

Математика

Тема урока:

«Перпендикулярные прямые в пространстве»

«Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости».

«Перпендикулярность прямой и плоскости»

Учитель МОУ СОШ №34
г. Комсомольска-на-Амуре
Есина Е.В.

Математика

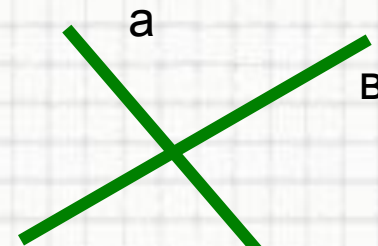
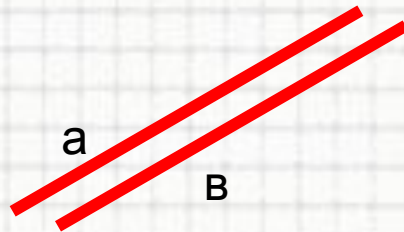
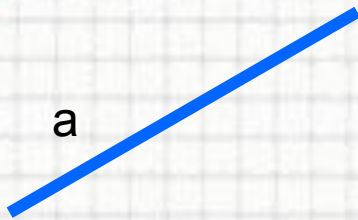
Цели урока:

- Ввести понятие перпендикулярных прямых в пространстве;
- Доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой;
- Дать определение перпендикулярности прямой и плоскости;
- Доказать теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярности к плоскости.

Математика

ВСПОМНИМ ПЛАНИМЕТРИЮ

□ Каково может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости?



□ Какие прямые в планиметрии называются перпендикулярными?

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

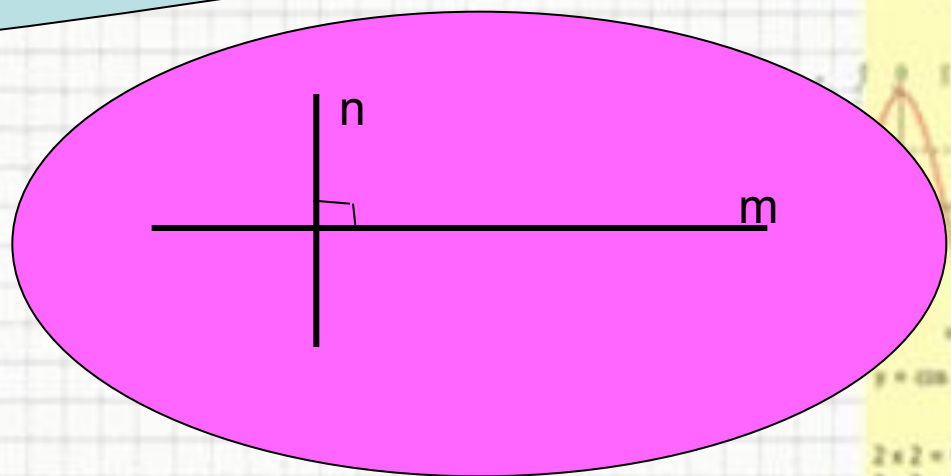
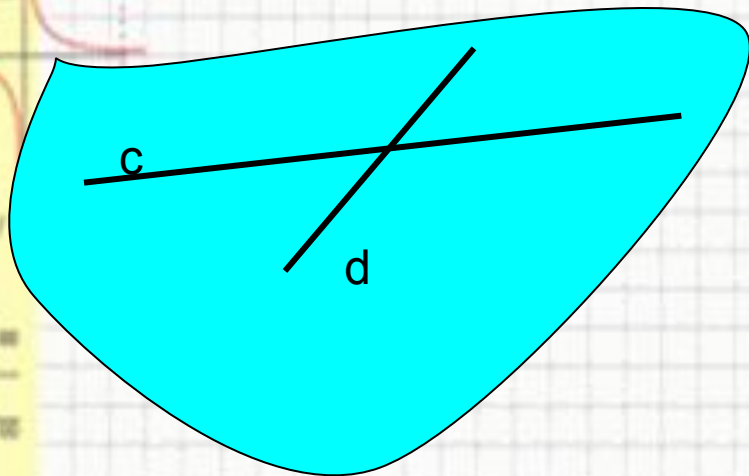
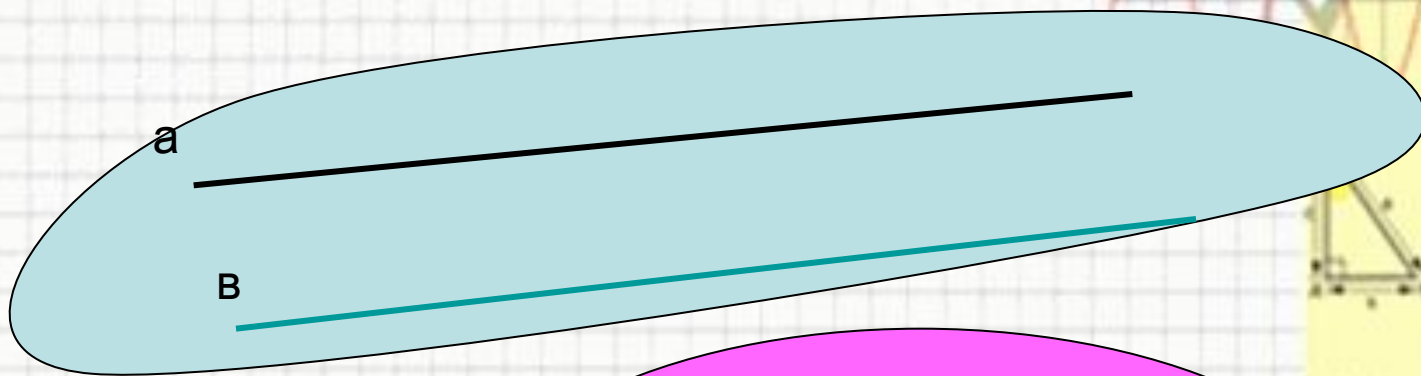
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 3 = 0 \\ \sin 25 = 0 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

