Определение подобных треугольников

Урок 31

Отношение. Пропорции.

Что называют отношением двух чисел? Что показывает отношение?

Отношение AB к CD равно $2 : 7$. О чем это говорит? Найдите отношение CD к AB.

В ΔABC $AB : BC : AC = 2 : 4 : 3$, $P_{ABC} = 45$ дм. Найдите стороны треугольника ABC.

Что называют пропорцией? Верны ли пропорции $1{,}5 : 1{,}8 = 25 : 30$; $18 : 3 = 5 : 30$?

В пропорции $a : b = c : d$ укажите крайние и средние члены. Сформулируйте основное свойство пропорции.

Переставив средние или крайние члены пропорции, составьте три верные пропорции:

а) $12 : 0{,}2 = 30 : 0{,}5$; б) $AB : MN = CD : KP$.

Найдите неизвестный член пропорции.

а) $7x : 4{,}2 = 12{,}3 : 6$; б) $x : AB = MN : KP$.

Определение: Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $AB : CD$.

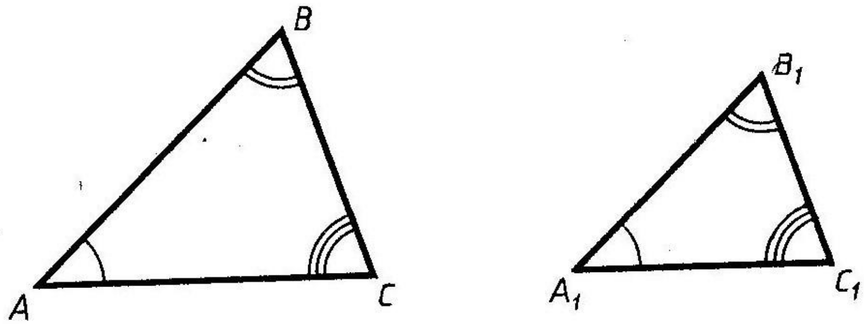
Определение: Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1}$.

Например:

Если $AB = 5$ см, $CD = 7$ см, $A_1B_1 = 7{,}5$ см, $C_1D_1 = 10{,}5$ см, то $AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1$, т.е. отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Отрезки AB, CD, MN пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и M_1N_1. Найдите C_1D_1 и MN, если $AB = 5$ см, $A_1B_1 = 20$ см, $CD = 6$ см, $M_1N_1 = 8$ см.

Подобные треугольники



AB и A1B1, BC и B1C1, CA и C1A1 — сходственные стороны

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, где k – коэффициент подобия.

Стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 называют *сходственными*.

Определение: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Отношение площадей подобных треугольников

Урок 32

Решите задачи с краткой записью

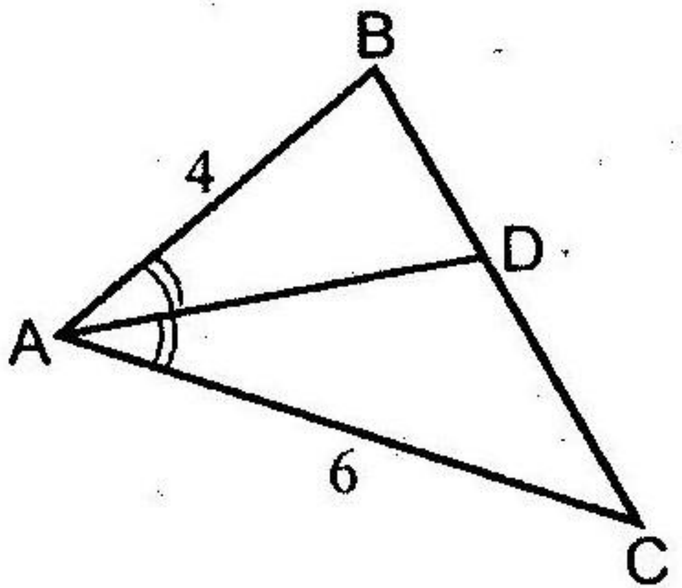


Рис. 440

1. Рис. 440. $S_{ABD} = 12$ см^2.
Найти: S_{ACD}.

Решите задачи с краткой записью

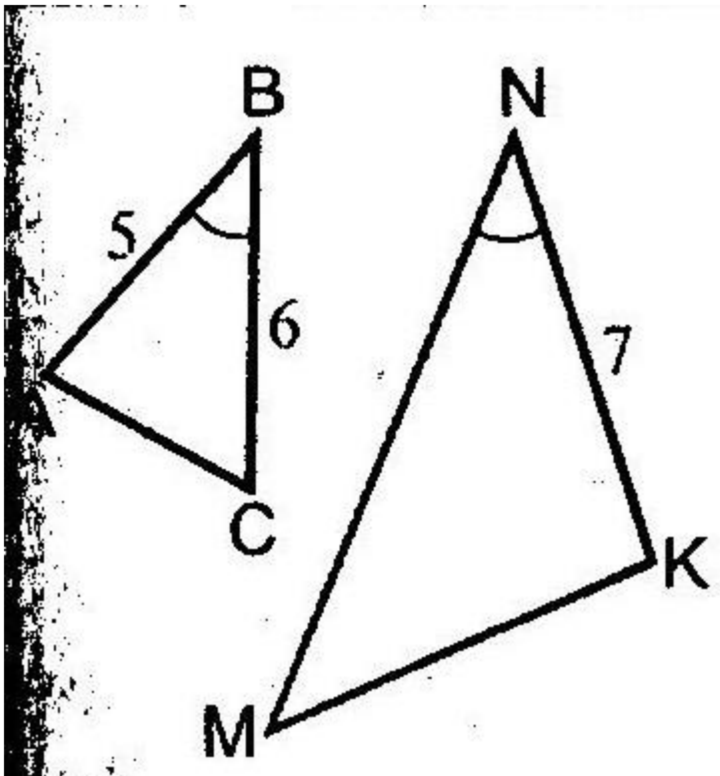


Рис. 441

2. Рис. 441. $S_{ABC} : S_{MNK} = 3 : 7$.
Найти: MN.

Решите задачи с краткой записью

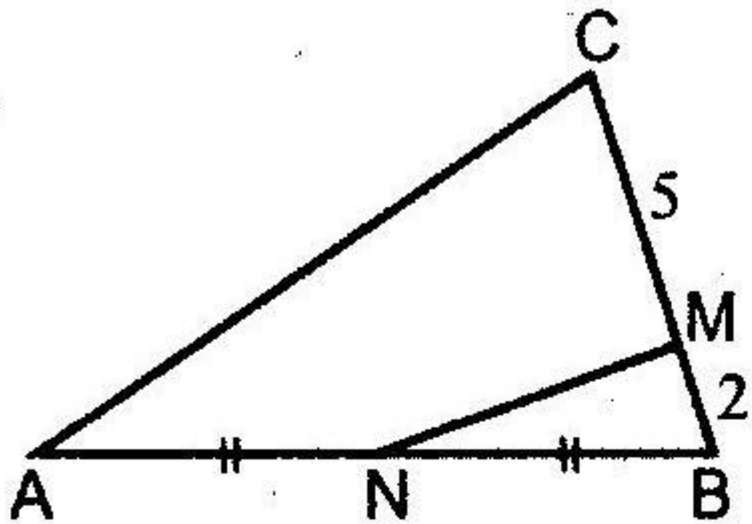


Рис. 442

3. Рис. 442. $S_{BMN} = 4$ см^2.
Найти: S_{ABC}.

