

# Математика

**Тема урока:**

**«Перпендикулярные прямые в пространстве»**

**«Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости».**

**«Перпендикулярность прямой и плоскости»**

Учитель МОУ СОШ №34  
г. Комсомольска-на-Амуре  
Есина Е.В.

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a' - a''$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

# Математика

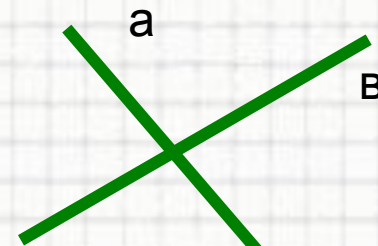
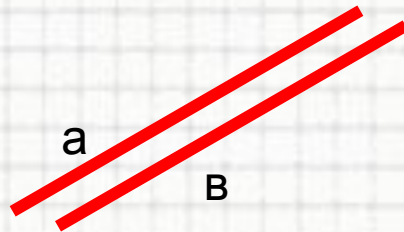
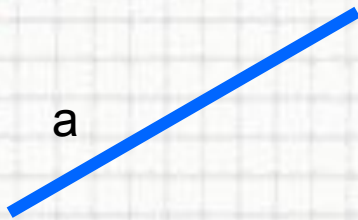
## Цели урока:

- Ввести понятие перпендикулярных прямых в пространстве;
- Доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой;
- Дать определение перпендикулярности прямой и плоскости;
- Доказать теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярности к плоскости.

# Математика

## ВСПОМНИМ ПЛАНИМЕТРИЮ

□ Каково может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости?



□ Какие прямые в планиметрии называются перпендикулярными?

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

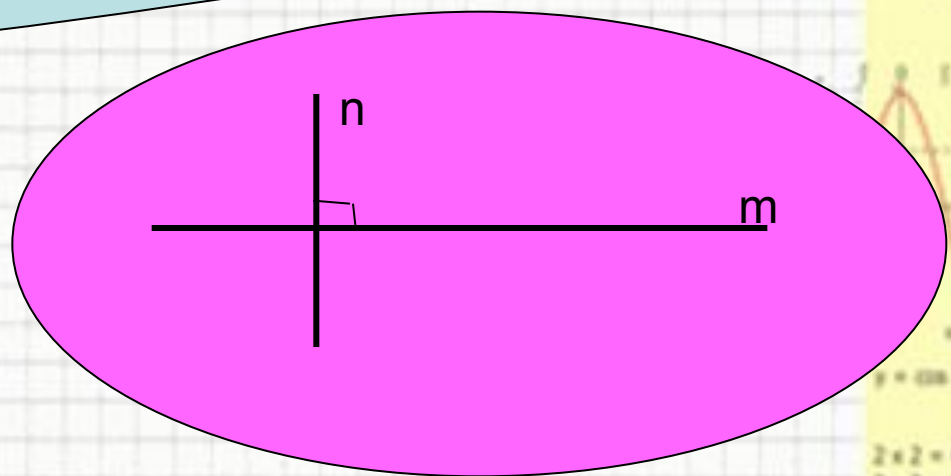
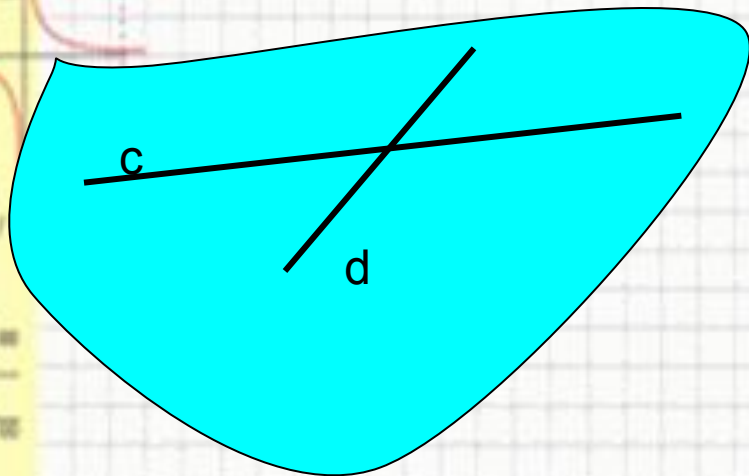
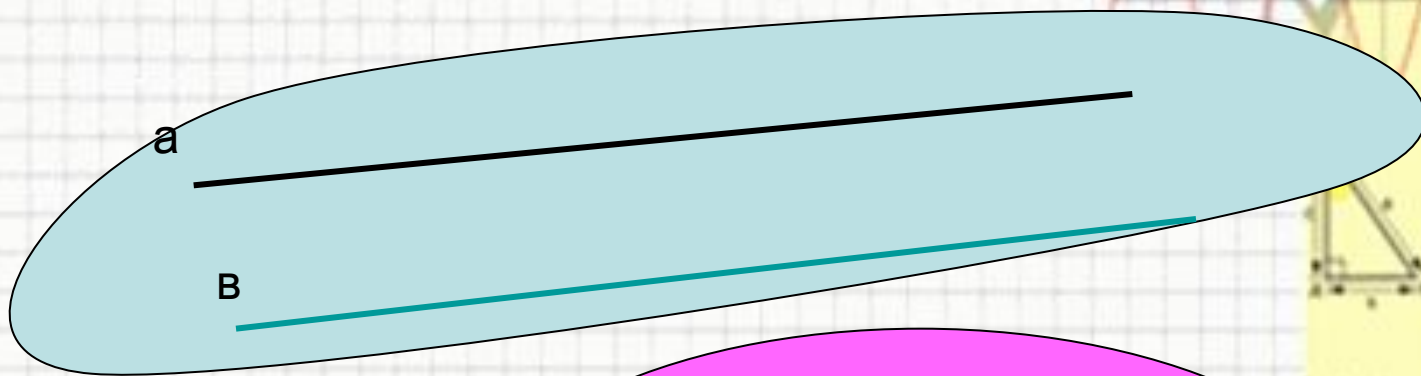
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 3 = 0 \\ \sin 25 = 0 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