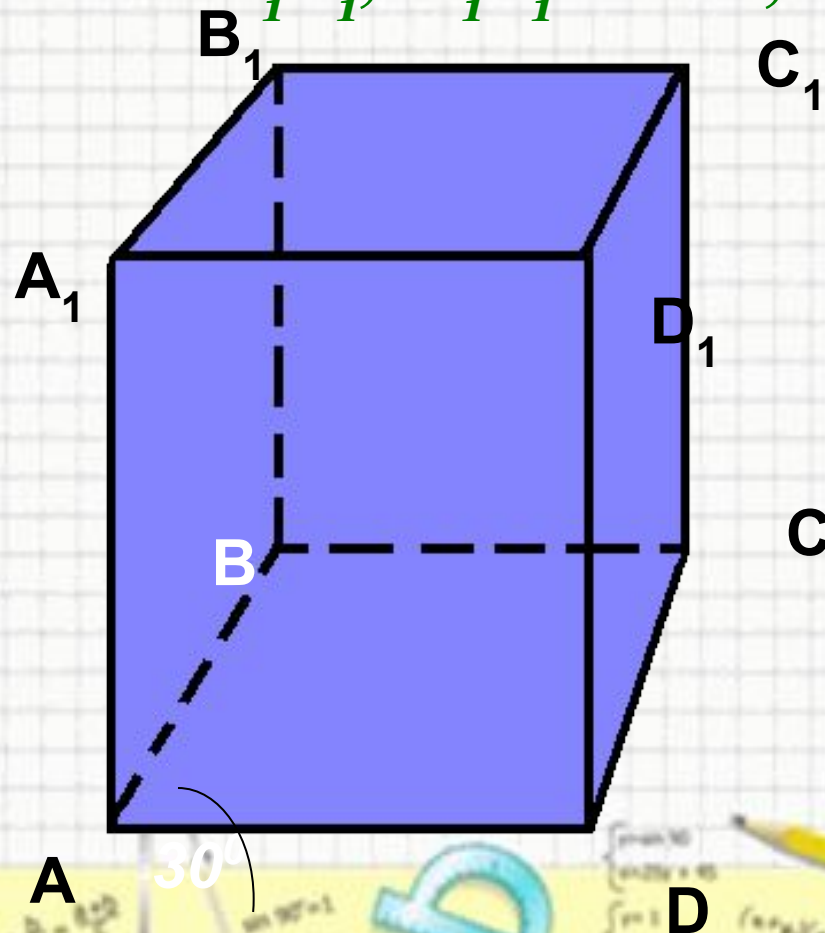
Математика

Взаимное расположение двух прямых в пространстве



Математика

- Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, угол BAD равен 30° . Найдите углы между прямыми AB и $A_1 D_1$; $A_1 B_1$ и AD ; AB и $B_1 C_1$.



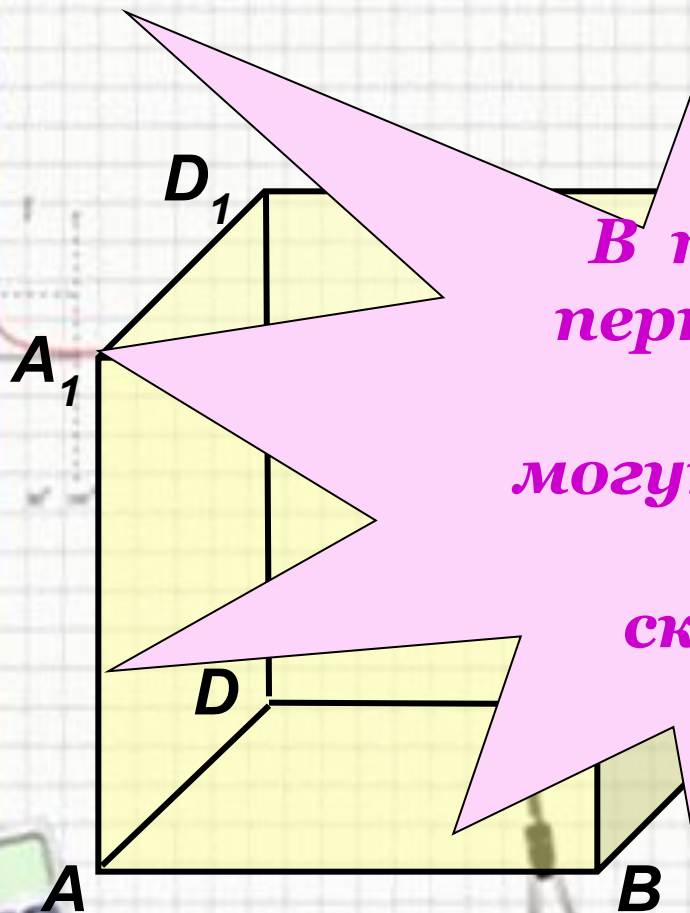
Математика

Модель куба.

1. Как называются
прямые AB и BC ?

Назовите угол между
и DC ;

В пространстве
перпендикулярные
прямые
могут пересекаться
и могут
скрещиваться.