Решите задачи с краткой записью

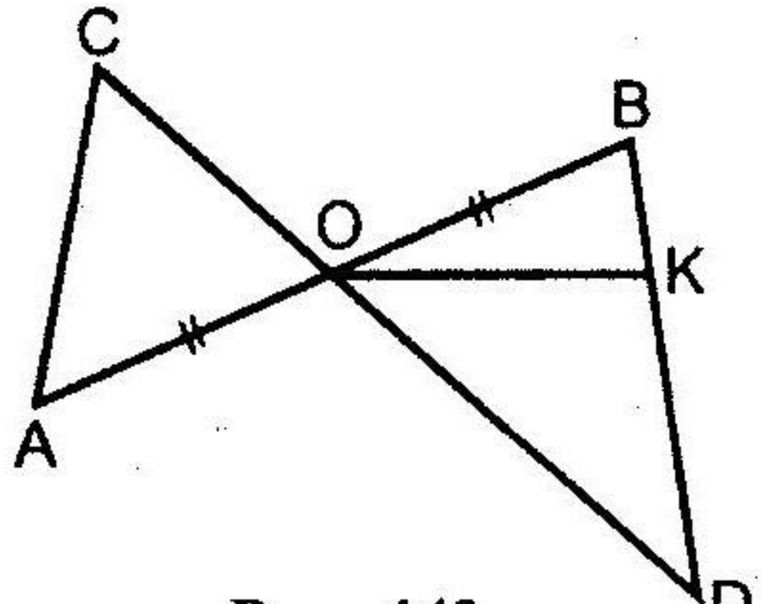


Рис. 443

4. Рис. 443. $BK : KD = 1 : 3$, $CO : OD = 2 : 3$. $S_{AOC} = 4$ см^2. *Найти*: S_{BOK}.

Решите задачи № 545, 547,548

Домашнее задание

Домашнее задание

П. 58, вопросы 4; повторить п. 52;

Решить задачи № 544, 543, 546, 549;

Дополнительные задачи

I уровень

В подобных треугольниках ABC и KMN равны углы B и M, C и N, $AC = 3$ см, $KN = 6$ см, $MN = 4$ см, $\angle A_1 = 30°$.

Найдите:

а) BC, $\angle K$;

б) отношение площадей треугольников ABC и KMN;

в) AE и BE, если известно, что CE – биссектриса треугольника ABC, $AB = 3,5$ см.

II уровень

В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 12$ см, CD – высота. Докажите, что ΔACD подобен ΔABC, найдите отношение их площадей и отрезки, на которые биссектриса угла A делит катет BC.

Первый признак подобия треугольников

Урок 33

Решение задач на готовых чертежах

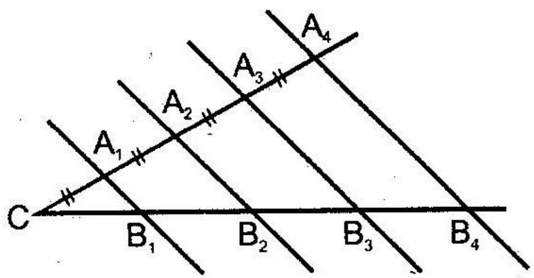
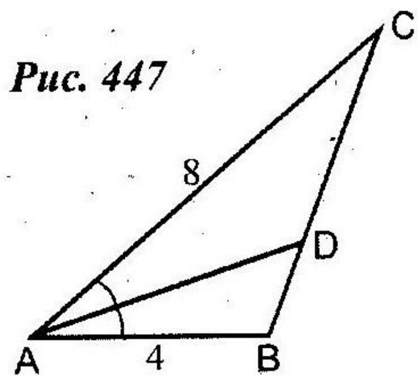


Рис. 446

Рис. 447



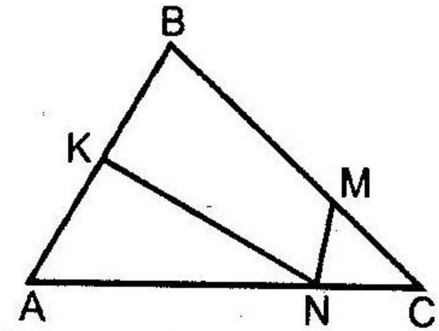


Рис. 448

1. Рис. 446.

Дано: $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $CB_4 = 12$ см, $S_{A_4B_4C} = 32$ см^2.

Найти: а) B_1B_2, B_2B_4; б) $S_{A_3B_3C}$.

2. Рис. 447.

Дано: ΔABC, AD – биссектриса, $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.

Найти: а) BD, CD; б) $S_{ABC} : S_{ABD}$.

3. Рис. 448.

Дано: $S_{ABC} = 36$ см^2, $AN : NC = 3 : 1$, $BM : MC = 2 : 1$, $AK = KB$.

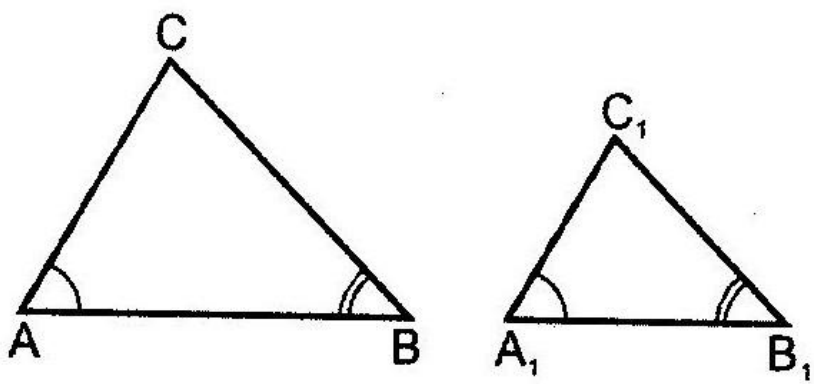
Найти: а) S_{CMN}; б) S_{AKN}; в) S_{BKNM}.

Первый признак подобия треугольников

Т е о р е м а. ***Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.***

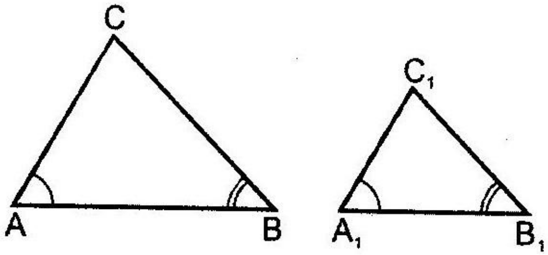
Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Первый признак подобия треугольников

Т е о р е м а. ***Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.***



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1$.