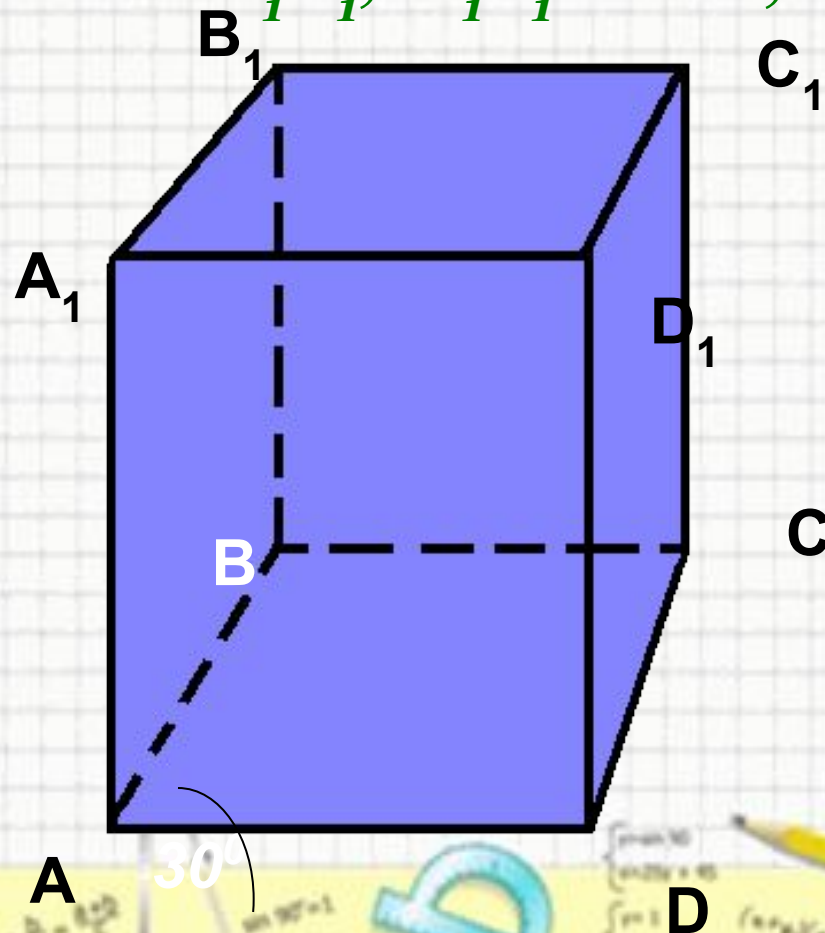
# Математика

## *Взаимное расположение двух прямых в пространстве*



# Математика

- Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – параллелепипед, угол  $BAD$  равен  $30^\circ$ . Найдите углы между прямыми  $AB$  и  $A_1 D_1$ ;  $A_1 B_1$  и  $AD$ ;  $AB$  и  $B_1 C_1$ .



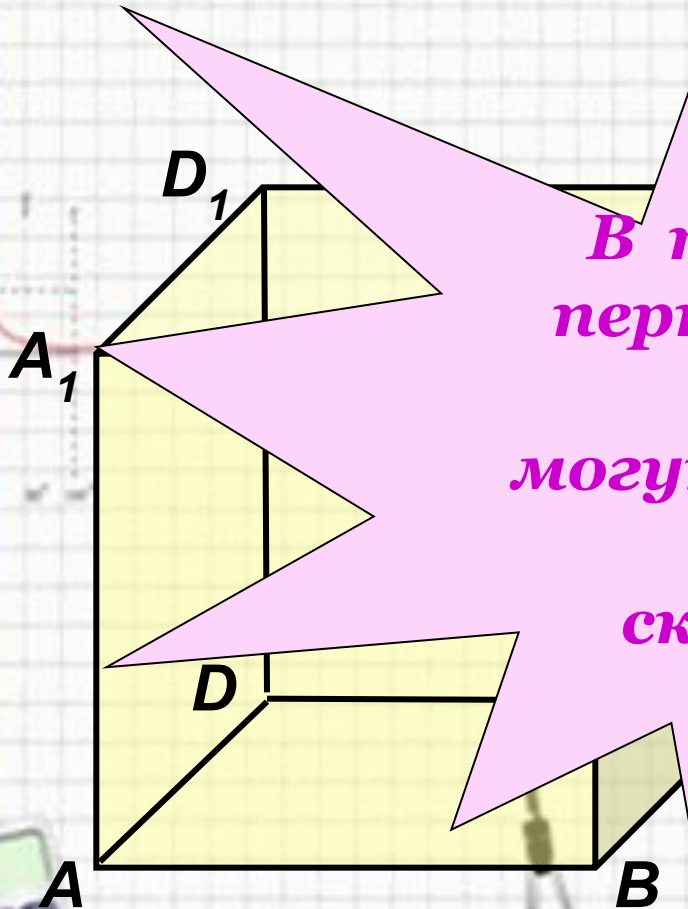
# Математика

## Модель куба.

1. Как называются  
прямые  $AB$  и  $BC$ ?

Назовите угол между  
прямыми  $AB$  и  $DC$ ;

*В пространстве  
перпендикулярные  
прямые  
могут пересекаться  
и могут  
скрещиваться.*



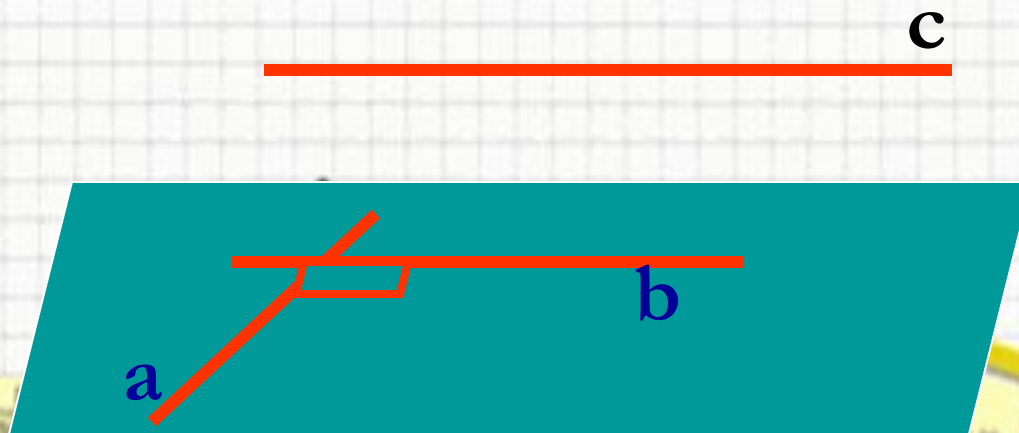
# Математика

## Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$ .

