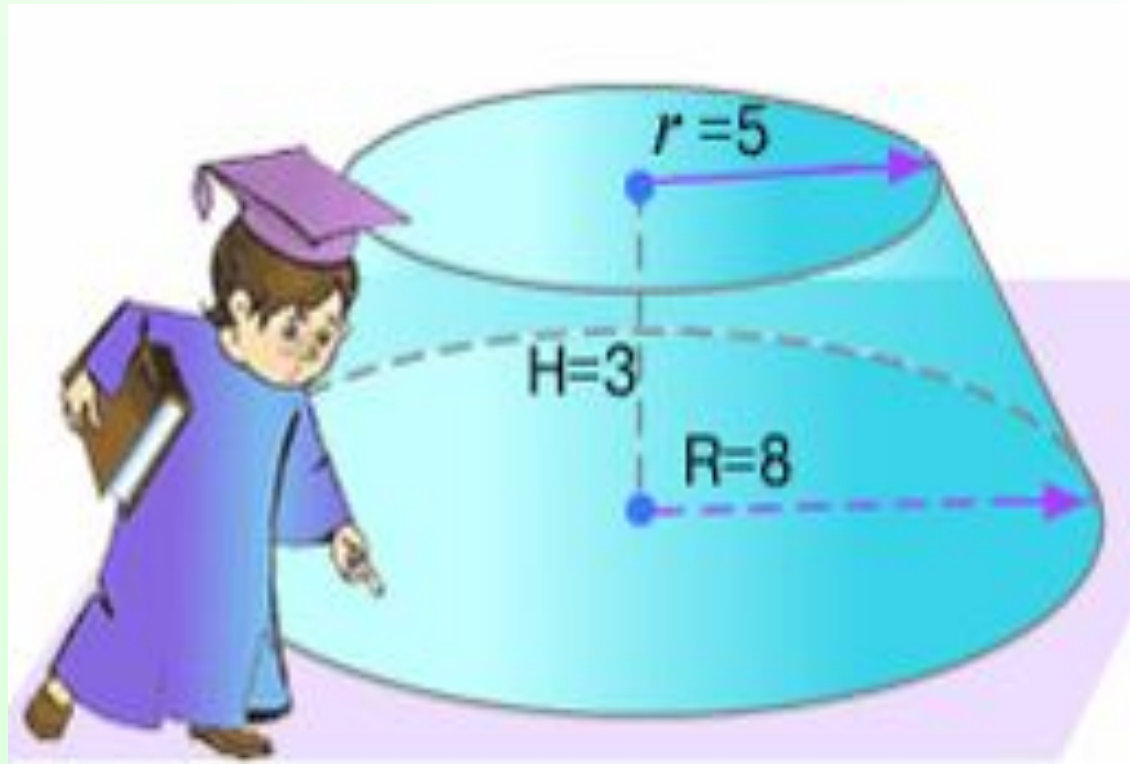
$$= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 H R}{R - r} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H \frac{(R - r)(R^2 + Rr + r^2)}{R - r} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