2) $\angle A = \angle A_1$, тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AC \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$. (1)

3) $\angle C = \angle C_1$, тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AC \cdot BC}{A_1C_1 \cdot B_1C_1}$. (2)

4) Из (1) и (2) следует $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$. (3)

5) Т. к. $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$, то $BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$. (4)

6) Из (3) и (4) следует $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Решить задачу 551а)

План решения задачи:

1) Доказать, что $\Delta AED \sim \Delta FEC$.
2) Найти сходственные стороны этих треугольников и коэффициент подобия.
3) Найти EF и FC.

Краткое решение (рис. 450):

$\Delta AED \sim \Delta FEC$ ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$, т. к. $BC \parallel AD$) $\Rightarrow k = \frac{AE}{FE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{FC}$.

Так как $\frac{ED}{EC} = \frac{8}{4} = 2$, то $k = 2 \Rightarrow$

$\frac{AE}{FE} = 2$ и $FE = \frac{AE}{2} = 5$ (см). $\frac{AD}{FC} = 2$ и $FC = \frac{AD}{2} = 3,5$ (см).

Ответ: $FC = 3,5$ см, $FE = 5$ см.

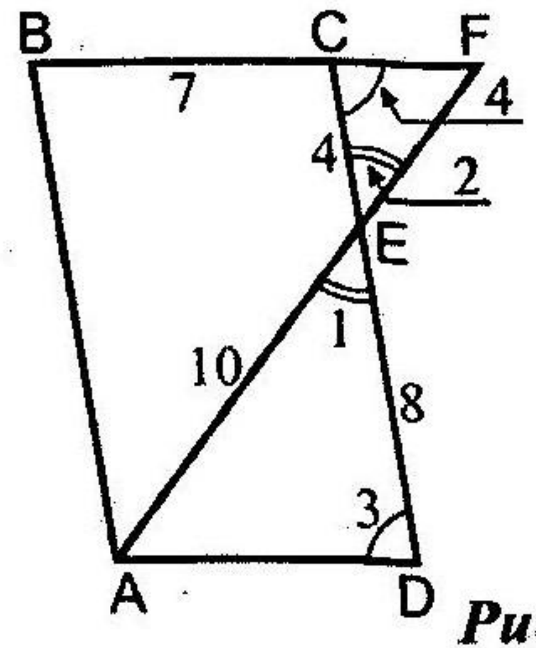


Рис. 450

Решение задачи № 555 а)

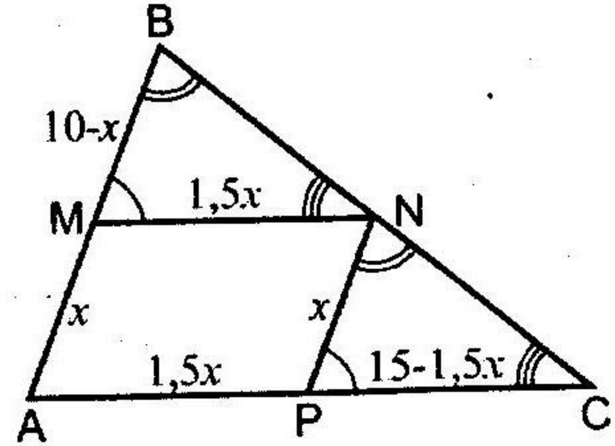


Рис. 451

Краткое решение (рис. 451):

$AMNP$ – параллелограмм. $\dfrac{PN}{MN}=\dfrac{2}{3}$, тогда $PN=x$, $MN=1{,}5x$.

$PC=15-1{,}5x$; $BM=10-x$.

$\Delta PNC\sim\Delta MBN \Rightarrow \dfrac{PC}{MN}=\dfrac{PN}{BM} \Rightarrow \dfrac{15-1{,}5x}{1{,}5x}=\dfrac{x}{10-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=5$ см, $PN=5$ см, $MN=7{,}5$ см.

Ответ: 5 см; 7,5 см.

Дополнительная задача:

На продолжении сторон DC (за точку C) и BA (за точку A) параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и E. KE пересекает сторону BC в точке M, а сторону AD – в точке F. Докажите, что $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

Дополнительная задача:

На продолжении сторон DC (за точку C) и BA (за точку A) параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и E. KE пересекает сторону BC в точке M, а сторону AD – в точке F. Докажите, что $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

Решение (рис. 452):

$\Delta AEF \sim \Delta CKM$ по двум углам ($\angle E = \angle K$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей EK; $\angle AFE = \angle MFD$, $\angle KMC = \angle BMF$ как вертикальные, а $\angle MFD = \angle BMF$ как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей MF).

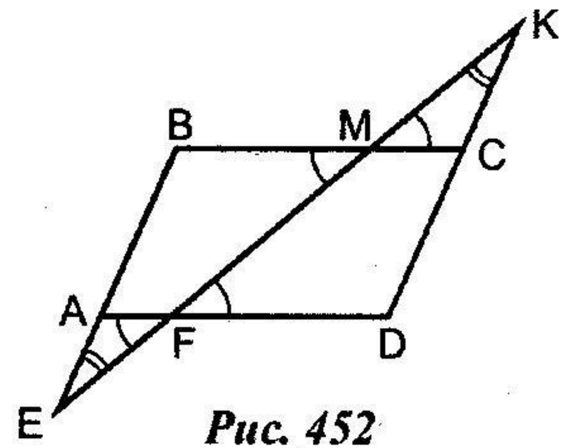


Рис. 452

Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональные, поэтому $\frac{AE}{CK} = \frac{EF}{KM} = \frac{AF}{CM}$, т. е. $AE : CK = AF : CM$, откуда $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

Домашнее задание

П. 49, вопрос 5;

Решить задачи № 550, 551 б), 553, 555 б).

Дополнительная задача

В остроугольном треугольнике ABC BD и AE – высоты. Докажите, что $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

Решение задач на применение первого признака подобия треугольников

Урок 34

- Какие треугольники называются подобными?
- Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
- Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.
- Чему равно отношение периметров подобных треугольников?
- Сформулируйте теорему о биссектрисе треугольника.

Решение задач по готовым чертежам.