Обозначается  $a \perp b$

Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

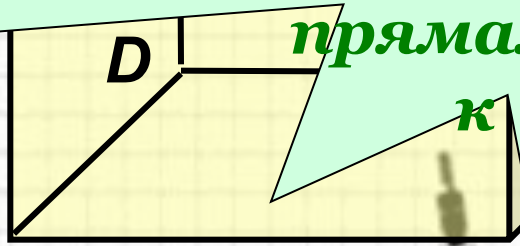


# Математика

Рассмотрим прямые  $AA_1$ ,  $CC_1$  и  $DC$ .

$$AA_1 \parallel CC_1; DC \perp CC_1$$

Если одна из  
параллельных  
прямых  
перпендикулярна  
к третьей прямой, то и  
другая  
прямая перпендикулярна  
к этой прямой.



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

2x2=4
3x3=9
4x4=16
5x5=25
6x6=36
7x7=49
8x8=64

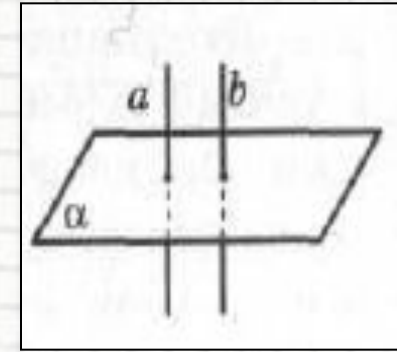


# Математика

## Свойства :

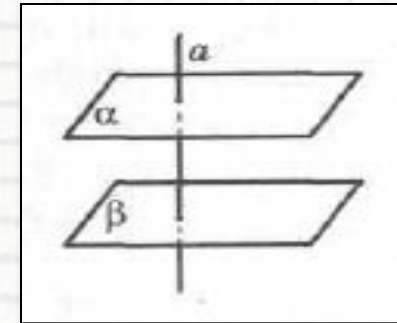
1. Если плоскость перпендикулярна одной

- из двух параллельных прямых,
- то она перпендикулярна другой
- прямой. ( $a \perp \alpha$  и  $a \parallel b \Rightarrow b \perp \alpha$ )



2. Если две прямые перпендикулярны

- одной и той же плоскости,
- то они параллельны. ( $a \perp \alpha$  и  $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$ )



3. Если прямая перпендикулярна

- одной из двух параллельных
- плоскостей, то она перпендикулярна
- и другой плоскости. ( $\alpha \parallel \beta$  и  $a \perp \alpha \Rightarrow a \perp \beta$ )

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

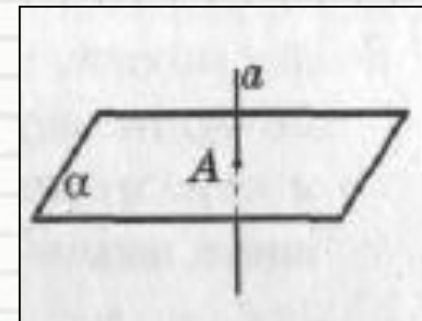
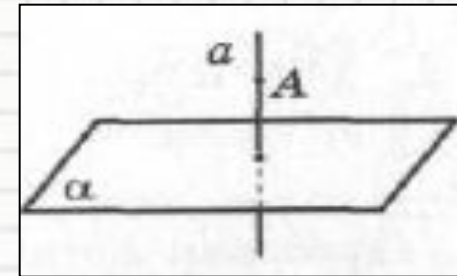
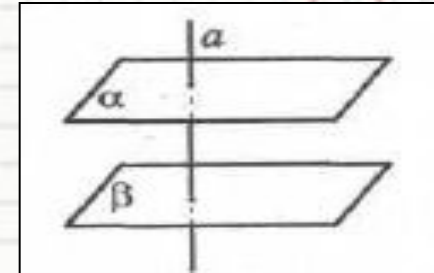
$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

# Математика

## Свойства :

- 4. Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.  
( $a \perp \alpha$  и  $a \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ )
- 5. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.
- 6. Через любую точку прямой можно провести плоскость, перпендикулярную ей и притом только одну.



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

# Математика

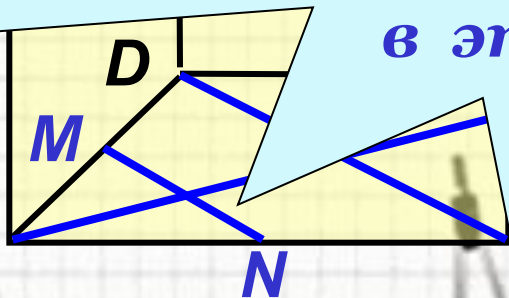
Найдите угол между прямой  $AA_1$  и  
прямыми плоскости  $(ABC)$ :

$AB, AD, AC, BD, CN$ .