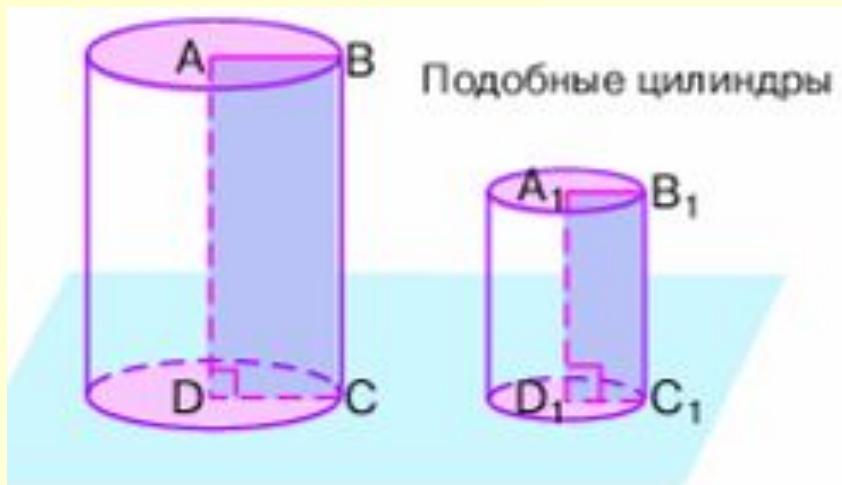


**Найдите объем
усеченного
конуса, если
известны его
высота и радиусы
оснований.**



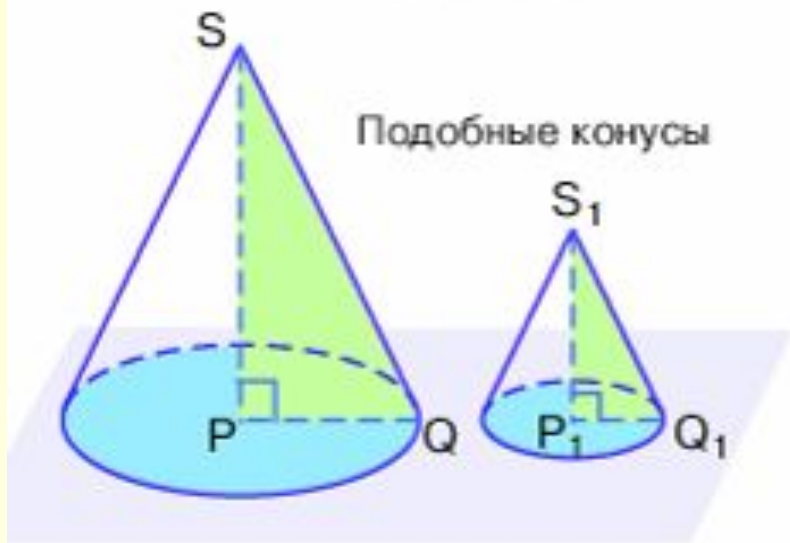
$$V_{\text{усеч.}} = 149\pi$$

Подобные цилиндры и конусы.