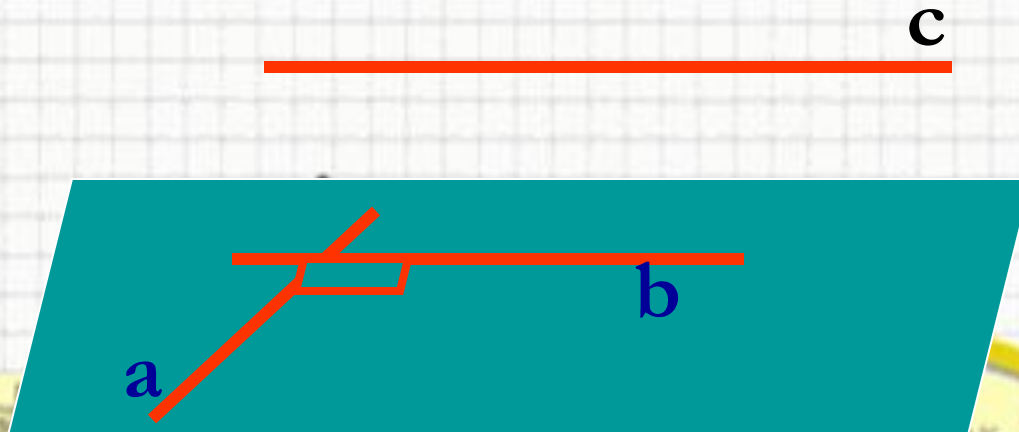
Математика

Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .

Обозначается $a \perp b$

Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

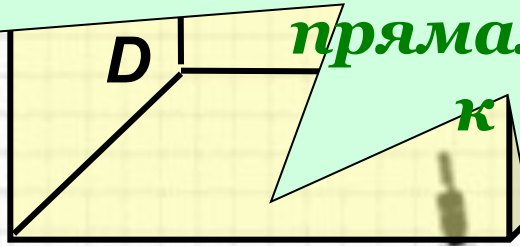


Математика

Рассмотрим прямые AA_1 , CC_1 и DC .

$$AA_1 \parallel CC_1; DC \perp CC_1$$

Если одна из
параллельных
прямых
перпендикулярна
к третьей прямой, то и
другая
прямая перпендикулярна
к этой прямой.

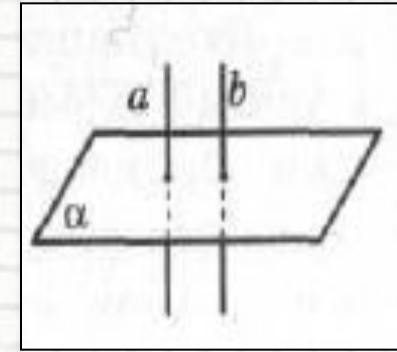


Математика

Свойства :

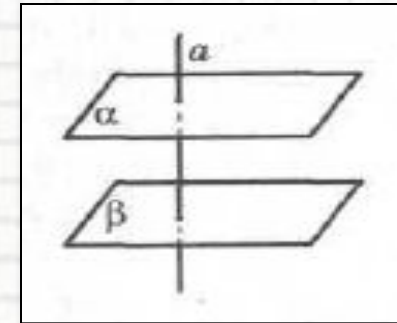
1. Если плоскость перпендикулярна одной

- из двух параллельных прямых,
- то она перпендикулярна другой
- прямой. ($a \perp \alpha$ и $a \parallel b \Rightarrow b \perp \alpha$)



2. Если две прямые перпендикулярны

- одной и той же плоскости,
- то они параллельны. ($a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$)



3. Если прямая перпендикулярна

- одной из двух параллельных
- плоскостей, то она перпендикулярна
- и другой плоскости. ($\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha \Rightarrow a \perp \beta$)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

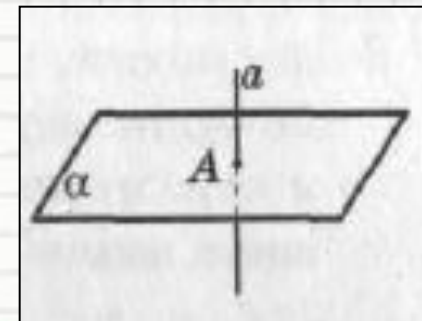
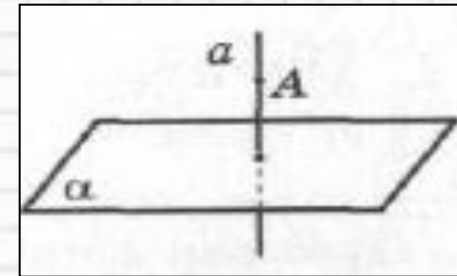
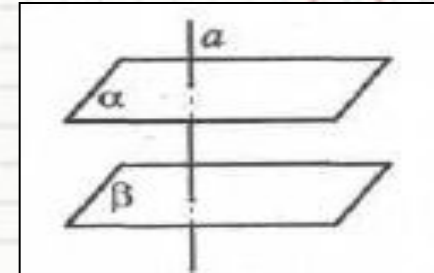
$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 60 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

Математика

Свойства :

- 4. Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.
($a \perp \alpha$ и $a \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$)
- 5. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.
- 6. Через любую точку прямой можно провести плоскость, перпендикулярную ей и притом только одну.



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

Математика

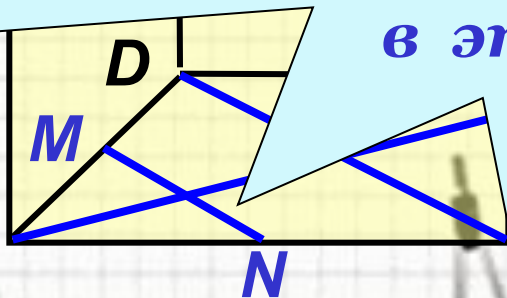
Найдите угол между прямой AA_1 и
прямыми плоскости (ABC) :

AB, AD, AC, BD, CN .