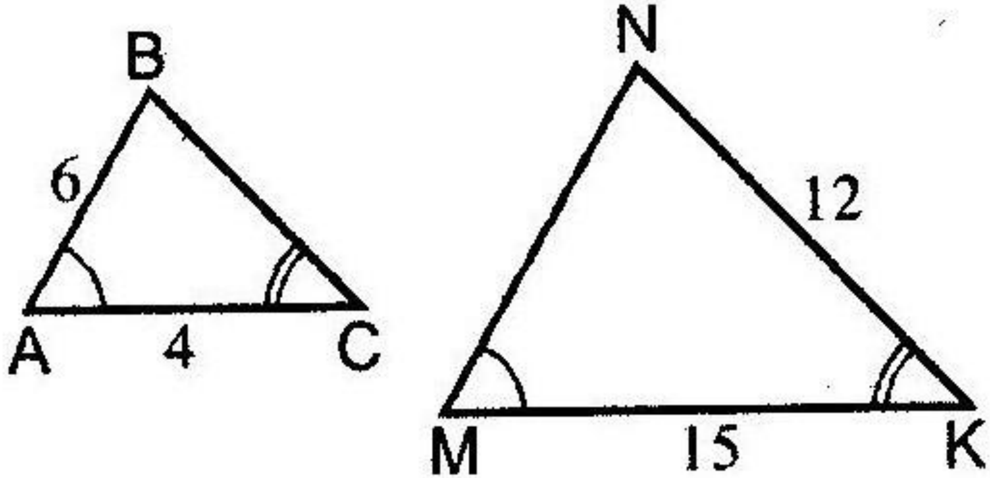


Рис. 453

1. Рис. 453. *Найти*: BC, MN.

Решение задач по готовым чертежам.

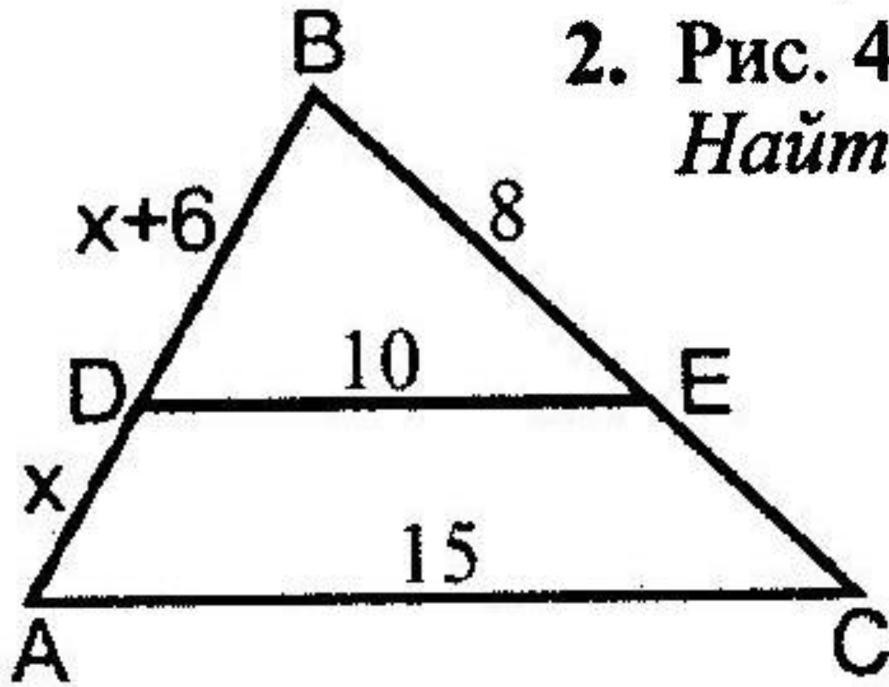


Рис. 454

2. Рис. 454. *Дано*: $DE \parallel AC$.
Найти: AB, BC.

Решение задач по готовым чертежам.

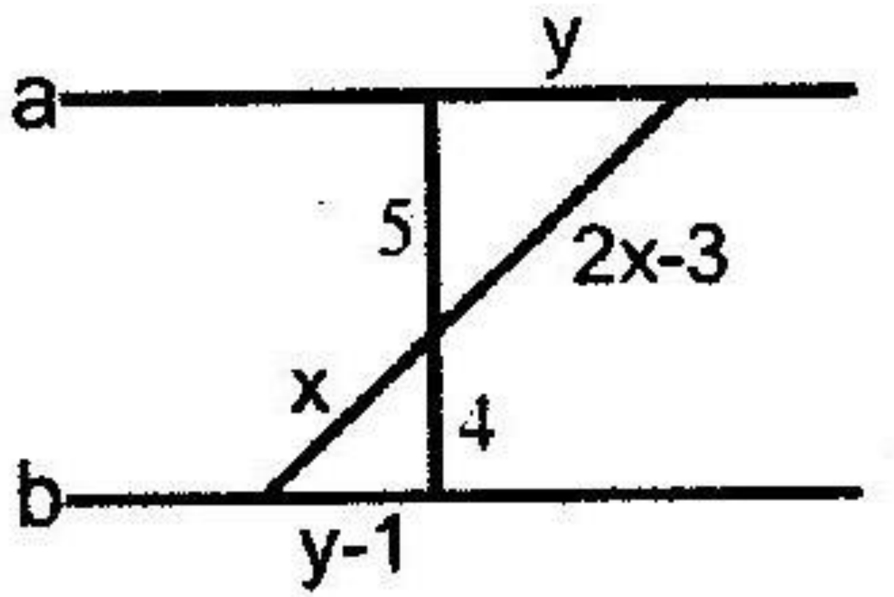


Рис. 455

3. Рис. 455. *Дано*: $a \parallel b$.
Найти: x, y.

Решение задач по готовым чертежам.

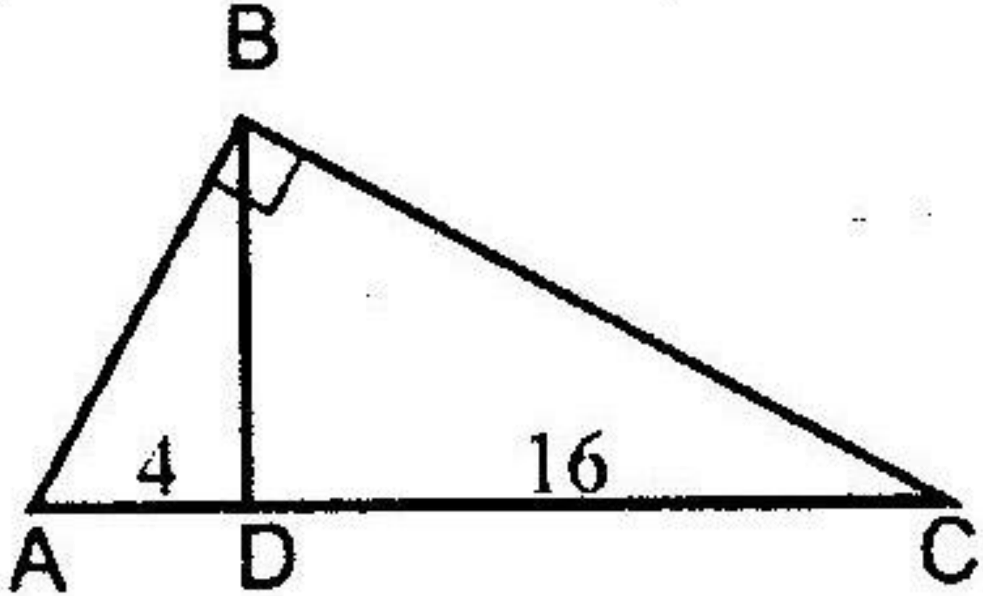


Рис. 456

4. Рис. 456.
Найти: *BD*.