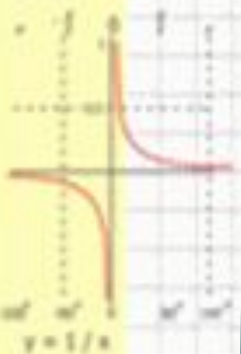
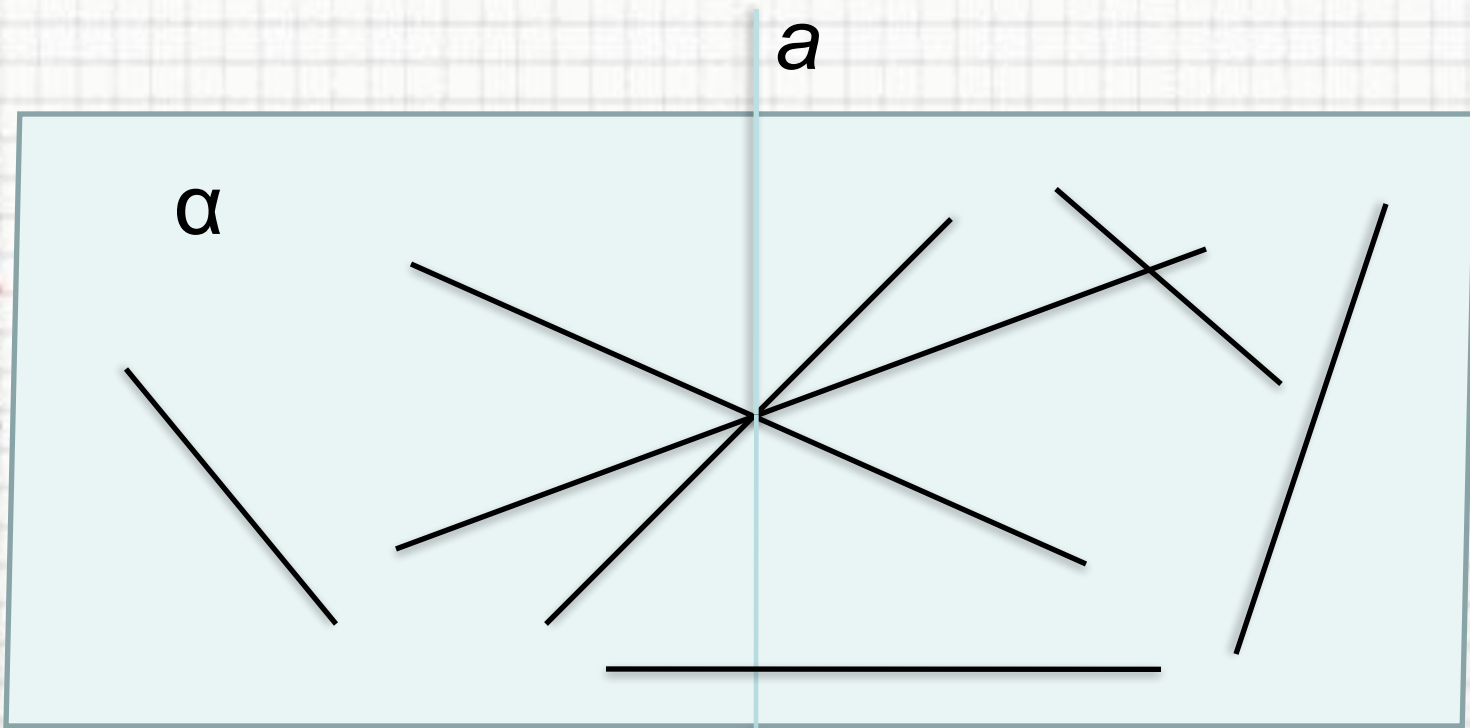
Прямая называется  
перпендикулярной к  
плоскости,  
если она  
перпендикулярна к  
любой прямой, лежащей  
в этой плоскости.

90°

90°



# Математика



Математика

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



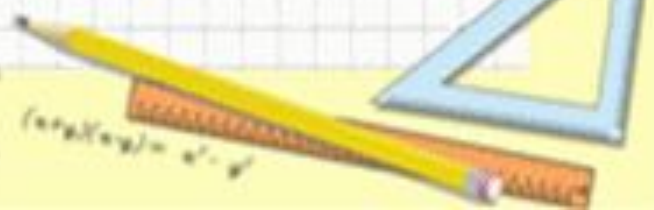
$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ \end{cases}$$



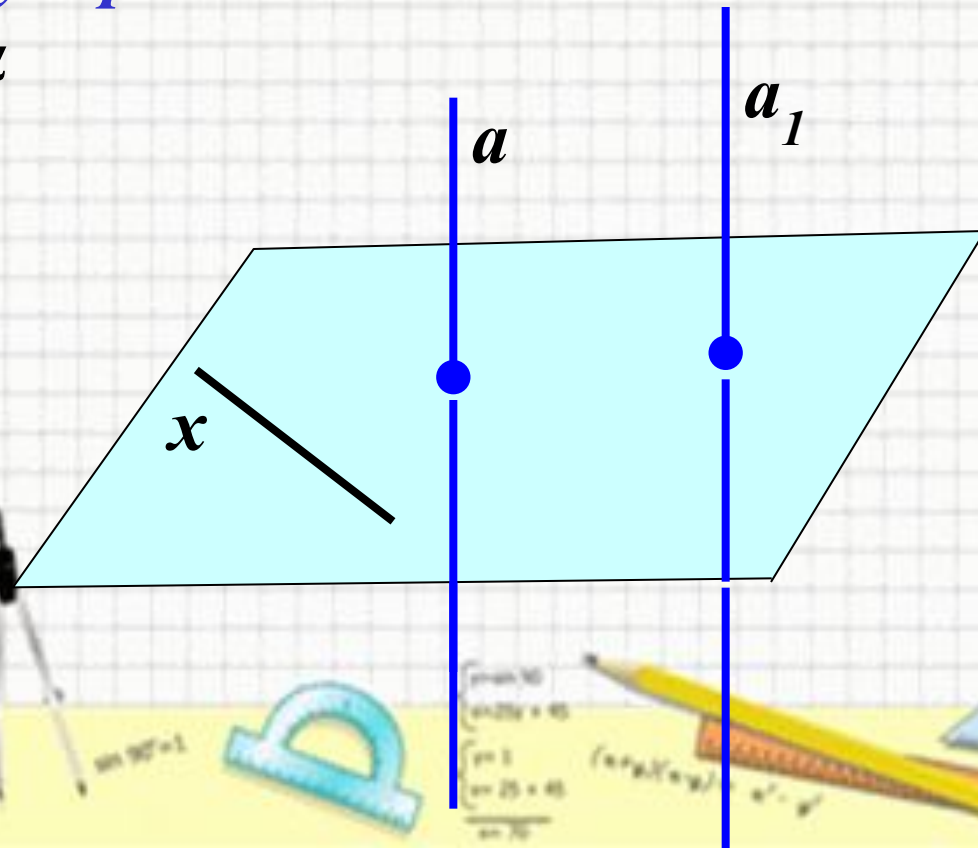
$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a' - a''$$