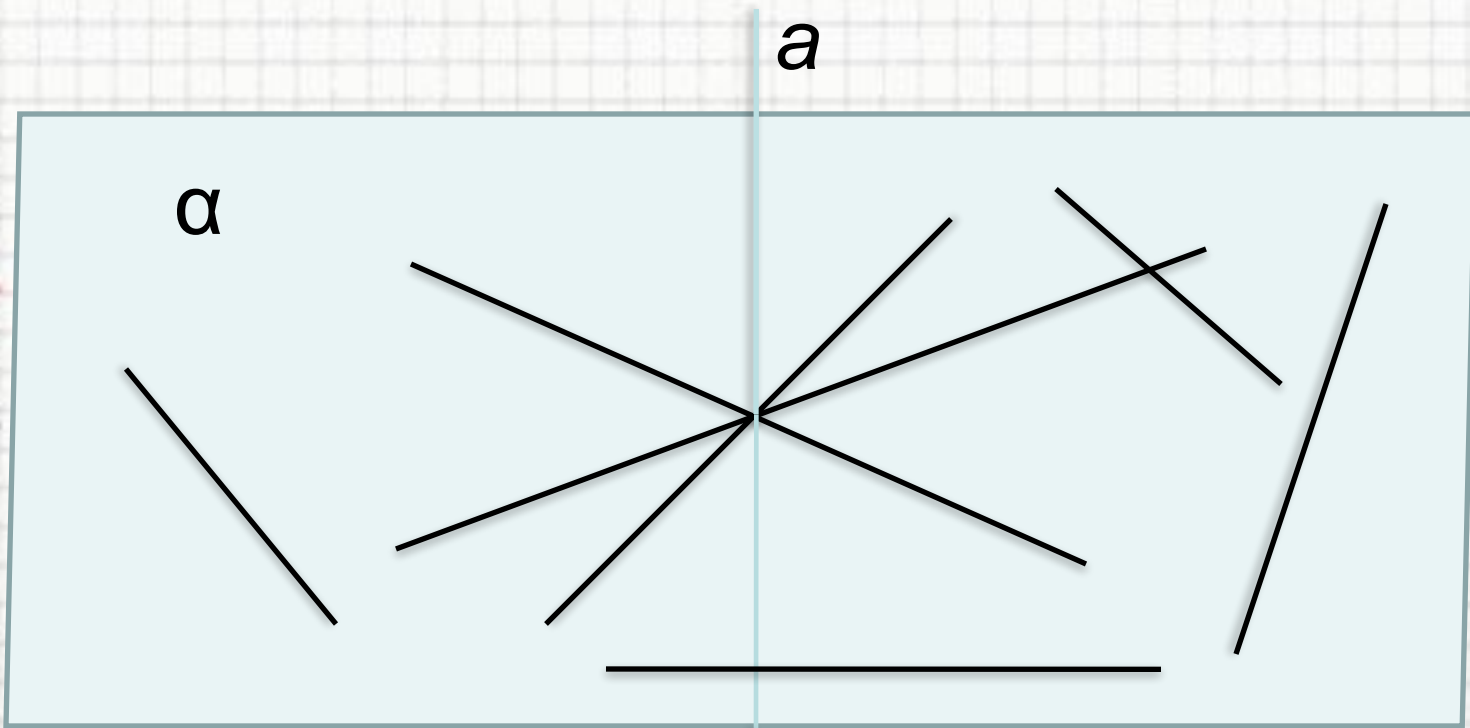
Прямая называется
перпендикулярной к
плоскости,
если она
перпендикулярна к
любой прямой, лежащей
в этой плоскости.

90°

90°



Математика



Математика

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



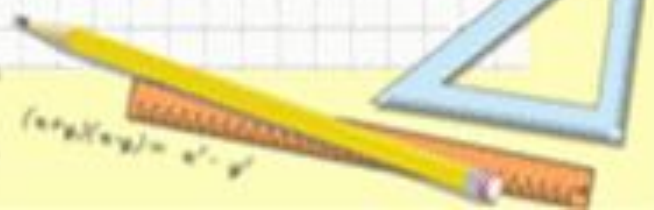
$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ \end{cases}$$



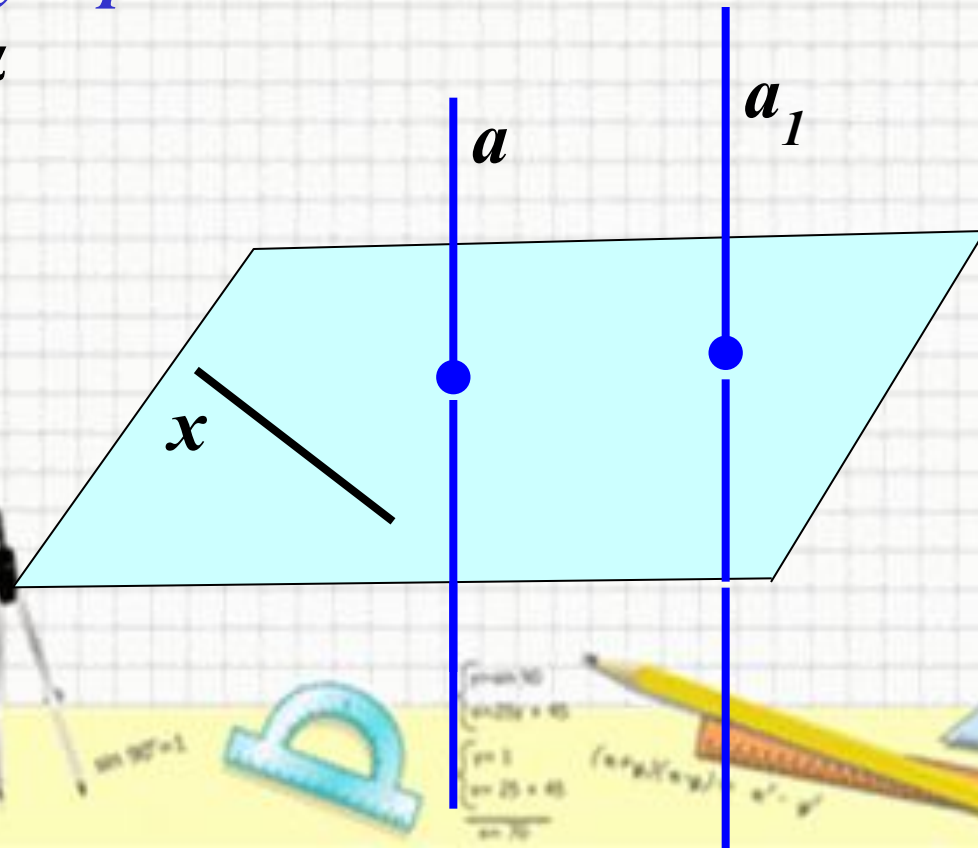
$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a' - a''$$