Решение задач по готовым чертежам

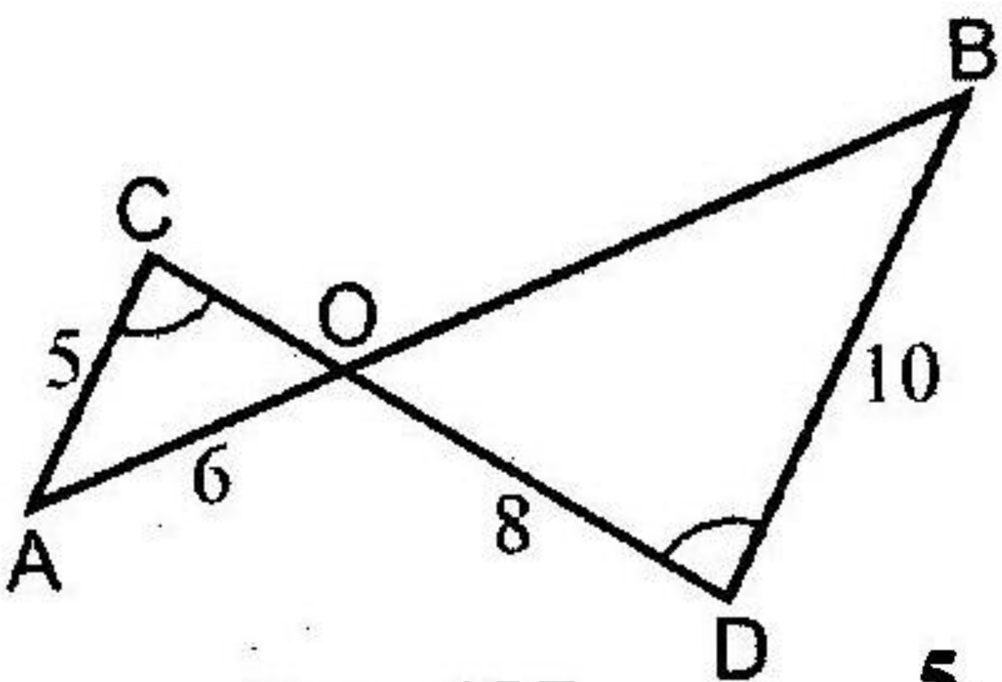


Рис. 457

5. Рис. 457.
Найти: CO, BO.

Решение задач по готовым чертежам.

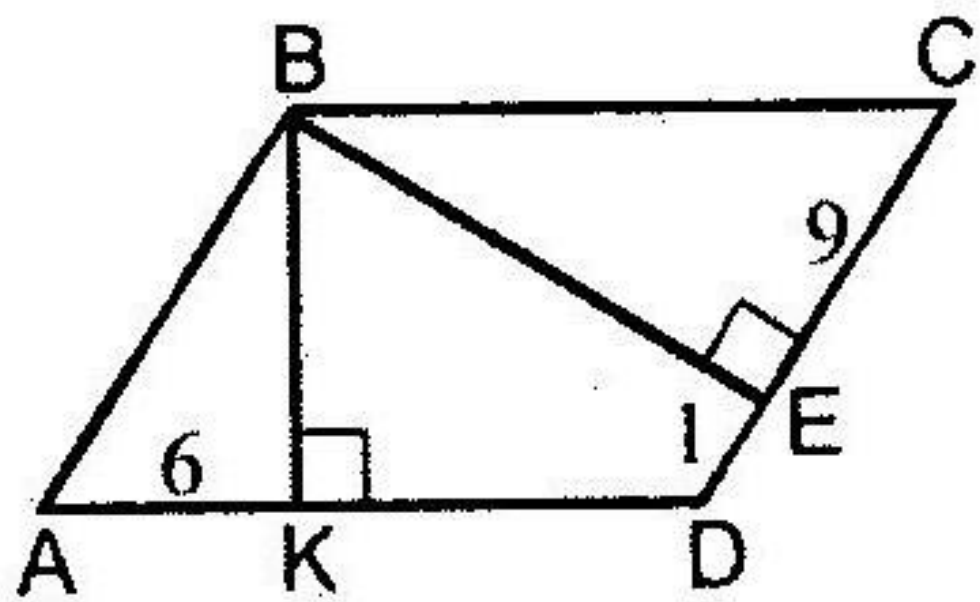


Рис. 458

6. Рис. 458.
Найти: BC.

Ответы к задачам:

1. $BC = 3{,}2$, $MN = 22{,}4$;
2. $AB = 18$, $BC = 12$;
3. $x = 4$, $y = 5$;
4. $BD = 8$;
5. $CO = 4$, $BO = 12$;
6. $BC = 15$.

- Решить задачи № 554, 556 с подробным обоснованием всех шагов решения.
- Решить задачу № 557а) полуустно
- Самостоятельное решение задач № 557б), 552в)

Дополнительная задача

Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Периметры треугольников BOC и AOD относятся как $2:3$, $AC = 20$.

Домашнее задание

Повторить п. 59;

Решить задачи № 552 а), б), 557 в), 558, № 556.

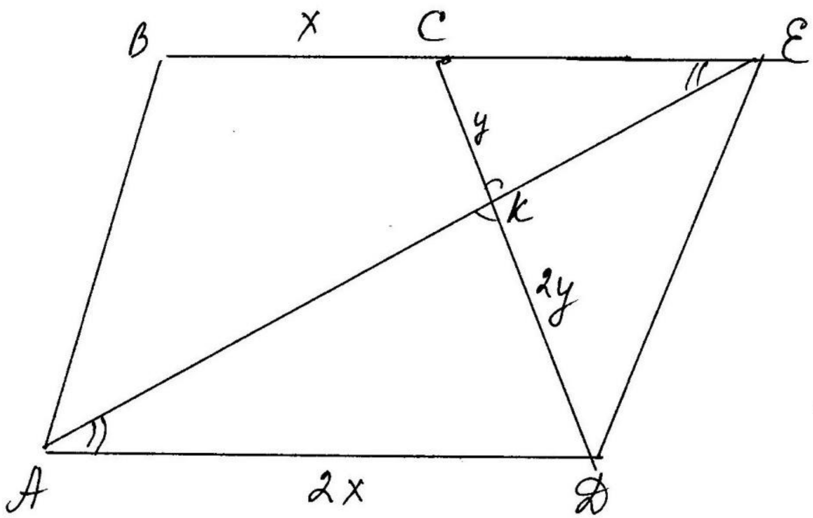
Дополнительная задача:

В трапеции $ABCD$ (AD и BC – основания) точка K лежит на стороне CD, причем $CK : KD = 1 : 2$. AK пересекает BD в точке O. Докажите, что если $BC : AD = 1 : 2$, $BO = OD$.