Подобные цилиндры

$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$



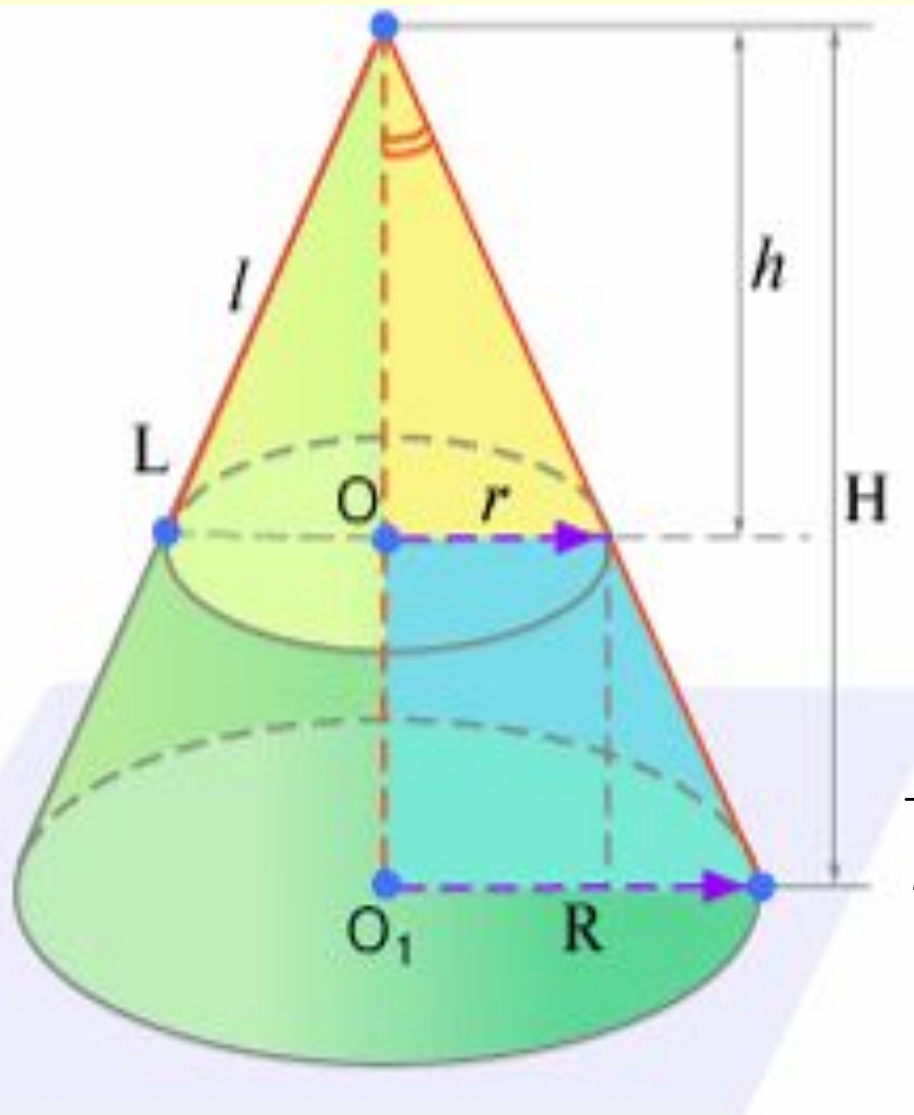
Подобные конусы

$$\triangle SPQ \sim \triangle S_1P_1Q_1$$



- Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.

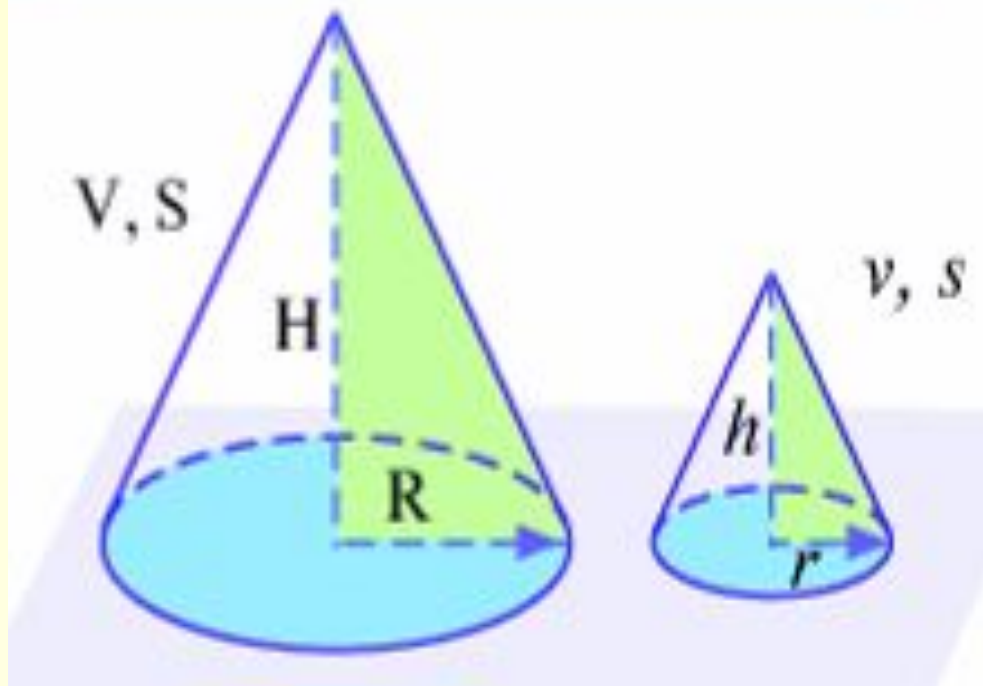
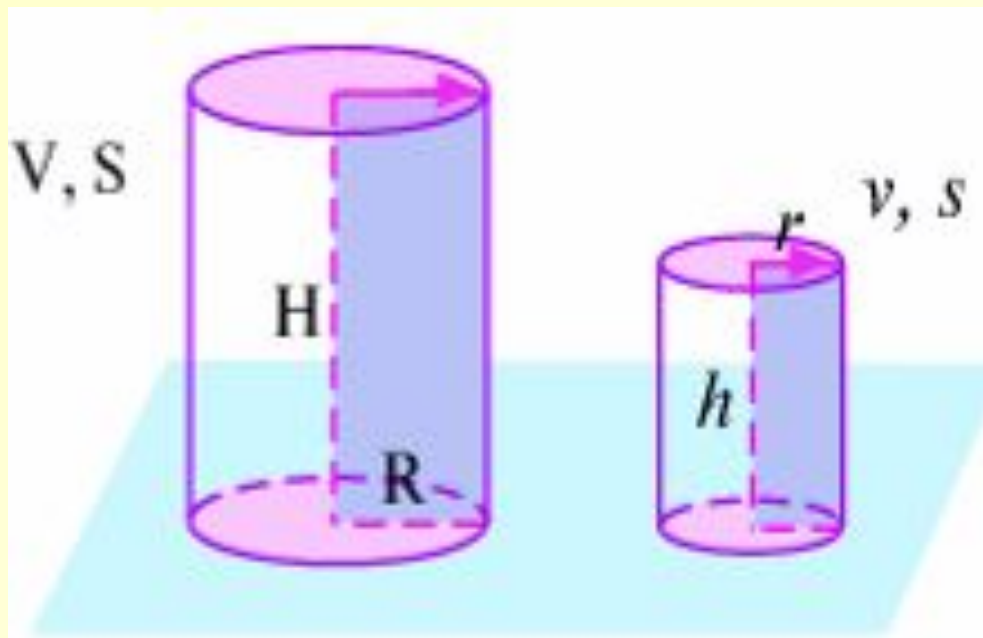
Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.



