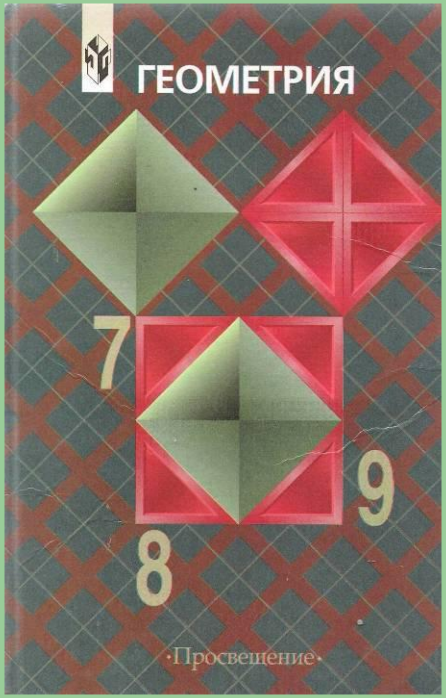
Решение треугольников



Геометрия 9 класс

Тест на определение истинности (ложности) утверждения

1. В треугольнике против угла в 150º лежит большая сторона.
2. В равностороннем треугольнике внутренние углы равны между собой и каждый равен 60º.
3. Существует треугольник со сторонами 2 см, 7 см, 3 см.
4. Прямоугольный равнобедренный треугольник имеет равные катеты.
5. Сумма длин двух других сторон любого треугольника меньше третьей стороны.
6. Если острый угол прямоугольного треугольника равен 60º, то прилежащий к нему катет равен половине гипотенузы.
7. Существует треугольник с двумя тупыми углами.
8. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90º.

Тест на определение истинности (ложности) утверждения

1. **И** В треугольнике против угла в 150º лежит большая сторона.
2. **И** В равностороннем треугольнике внутренние углы равны между собой и каждый равен 60º.
3. **Л** Существует треугольник со сторонами 2 см, 7 см, 3 см.
4. **И** Прямоугольный равнобедренный треугольник имеет равные катеты.
5. **Л** Сумма длин двух других сторон любого треугольника меньше третьей стороны.
6. **И** Если острый угол прямоугольного треугольника равен 60º, то прилежащий к нему катет равен половине гипотенузы.
7. **Л** Существует треугольник с двумя тупыми углами.
8. **И** В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90º.

Немного из истории

В 10 в. багдадский ученый Мухаммед из Буджана, известный под именем Абу-ль-Вефа сформулировал теорему синусов. Насир-эд-Дин из Туса (1201-1274) систематически рассмотрел все случаи решения косоугольных сферических треугольников и указал ряд новых способов решения. В 12 в. был переведен с арабского на латынь ряд астрономических работ, что позволило ознакомиться с ними европейцам. Но, к сожалению, многое осталось непереведенным, и выдающийся немецкий астроном и математик Иоганн Мюллер (1436 -1476), которого современники знали под именем Региомонтана (именно так переводится на латынь название его родного города Кенигсберга), через 200 лет после Насир-эд-Дина заново открыл его теоремы.

ФРАНСУА ВИЕТ (1540 – 1603)

Виет встал у истоков создания новой науки - тригонометрии. Многие тригонометрические формулы впервые были записаны Виетом.

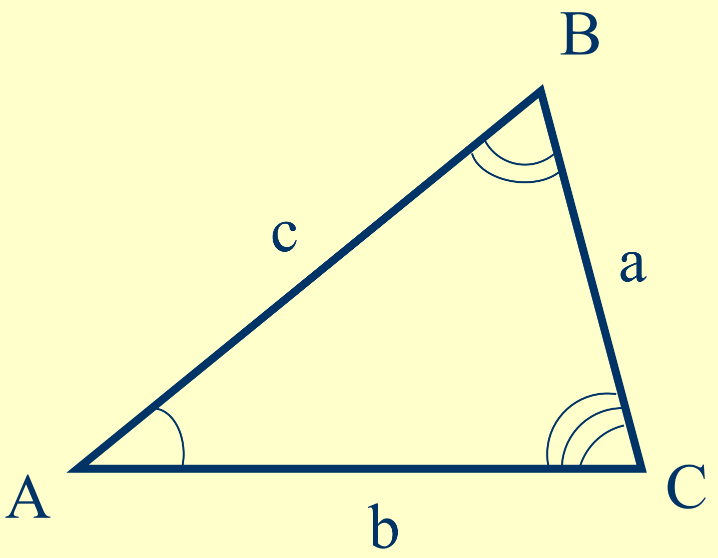
В 1593 году он первым сформулировал в словесной форме теорему косинусов.

Косинус – это сокращение латинского выражения completelysinus, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”; cosa = sin(90° - a)).