Второй и третий признаки подобия треугольников

Урок 35

Решение дополнительной задачи.



Дано: ABCD – трапеция, $K \in CD$, $CK:KD = 1:2$, $AK \cap BD = O$, $BC:AD = 1:2$

Д-ть: $BO = OD$.

Решение.

1. Продолжим AK до пересечения с BC в т. E.
2. Рассм. $\triangle AKD$ и $\triangle EKC$.

$\left.\begin{array}{l} \angle CKE = \angle AKD \text{ (верт.)} \\ \angle CEK = KAD \text{ (н/л.)} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AKD \sim \triangle EKC$ (УУ). $\Rightarrow \dfrac{KD}{CK} = \dfrac{AD}{CE}$; $\dfrac{2y}{y} = \dfrac{2x}{CE}$;

$CE = \dfrac{\cancel{2}x \cdot \cancel{y}}{\cancel{2y}} = x.$

3). $\left.\begin{array}{l} BE = x + x = 2x \\ AD = 2x \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} BE = AD \\ BE \parallel AD \end{array}\right| \Rightarrow$ ABED – параллел.

$\Rightarrow$ диагонали в точке пересечения делятся пополам $\Rightarrow BO = OD$, ч.т.д.

Решение задач (в тетради записать краткое решение)

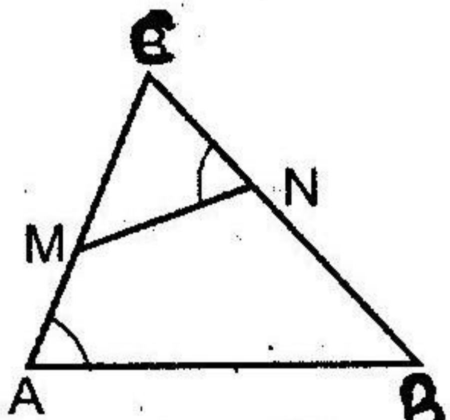


Рис. 463

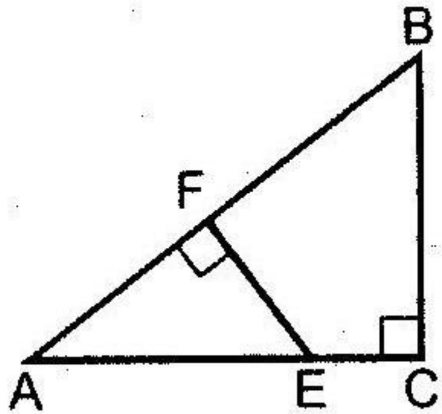


Рис. 464

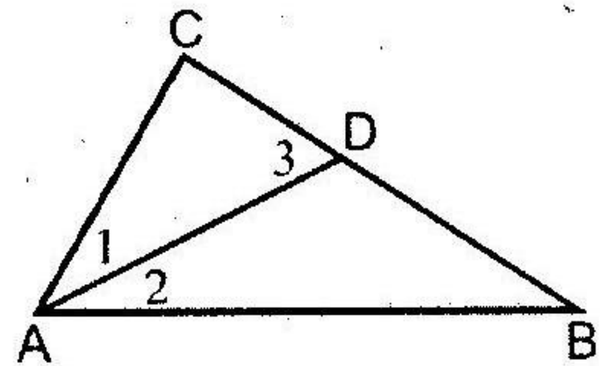


Рис. 465

1. Рис. 463. $\angle N = \angle A$, $BC = 12$ см, $CM = 6$ см, $CN = 4$ см.
   Найти: AC.
2. Рис. 464.
   $BC \perp AC$, $EF \perp AB$, $BC = 12$ см, $EF = 6$ см, $AE = 10$ см.
   Найти: AB.
3. Рис. 465. $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$ см, $BC = 9$ см.
   Найти: AC.

Решение задач:

1. $\Delta ABC \sim \Delta NMC \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{MC} = \dfrac{AC}{NC} \Rightarrow \dfrac{AB}{NM} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{AC}{4}$, откуда

$AC = 12 \cdot 4 : 6 = 8$ см.

Ответ: $AC = 8$ см.

2. $\Delta ABC \sim \Delta AEF \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{AF} \Rightarrow \dfrac{AB}{10} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{AC}{AF}$, откуда

$AB = 10 \cdot 12 : 6 = 20$ см.

Ответ: $AC = 6$ см.

3. $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = \angle CAB \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta BCA \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{AD}{BA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{9} = \dfrac{4}{CA} = \dfrac{AD}{BA}$, откуда $AC_2 = 36$, $AC = 6$ см ($AC > 0$).

Ответ: $AC = 6$ см.

Второй признак подобия треугольников

Теорема: Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство (рис. 466):

а) $\Delta ABC_2 : \angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$.

б) $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, отсюда $AB : A_1B_1 = AC_2 : A_1C_1$.

в) Так как $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$ (по условию) и $AB : A_1B_1 = AC_2 : A_1C_1$, следовательно, $AC = AC_2$.

г) $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (AB – общая сторона, $AC = AC_2$, $\angle A = \angle 1$) $\Rightarrow \angle B = \angle 2 = \angle B_1$.

д) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

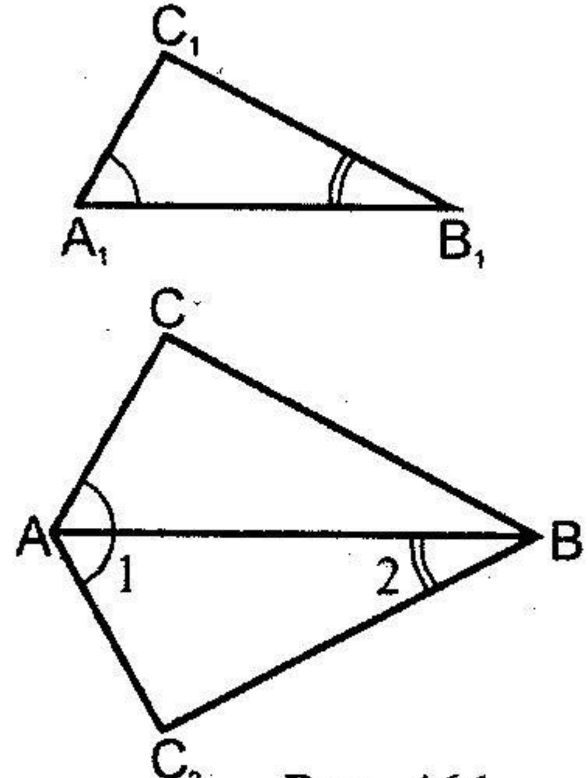


Рис. 466

...ретий признак подобия треугольников

Теорема: Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

План-конспект доказательства теоремы.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство (рис. 467):