$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

$$\frac{V_{\text{доп.}}}{V_{\text{полн.}}} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{\text{бок.доп}}}{S_{\text{бок.полн}}} = \frac{2\pi r l}{2\pi R L} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$



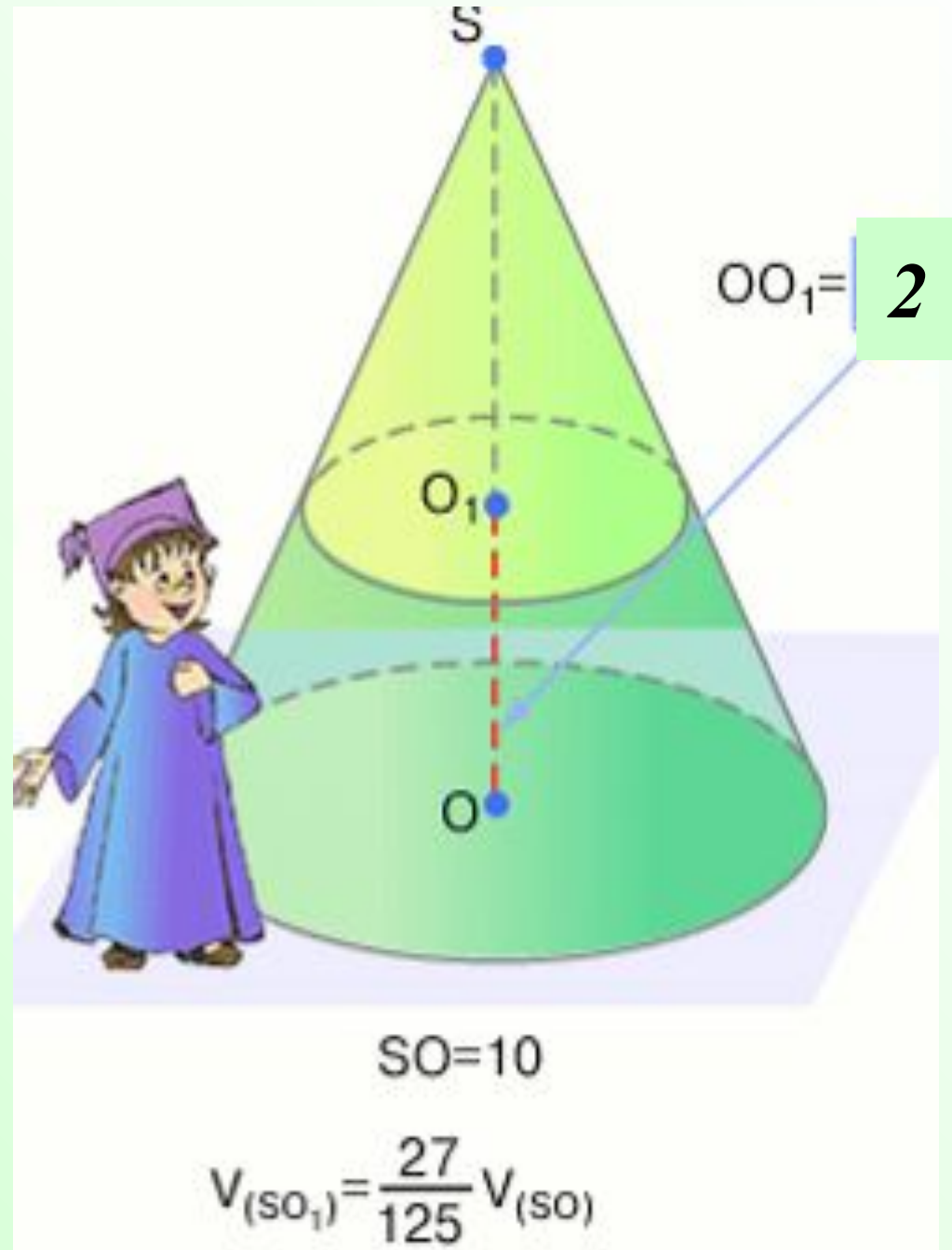
Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