Математика

Теорема: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: прямая a параллельна прямой a_1 и перпендикулярна плоскости α .

Доказать: $a_1 \perp \alpha$

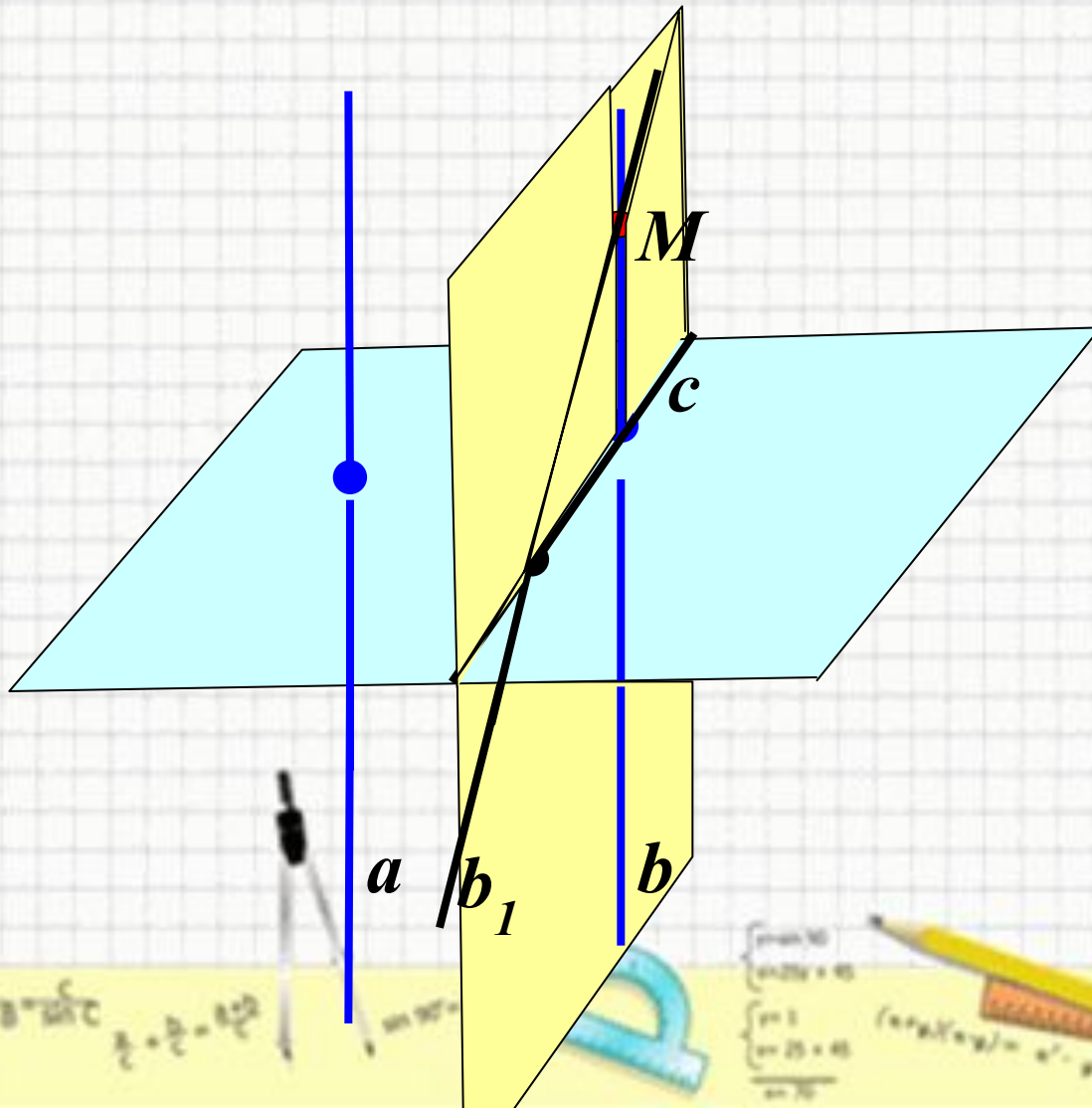


Математика

- Проведем прямую x в плоскости α . Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a \perp x$. Т.о., прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α , т.е. $a \perp \alpha$.