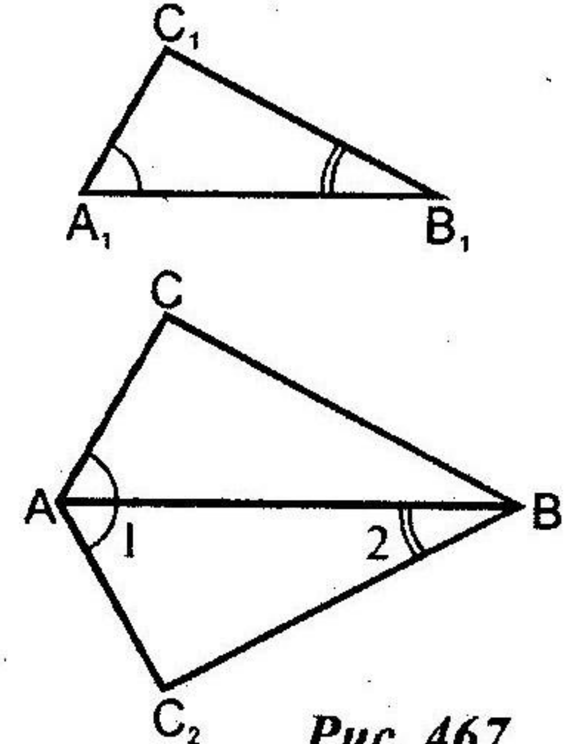


Рис. 467

а) $\Delta ABC_2 : \angle 1 = \angle A_1, \angle 2 = \angle B_1$.

б) $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC_2}{B_1C_1}=\dfrac{C_2A}{C_1A_1}$.

в) $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ (по условию) и

$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC_2}{B_1C_1}=\dfrac{C_2A}{C_1A_1}$ (п. 2), отсюда $BC = BC_2$, $CA = C_2A$.

г) $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (AB – общая сторона, $BC = BC_2$, $CA = C_2A$), отсюда $\angle A = \angle 1$, $\angle 1 = \angle A_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1$.

д) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ($AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

- Решить задачи № 559, 560 (записать краткое решение)
- Решить задачи с полным, подробным обоснованием всех шагов решения

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, BE и B_1E_1 – биссектрисы, $\angle B = \angle B_1$, $AE : EC = A_1E_1 : E_1C_1$. *Докажите*, что $\Delta ABE \sim \Delta A_1B_1E_1$.

2. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. Точка E лежит на стороне AB. Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 5{,}25$, $ME = 4{,}5$, $AE = 1$. Прямая BM пересекает AC в точке P. *Докажите*, что ΔAPB равнобедренный.

Решение задач по готовым чертежам

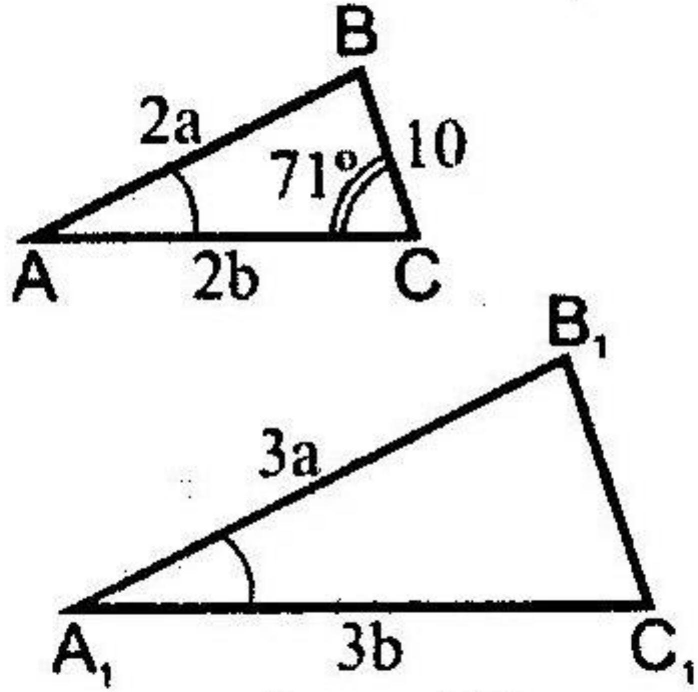


Рис. 469

1. Рис. 469.

Найти: $\angle C_1$, B_1C_1.

Решение задач по готовым чертежам

2. Рис. 470.

Найти: $\angle C, \angle C_1$.