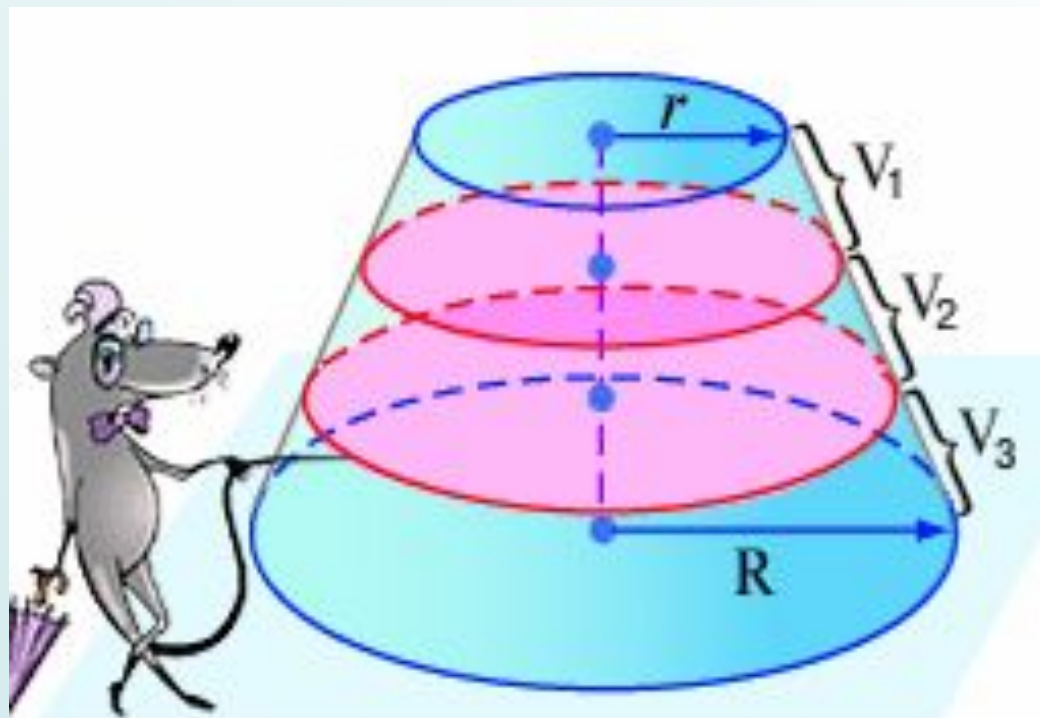


В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?



Радиусы оснований
усеченного конуса
относятся как 2:3.
Высота конуса
разделена на три
равные части, и
через точки
деления проведены
плоскости,
параллельные
основаниям.
Найти, в каком
отношении
разделился объем
усеченного конуса.

