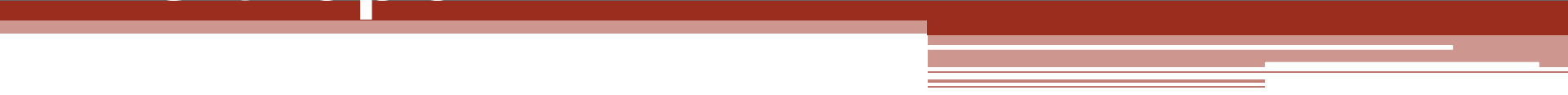


# Скалярное произведение векторов



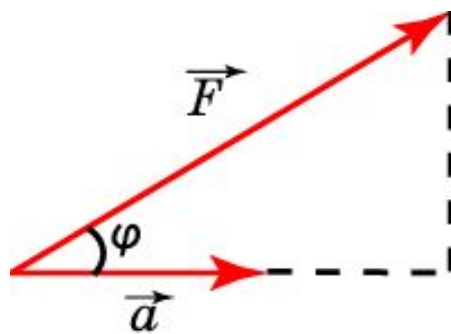
**Скалярным произведением** двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

$$a_1 \cdot a_2 = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \cos \varphi.$$

Для скалярного произведения векторов имеет место формула  $a_1 \cdot a_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ , где  $a_1(x_1, y_1)$ ,  $a_2(x_2, y_2)$ .

# Физический смысл

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу  $A$ , производимую постоянной силой  $F$  при перемещении тела на вектор  $a$ , составляющий с направлением силы угол  $\varphi$ , а именно, имеет место следующая формула:  $A = F \cdot a = |F| \cdot |a| \cdot \cos \varphi$ .



## Пример 1

Дан вектор  $m(a, b)$ . Найдите координаты перпендикулярного к нему вектора.

**Решение:** Для искомого вектора  $n(x, y)$  должно выполняться равенство  $ax + by = 0$ . Например, этому равенству удовлетворяют  $x = b, y = -a$ . Следовательно, искомый вектор имеет координаты  $n(-b, a)$ .

## Пример 2

Найдите угол  $A$  треугольника с вершинами

$$A(-1, \sqrt{3}), \quad B(1, -\sqrt{3}), \quad C\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right).$$

**Решение:** Воспользуемся определением скалярного

произведения векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ . Имеем

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos A$ . Вычислим это скалярное произведение через координаты векторов. Вектор  $\vec{AB}$  имеет координаты

вектор  $\vec{AC}$  имеет координаты  $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ . Следовательно,

скалярное произведение данных векторов равно 3. Их

длины равны соответственно 4 и  $3/2$ . Подставляя эти

данные в формулу скалярного произведения, получим

и, следовательно,  $A = 60^\circ$ .

$$\cos A = \frac{1}{2}$$

# Упражнение 1

Вычислите скалярное произведение двух векторов  $a$  и  $b$ , если  $|a| = 2$ ,  $|b| = 3$ , а угол между ними равен: а)  $45^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $135^\circ$ .

**Ответ:** а)  $3\sqrt{2}$ ; б)  $0$ ; в)  $-3\sqrt{2}$ .

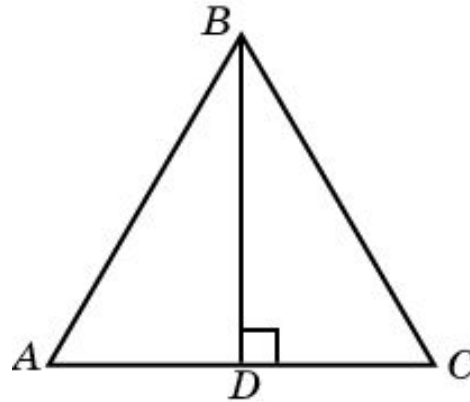
## Упражнение 2

В равностороннем треугольнике  $ABC$  со стороной 1 проведена высота  $BD$ . Вычислите скалярное произведение векторов:

а)  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{CB}$ ;

б)  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ ;

в)  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .



**Ответ:** а)  $-\frac{1}{2}$ ; б) 0; в) 1.

## Упражнение 3

Найдите скалярное произведение векторов  $(a_1, 2)$  и  $(a_2, -1)$ .

Ответ:  $-4$ .



## Упражнение 4

Длины векторов  $a$  и  $b$  равны 1. При каком угле между ними скалярное произведение будет: а) наибольшим; б) наименьшим?

**Ответ:** а)  $\phi = 0^\circ$ ;  
б)  $\phi = 180^\circ$ .

## Упражнение 5

Найдите угол между векторами  $a(1, 2)$  и  $b(1, 0)$ .

Ответ:  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

## Упражнение 6

Какой угол  $\varphi$  образуют единичные векторы  $a$  и  $b$ , если известно, что  $\vec{a} + 2b$  и  $5\vec{a} - 4b$  взаимно перпендикулярны.

Ответ:  $60^\circ$ .