# Математика

**Теорема:** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

**Дано:** прямая  $a$  параллельна прямой  $a_1$  и перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .

**Доказать:**  $a_1 \perp \alpha$

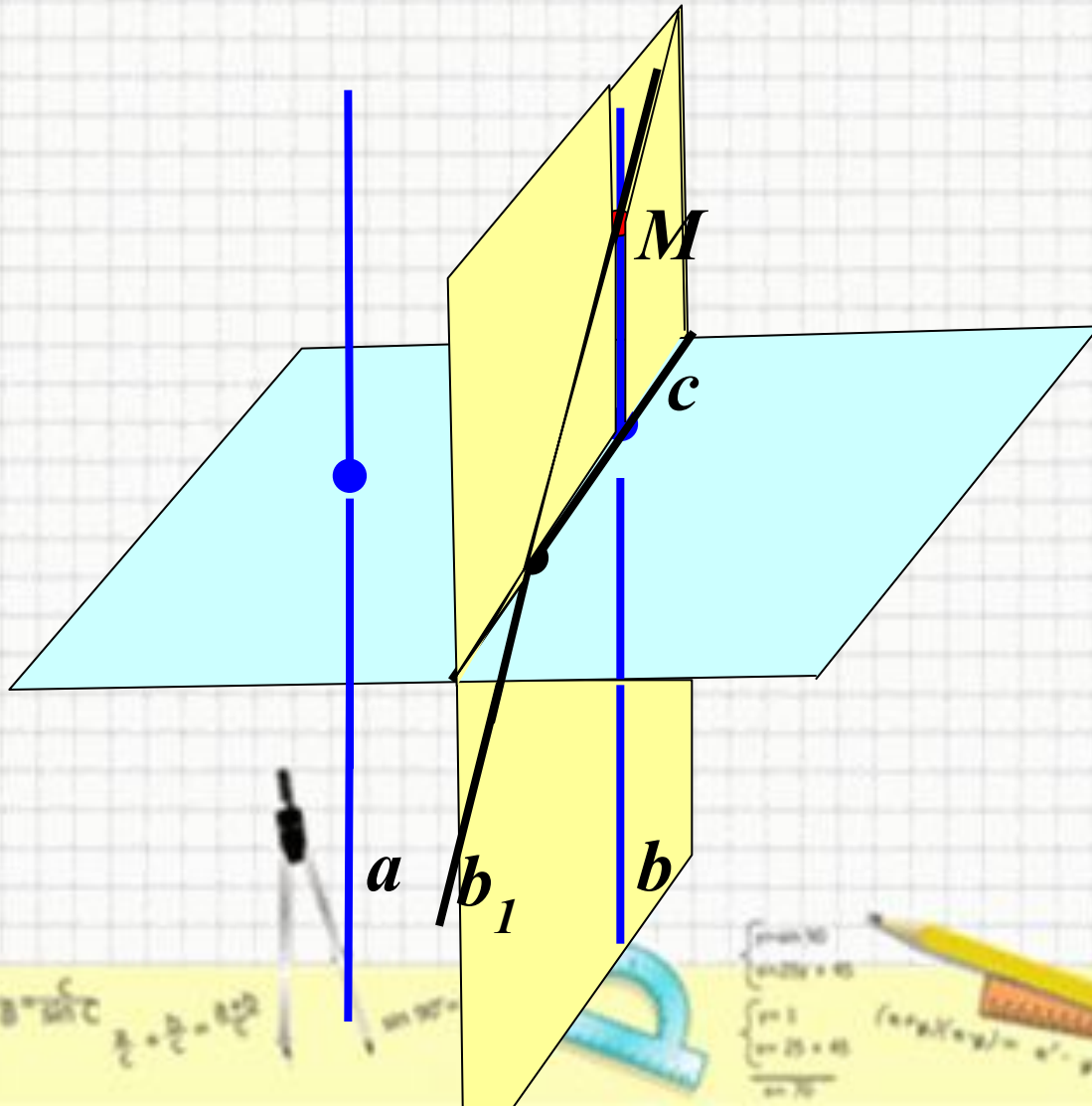


# Математика

- Проведем прямую  $x$  в плоскости  $\alpha$ . Так как  $a \perp \alpha$ , то  $a \perp x$ . По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей  $a \perp x$ . Т.о., прямая  $a_1$  перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ , т.е.  $a \perp \alpha$ .

## Обратная теорема:

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

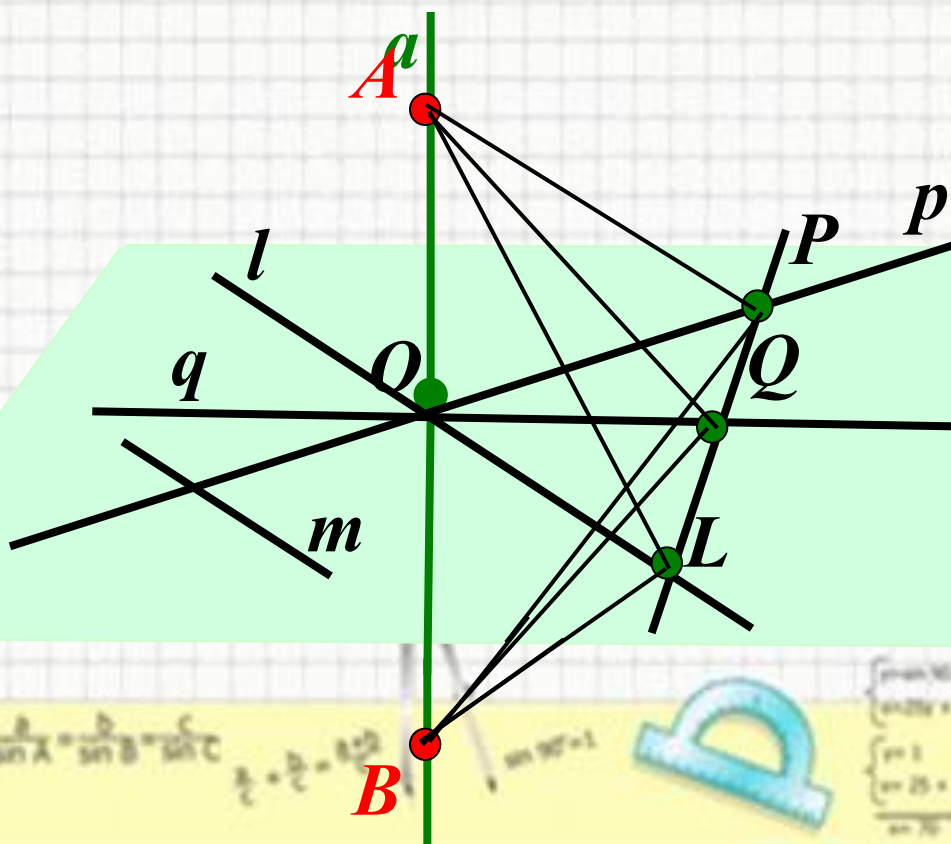
$$\begin{cases} x + 2y = 15 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

- Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

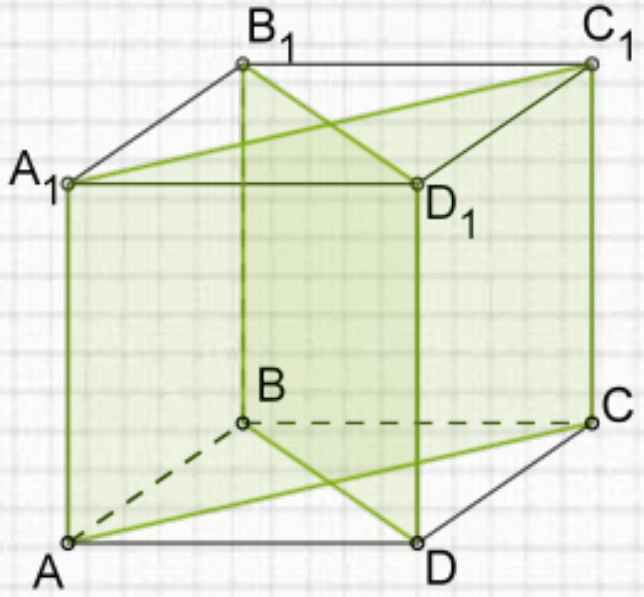




# Математика

## Применение признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Дан куб. Определи, какая из перечисленных в ответе прямых перпендикулярна названной плоскости?



а) плоскости (ABC) перпендикулярна  $B_1C_1, AC_1, BD_1, AC, AA_1, BD, AB$

б) плоскости (BDD1) перпендикулярна  $AC, AA_1, B_1C_1, AC_1, AB, BD_1, BD$



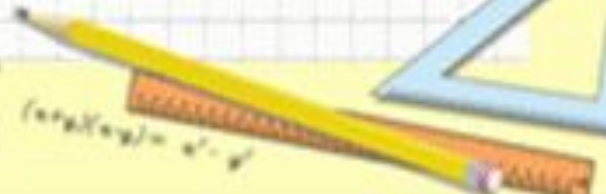
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$



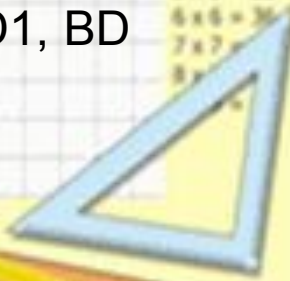
$$\sin 90^\circ = 1$$



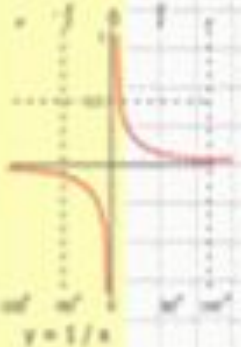
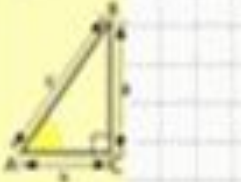
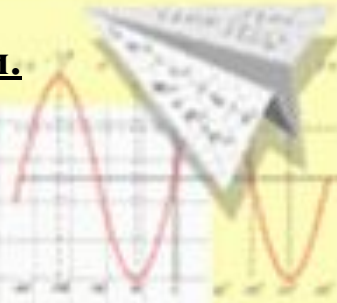
$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 90 \end{cases}$$



$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$



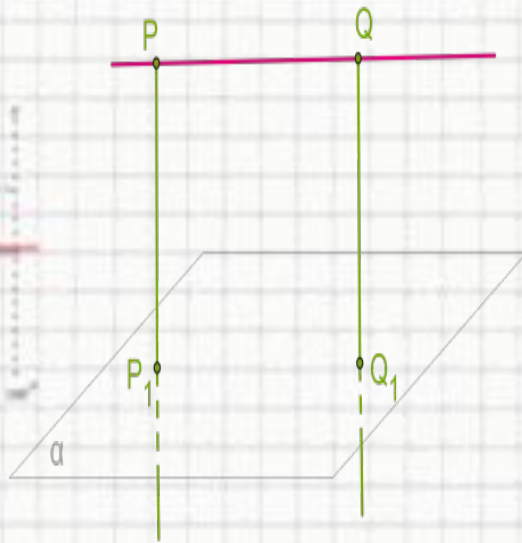
2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64



$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

# Математика

## Две прямые, перпендикулярные одной плоскости.



Прямая  $PQ$  параллельна плоскости  $\alpha$ .  
От точек  $P$  и  $Q$  к плоскости проведены прямые  $PP_1 \perp \alpha$  и  $QQ_1 \perp \alpha$ .  
Известно, что  $PQ = PP_1 = 19,8$  см.  
Определи вид четырехугольника  $PP_1Q_1Q$  и найди его периметр.