Задача.



Дано: $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

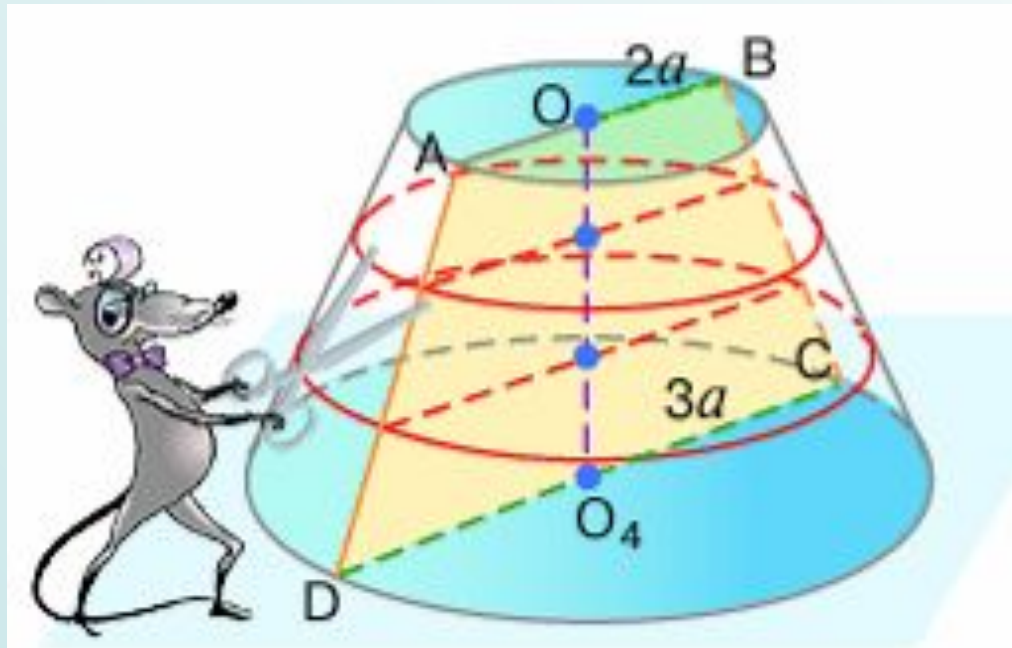
H разделена на 3 части

V_1, V_2, V_3 – объемы слоев

Найти: $V_1 : V_2 : V_3$

Решение:

Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как $2a$ и $3a$ и рассмотрим осевое сечение конуса.