Обратная теорема:

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

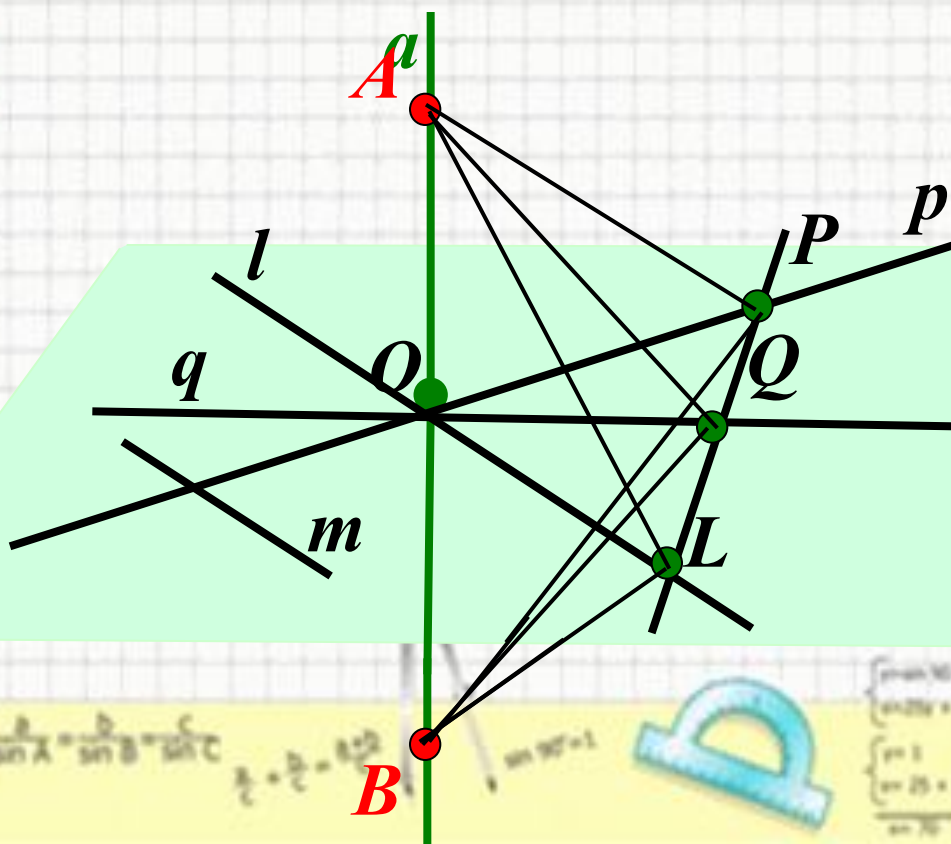
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = \alpha' - \beta'$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

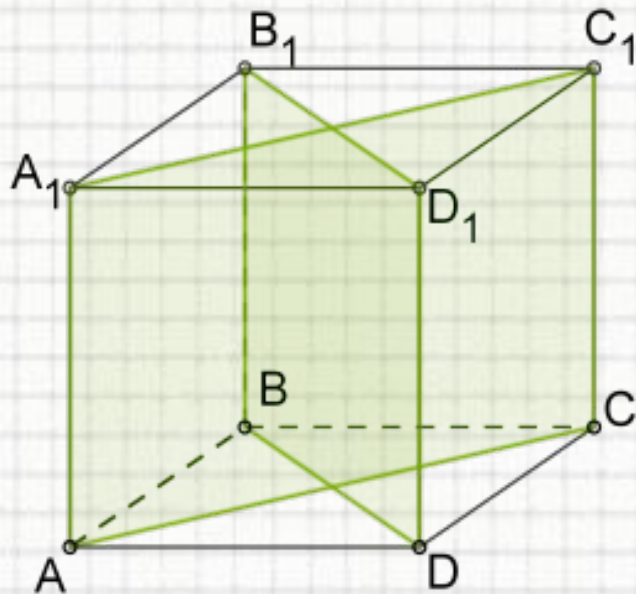
- Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Математика

Применение признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Дан куб. Определи, какая из перечисленных в ответе прямых перпендикулярна названной плоскости?



а) плоскости (ABC) перпендикулярна $B_1C_1, AC_1, BD_1, AC, AA_1, BD, AB$

б) плоскости (BDD1) перпендикулярна $AC, AA_1, B_1C_1, AC_1, AB, BD_1, BD$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

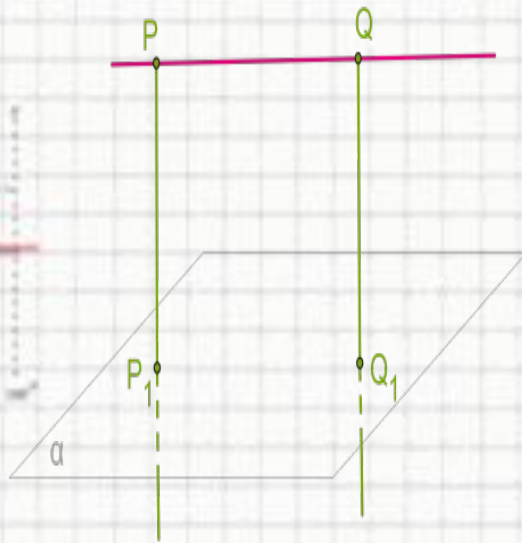
$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 25 + 45 \\ \sin \gamma = 70 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = \alpha' - \beta'$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

Математика

Две прямые, перпендикулярные одной плоскости.



Прямая PQ параллельна плоскости α .
От точек P и Q к плоскости проведены прямые $PP_1 \perp \alpha$ и $QQ_1 \perp \alpha$.
Известно, что $PQ = PP_1 = 19,8$ см.
Определи вид четырехугольника PP_1Q_1Q и найди его периметр.

Ответ:

1. PP_1Q_1Q —
2. $PP_1Q_1Q =$ см

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0,5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a / b$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Математика

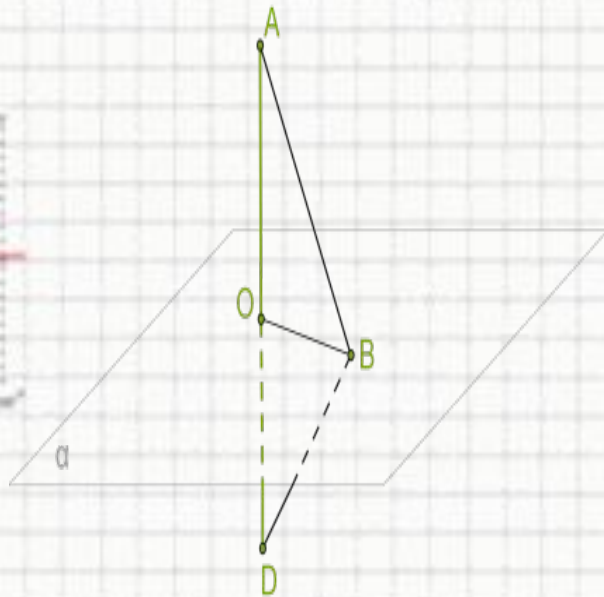
Перпендикулярность прямой к плоскости.