Ответ:

1.  $PP_1Q_1Q$  —
2.  $PP_1Q_1Q =$  см

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0,5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a / b$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

# Математика

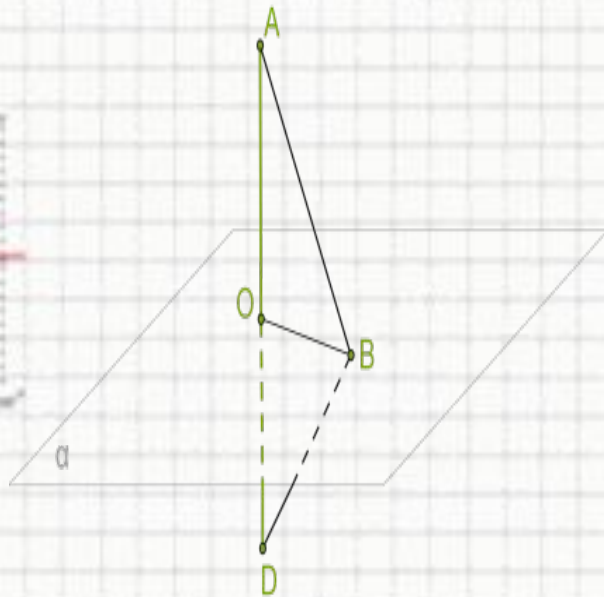
## Перпендикулярность прямой к плоскости.

Проведенная к плоскости перпендикулярная прямая пересекает плоскость в точке  $O$ . На прямой отложен отрезок  $AD$ , точка  $O$  является серединой этого отрезка.

Определи вид и периметр треугольника  $ABD$ , если  $AD = 24$  см, а  $OB = 5$  см (ответ округли до одной десятой).

Ответ:

1.  $\triangle ABD$  —
2.  $P_{ABD} =$  см



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 25 + 45 \\ \sin \delta = 70 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

# Математика

## Прямые, перпендикулярные к плоскости.



Две прямые образуют прямой угол с плоскостью  $\alpha$ .

Длина отрезка  $KN = 96,5$  см, длина отрезка  $LM = 56,5$  см.

Рассчитай расстояние  $NM$ , если  $KL = 41$  см.

$NM = \dots$  см

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

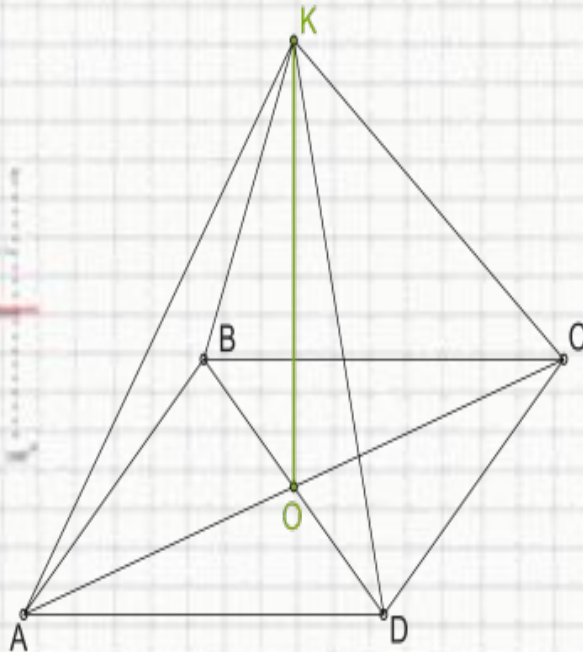
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0,5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a / b$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

## Перпендикуляр к плоскости квадрата.



К плоскости квадрата ABCD со стороной 7 см через точку пересечения диагоналей O проведена прямая, перпендикулярная плоскости квадрата. На прямой отложен отрезок OK длиной 5 см. Рассчитай расстояние от точки K к вершинам квадрата (результат округли до одной десятой).

$$KA = \text{ см}$$

$$KB = \text{ см}$$

$$KC = \text{ см}$$

$$KD = \text{ см}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

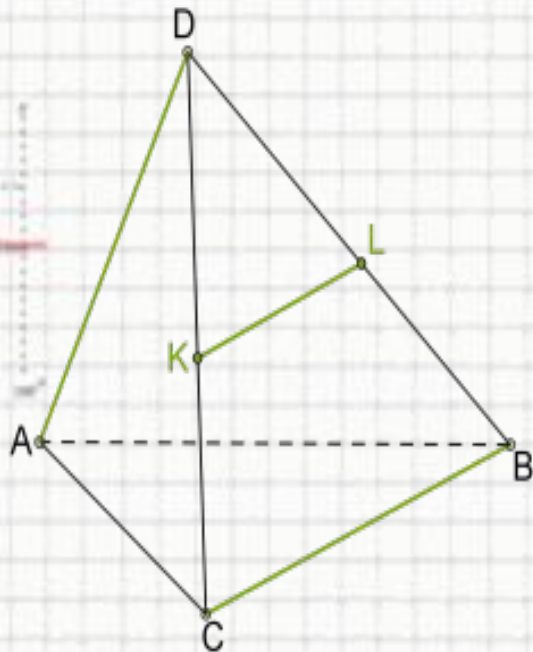
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

# Математика

## Доказательство перпендикулярности скрещивающихся прямых.



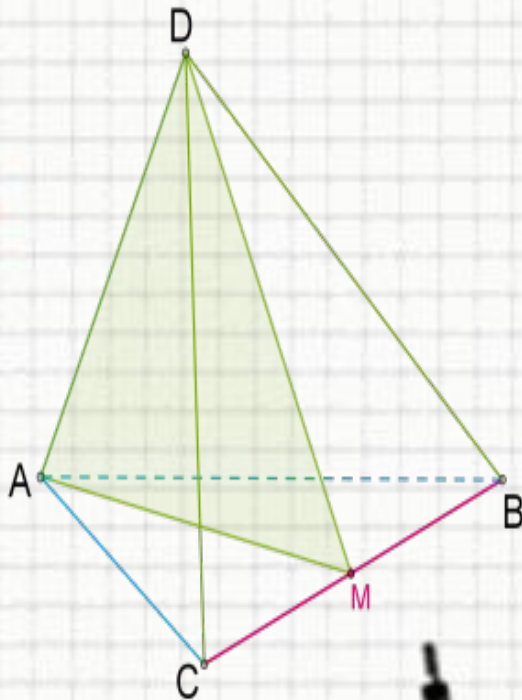
Известно, что в тетраэдре  $DABC$  ребро  $DA$  перпендикулярно ребру  $BC$ . На ребрах  $DC$  и  $DB$  расположены серединные точки  $K$  и  $L$ . Докажи, что  $DA$  перпендикулярно  $KL$ .