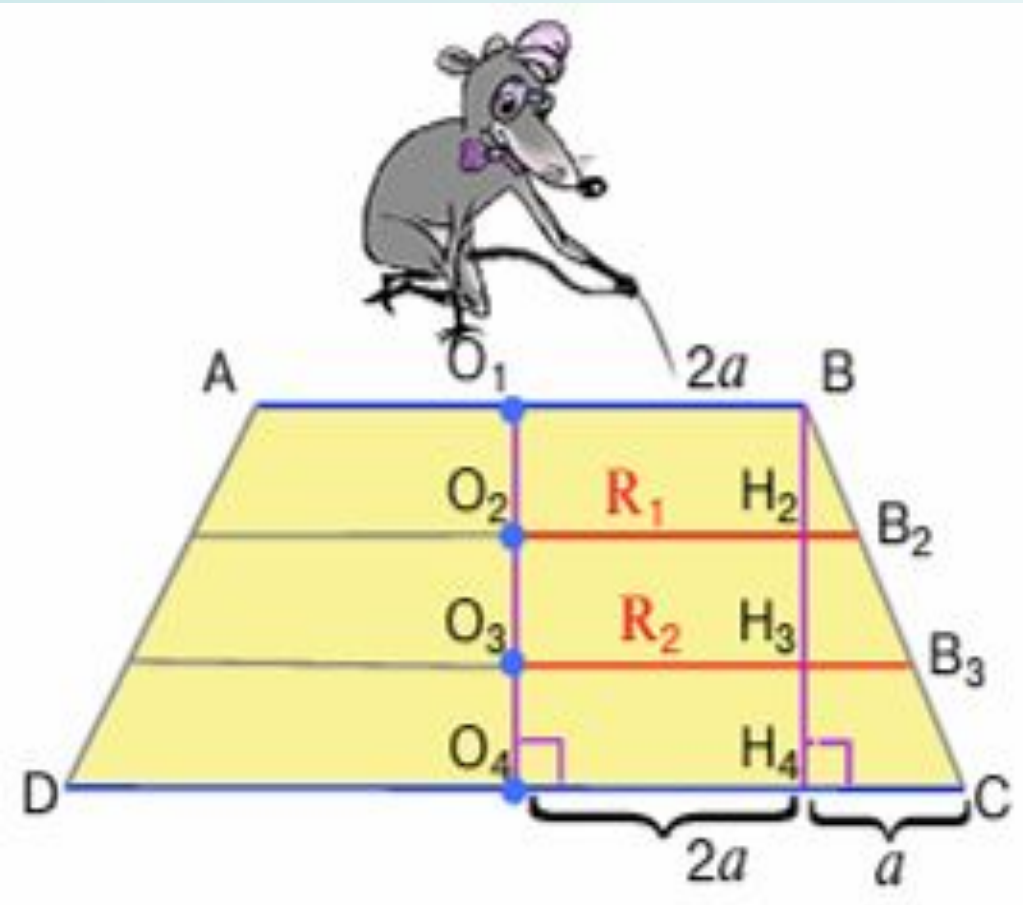


$$r : R = 2 : 3 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} r &= 2a \\ R &= 3a \end{aligned}$$

ABCD – осевое сечение

Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.



$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2B_2 = \frac{1}{3}CH_4 = \frac{a}{3}$$

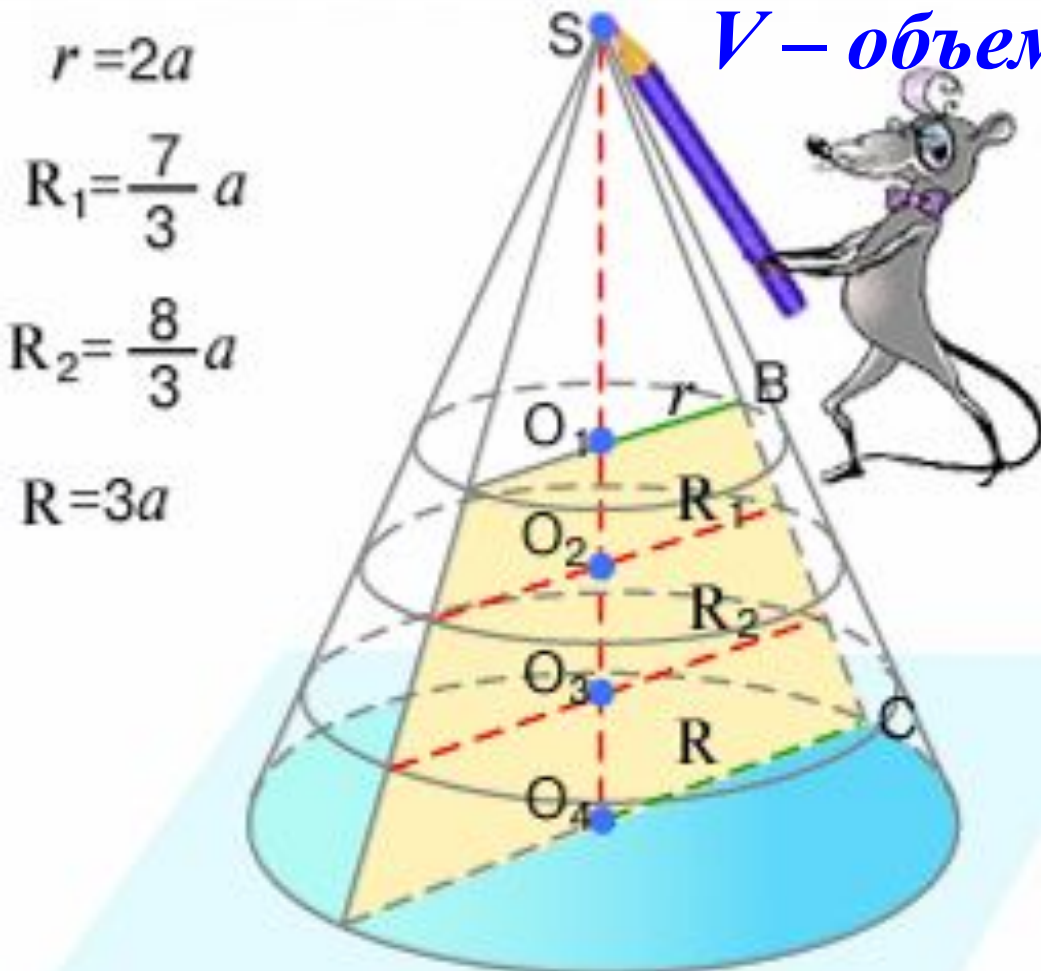
$$H_3B_3 = \frac{2}{3}CH_4 = \frac{2a}{3}$$