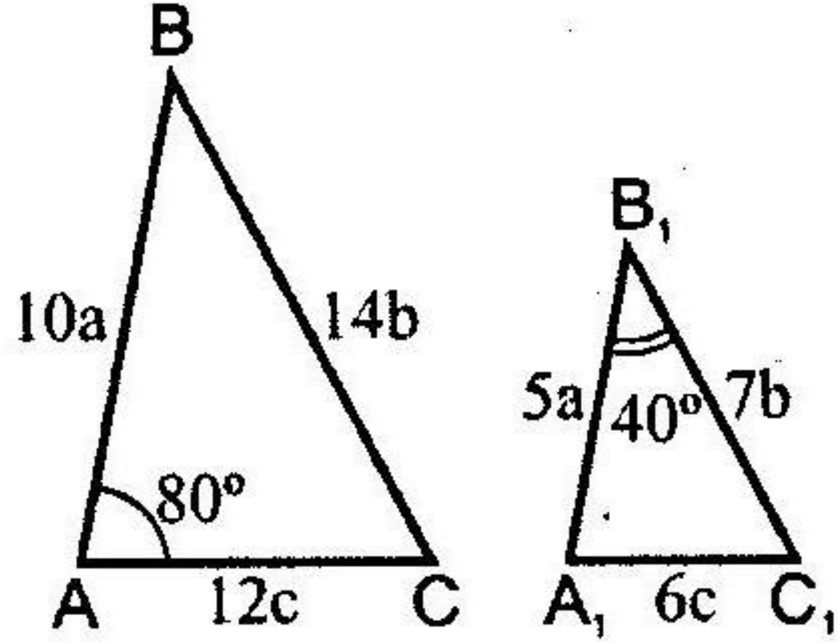


Рис. 470

Решение задач по готовым чертежам

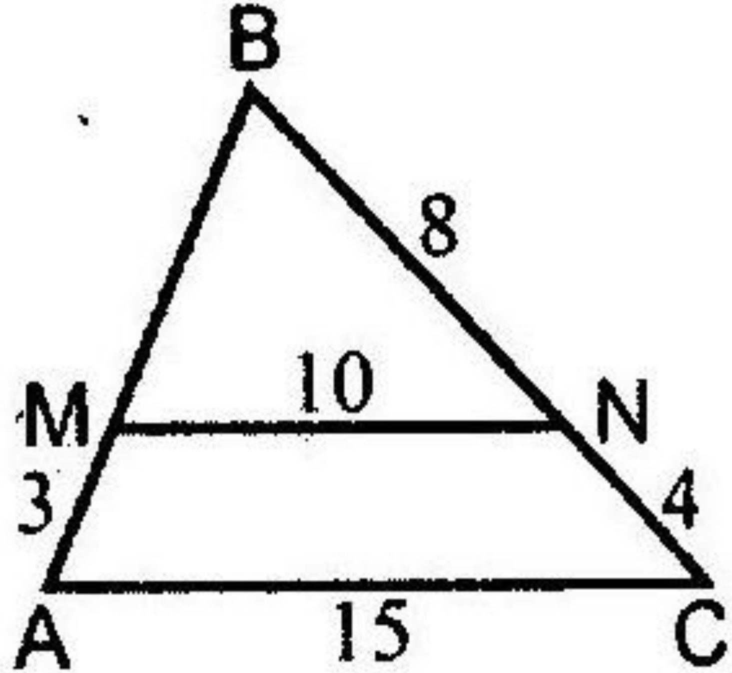


Рис. 471

3. Рис. 471.
Найти: ВМ.

Решение задач по готовым чертежам

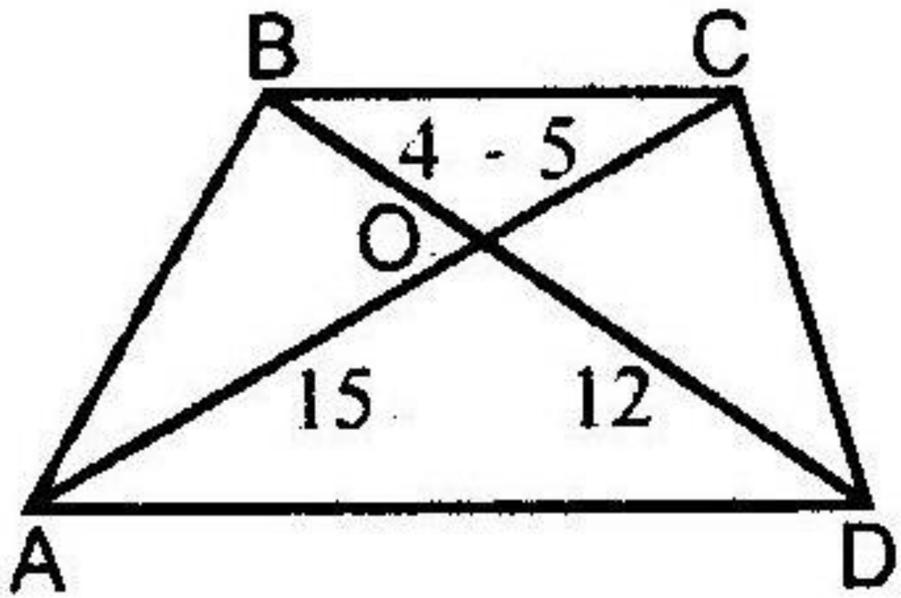


Рис. 472

4. Рис. 472.
Найти: ВС.

Решение задач по готовым чертежам

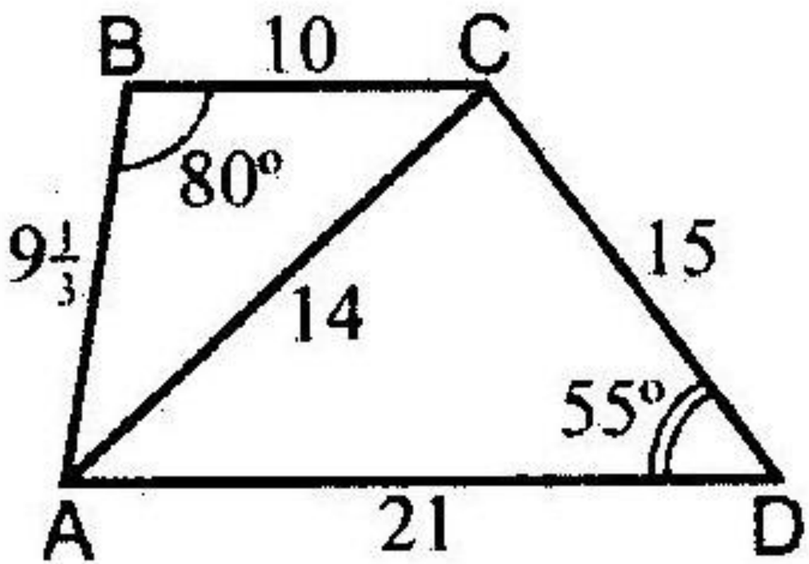


Рис. 473

5. Рис. 473.
Найти: $\angle BDA$.

Решение задач по готовым чертежам

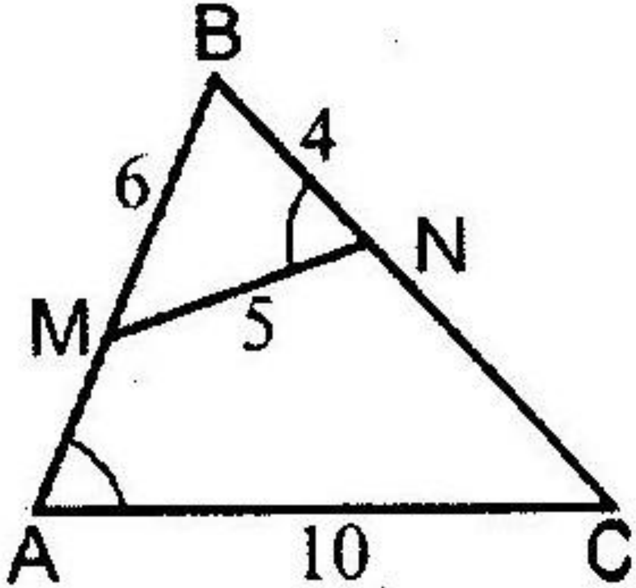


Рис. 474

6. Рис. 474.
Найти AB, NC.

Ответы к задачам

1. $\angle C_1 = 71°$, $B_1C_1 = 15$ см;
2. $\angle C = \angle C_1 = 60°$;
3. $BM = 6$;
4. $BC = 20/3$;
5. $\angle BDA = 90°$;
6. $AB = 8$, $NC = 8$.

Дополнительные задачи

1. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) делит ее на два подобных треугольника. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $AC = 15$ см.
(*Ответ*: $S_{ABCD} = 204$ см^2.)
2. Угол B треугольника ABC в два раза больше угла A. Биссектриса угла B делит сторону AC на части $AD = 6$ см и $CD = 3$ см. Найдите стороны треугольника ABC.
(*Ответ*: $AC = 9$ см, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см.)

Домашнее задание

- П.60,61, вопросы 6,7;
- Решить задачи № 562, 563,604, 605

Дополнительная задача

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BD и B_1D_1 – медианы, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$. Докажите, что треугольник BDC подобен треугольнику $B_1D_1C_1$.