1. Так как  $K$  и  $L$  — серединные точки  $DC$  и  $DB$ , то  $KL$  — ..... треугольника  $CBD$ .
2. Средняя линия ..... третьей стороне треугольника, то есть  $BC$ . Если  $DA$  перпендикулярна одной из ..... прямых, то она ..... и другой прямой.

# Математика

## Признак перпендикулярности прямой к плоскости.

- В тетраэдре  $DABC$  точка  $M$  — середина ребра  $CB$ . Известно, что в этом тетраэдре  $AC=AB=DC=DB$ . Докажи, что прямая, на которой находится ребро  $CB$ , перпендикулярна плоскости  $(ADM)$ .



1. Определи вид треугольников.

$\triangle ABC$  —

$\triangle DCB$  —

2. Какой угол образует медиана с основанием этих треугольников?

Ответ:  $90^\circ$  градусов.

3. Согласно признаку, если прямая перпендикулярна к трем прямым в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\sin 30^\circ = 1/2$$

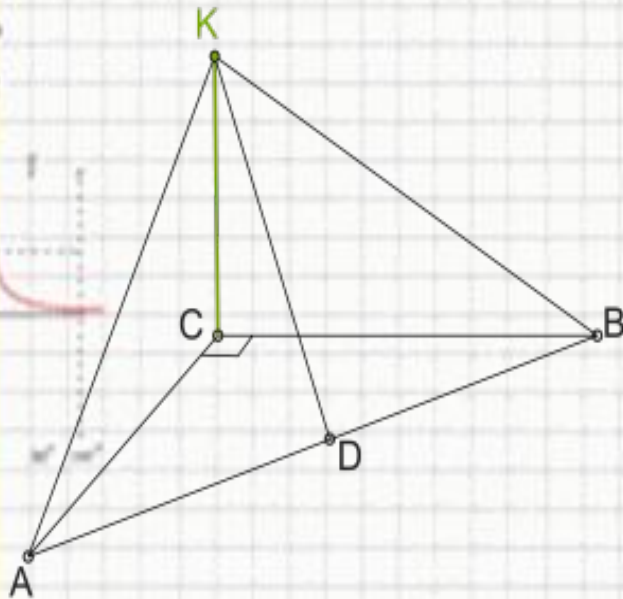
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 1/2 \\ \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 \\ \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a / b$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

# Математика

## Свойство прямой перпендикулярной к плоскости.



Через вершину прямого угла  $C$  к плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  проведена перпендикулярная прямая  $KC$ . Точка  $D$  — серединная точка гипотенузы  $AB$ .

Длина катетов треугольника  $AC = 48$  мм и  $BC = 64$  мм. Расстояние  $KC = 42$  мм. Определи длину отрезка  $KD$ .

$KD = \dots$  мм

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0,5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

2 × 2 = 4
3 × 3 = 9
4 × 4 = 16
5 × 5 = 25
6 × 6 = 36
7 × 7 = 49
8 × 8 = 64



# Математика

## (сложное) Доказательство от противного.

- Прямая  $d$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и прямой  $m$ , которая не лежит в плоскости  $\alpha$ .
- Докажи, что прямая  $m$  параллельна плоскости  $\alpha$ .

1. Согласно данной информации, если прямая не лежит в плоскости, она может или быть ...плоскости, или ... плоскость.
2. Допустим, что прямая  $m$  не ....., а .....плоскость  $\alpha$ .
3. Если прямая  $d$  по данной информации перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , то она ..... каждой прямой в этой плоскости, в том числе и прямой, которая проведена через точки, в которых плоскость пересекает прямые  $d$  и  $m$ .
4. Мы имеем ситуацию, когда через одну точку к прямой  $d$  проведены две ..... прямые.
5. Это противоречие, из чего следует, что прямая  $m$ ..... плоскости  $\alpha$ , что и требовалось доказать.



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 30^\circ = 1/2$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

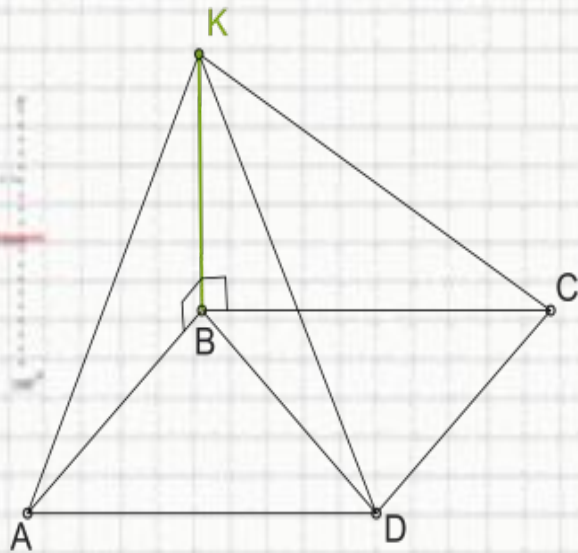
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

# Математика

Признак перпендикулярности прямой в расчетах расстояния до вершин квадрата.

От вершины  $K$  к плоскости квадрата  $ABCD$  проведена прямая  $KB$  так, что углы  $\angle KBA = 90^\circ$  и  $\angle KBC = 90^\circ$ .  
Рассчитай расстояние от  $K$  к вершинам квадрата, если сторона квадрата равна 3 см, а  $KB = 18$  см.



Ответы округлить до одной десятой:

$$KA = \text{см}$$

$$KC = \text{см}$$

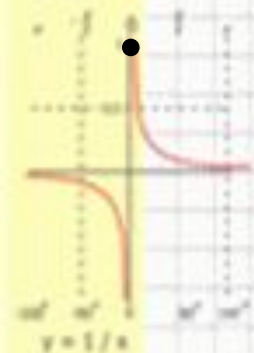
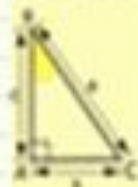
$$KD = \text{см}$$

## Домашнее задание

• П.15,16

Вопросы 1,2 (стр.57)

№116,118



2x2=4  
3x3=9  
4x4=16  
5x5=25  
6x6=36  
7x7=49  
8x8=64

2x2=4  
3x3=9  
4x4=16  
5x5=25  
6x6=36  
7x7=49  
8x8=64



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$



$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 1/2 \\ \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 \\ \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