$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$

Решение:

2) Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.



V – объем наибольшего конуса

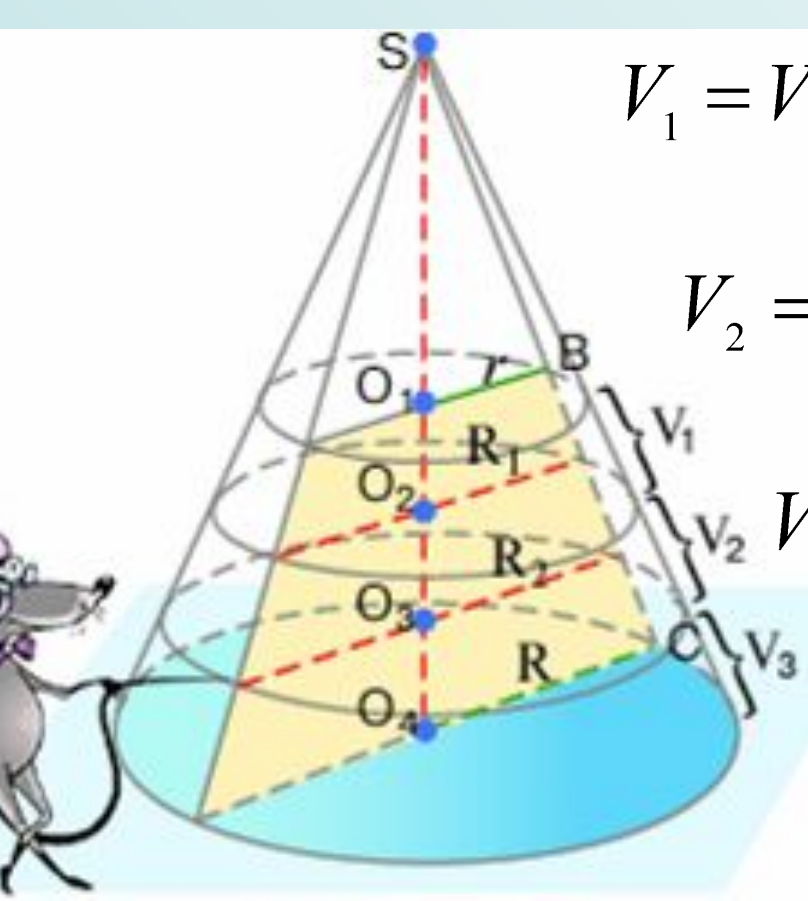
$$\frac{V_{(SO_1)}}{V} = \frac{(2a)^3}{(3a)^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{6^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_2)}}{V} = \frac{\left(\frac{7}{3}a\right)^3}{(3a)^3} = \frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V} = \frac{\left(\frac{8}{3}a\right)^3}{(3a)^3} = \frac{8^3}{9^3}$$

Решение:

3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.



$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3} V = \frac{127}{9^3} V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3} V = \frac{169}{9^3} V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3} V = \frac{217}{9^3} V$$

Ответ:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$$