Проведенная к плоскости перпендикулярная прямая пересекает плоскость в точке O . На прямой отложен отрезок AD , точка O является серединой этого отрезка.

Определи вид и периметр треугольника ABD , если $AD = 24$ см, а $OB = 5$ см (ответ округли до одной десятой).

Ответ:

1. $\triangle ABD$ —
2. $P_{ABD} =$ см



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 25 + 45 \\ \sin \delta = 70 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Математика

Прямые, перпендикулярные к плоскости.



Две прямые образуют прямой угол с плоскостью α .

Длина отрезка $KN = 96,5$ см, длина отрезка $LM = 56,5$ см.

Рассчитай расстояние NM , если $KL = 41$ см.

$NM = \dots$ см

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

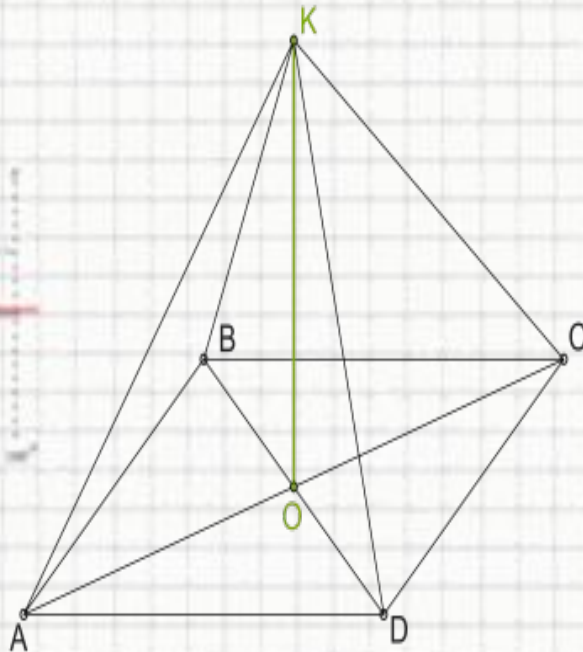
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0,5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a / b$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Перпендикуляр к плоскости квадрата.



К плоскости квадрата ABCD со стороной 7 см через точку пересечения диагоналей O проведена прямая, перпендикулярная плоскости квадрата. На прямой отложен отрезок OK длиной 5 см. Рассчитай расстояние от точки K к вершинам квадрата (результат округли до одной десятой).

$$KA = \text{ см}$$

$$KB = \text{ см}$$

$$KC = \text{ см}$$

$$KD = \text{ см}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\sin 30^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 1 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

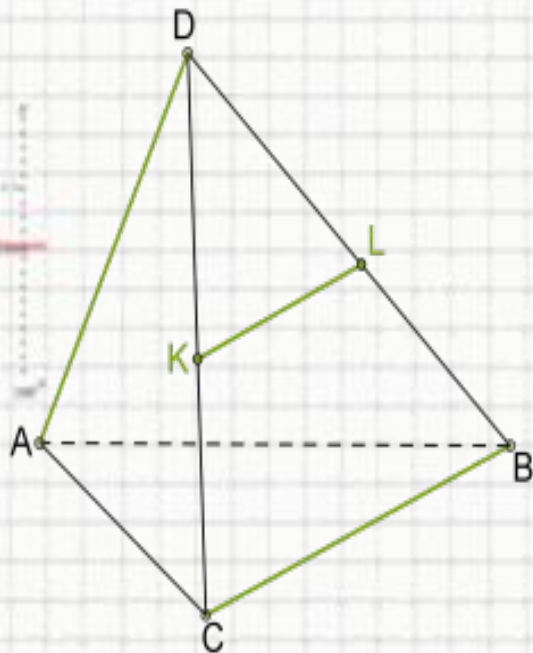
$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a / b$$

$$y = \cos x$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Математика

Доказательство перпендикулярности скрещивающихся прямых.



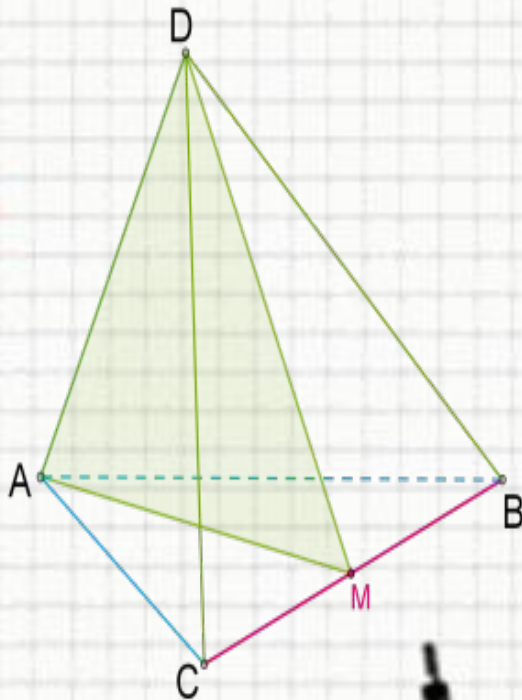
Известно, что в тетраэдре $DABC$ ребро DA перпендикулярно ребру BC . На ребрах DC и DB расположены серединные точки K и L . Докажи, что DA перпендикулярно KL .

1. Так как K и L — серединные точки DC и DB , то KL — треугольника CBD .
2. Средняя линия третьей стороне треугольника, то есть BC . Если DA перпендикулярна одной из прямых, то она и другой прямой.

Математика

Признак перпендикулярности прямой к плоскости.

- В тетраэдре $DABC$ точка M — середина ребра CB . Известно, что в этом тетраэдре $AC=AB=DC=DB$. Докажи, что прямая, на которой находится ребро CB , перпендикулярна плоскости (ADM) .



1. Определи вид треугольников.

$\triangle ABC$ —

$\triangle DCB$ —

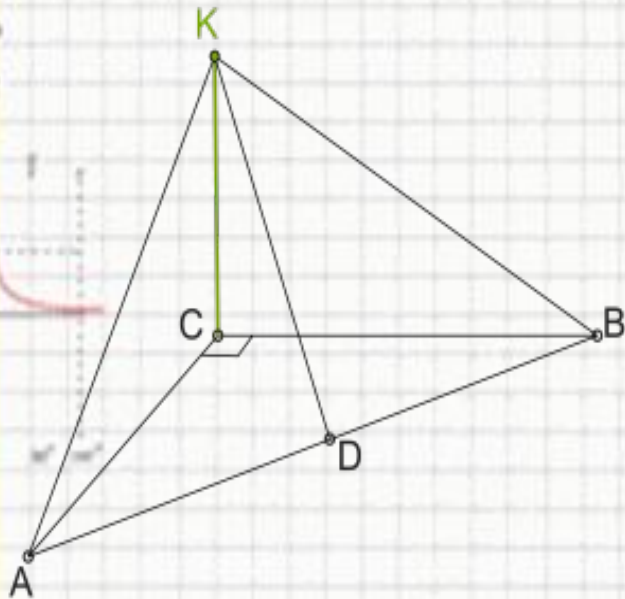
2. Какой угол образует медиана с основанием этих треугольников?

Ответ: 90° градусов.

3. Согласно признаку, если прямая перпендикулярна к трем прямым в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Математика

Свойство прямой перпендикулярной к плоскости.



Через вершину прямого угла С к плоскости прямоугольного треугольника АВС проведена перпендикулярная прямая КС. Точка D — серединная точка гипотенузы АВ.

Длина катетов треугольника $AC = 48$ мм и $BC = 64$ мм. Расстояние $KC = 42$ мм. Определи длину отрезка KD .

$KD = \dots$ мм

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

2 × 2 = 4
3 × 3 = 9
4 × 4 = 16
5 × 5 = 25
6 × 6 = 36
7 × 7 = 49
8 × 8 = 64

Математика

(сложное) Доказательство от противного.

- Прямая d перпендикулярна плоскости α и прямой m , которая не лежит в плоскости α .
- Докажи, что прямая m параллельна плоскости α .

1. Согласно данной информации, если прямая не лежит в плоскости, она может или быть ...плоскости, или ... плоскость.
2. Допустим, что прямая m не, аплоскость α .
3. Если прямая d по данной информации перпендикулярна плоскости α , то она каждой прямой в этой плоскости, в том числе и прямой, которая проведена через точки, в которых плоскость пересекает прямые d и m .
4. Мы имеем ситуацию, когда через одну точку к прямой d проведены две прямые.
5. Это противоречие, из чего следует, что прямая m плоскости α , что и требовалось доказать.



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 30^\circ = 1/2$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

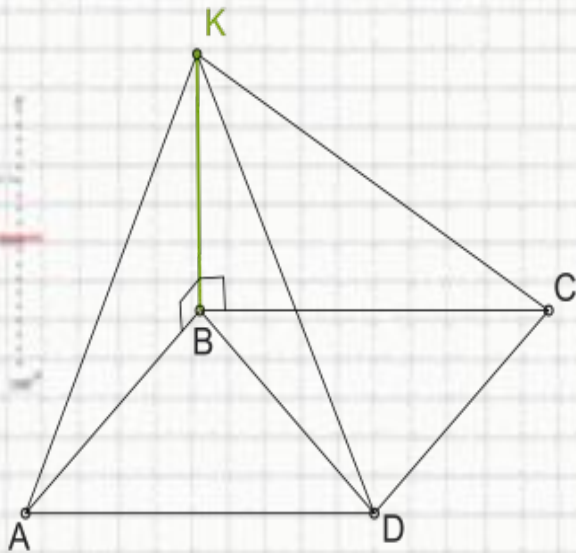
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

Математика

Признак перпендикулярности прямой в расчетах расстояния до вершин квадрата.

От вершины K к плоскости квадрата $ABCD$ проведена прямая KB так, что углы $\angle KBA = 90^\circ$ и $\angle KBC = 90^\circ$.
Рассчитай расстояние от K к вершинам квадрата, если сторона квадрата равна 3 см, а $KB = 18$ см.



Ответы округлить до одной десятой:

$$KA = \text{см}$$

$$KC = \text{см}$$

$$KD = \text{см}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

Домашнее задание

• П.15,16

Вопросы 1,2 (стр.57)

№116,118



Математика

2x2=4
3x3=9
4x4=16
5x5=25
6x6=36
7x7=49
8x8=64



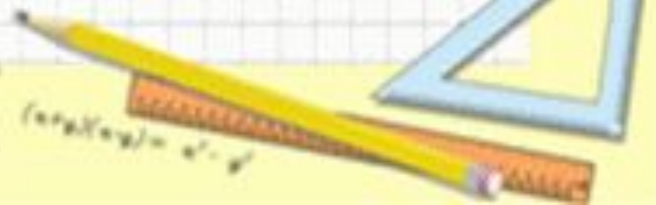
$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ \end{cases}$$



$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$