Современные обозначения синуса и косинуса знаками sin x и cos x были впервые введены в 1739 году И. Бернулли в письме к петербургскому математику Л. Эйлеру. Придя к выводу, что эти обозначения весьма удобны, он стал употреблять их в своих математических работах. Кроме того, Эйлер вводит следующие сокращенные обозначения тригонометрических функций угла x: tang x, cot x, sec x, cosec x.

Определение

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (то есть трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам.



Для этого вспомним

Решение данных задач основано на использовании теорем синуса и косинуса, теоремы о сумме углов треугольника и следствии из теоремы синусов: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Причем, при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов.

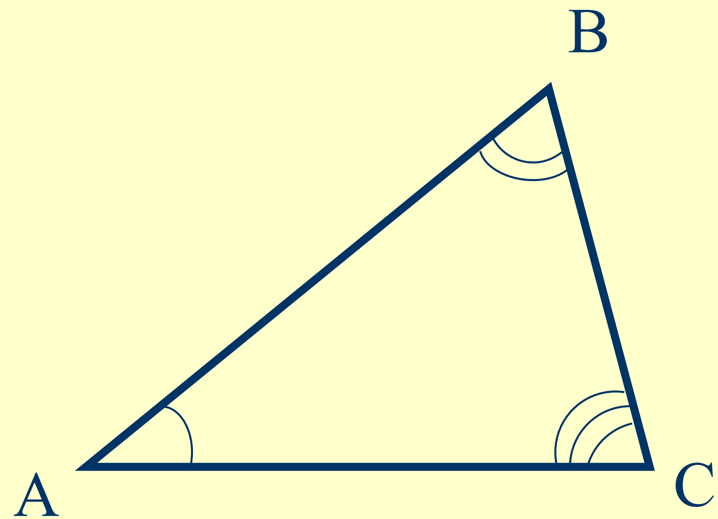
Соотношения между сторонами и углами в треугольнике

1. Сумма углов треугольника.
2. Теорема синусов.
3. Теорема косинусов.

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180º

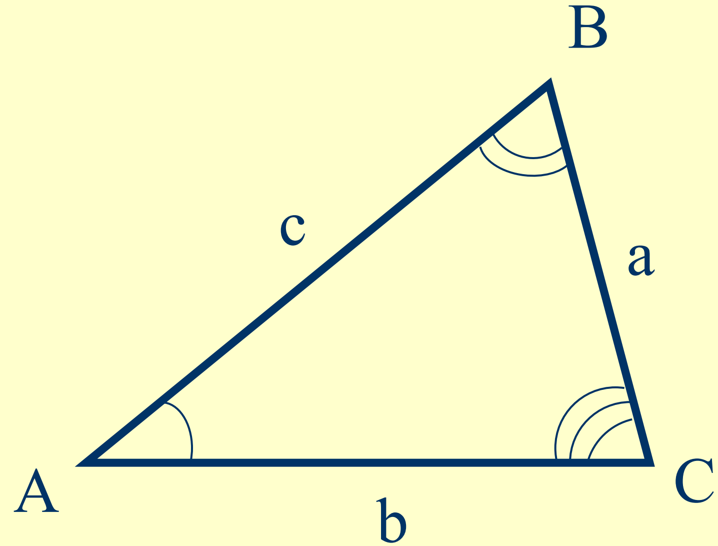
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

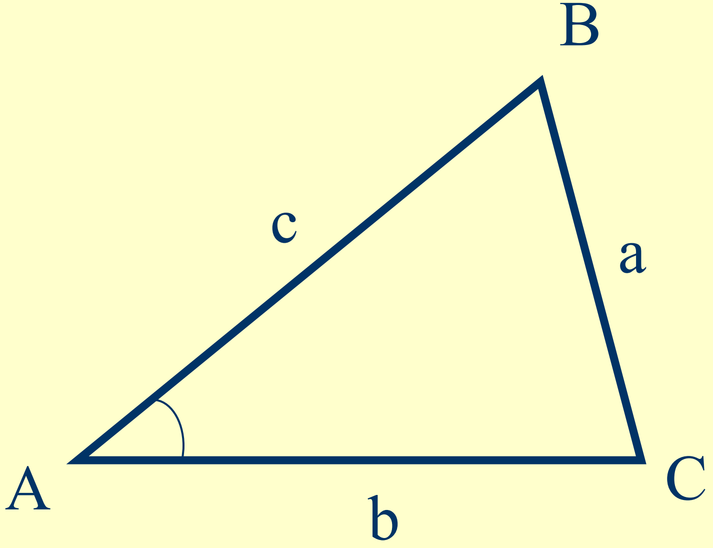
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



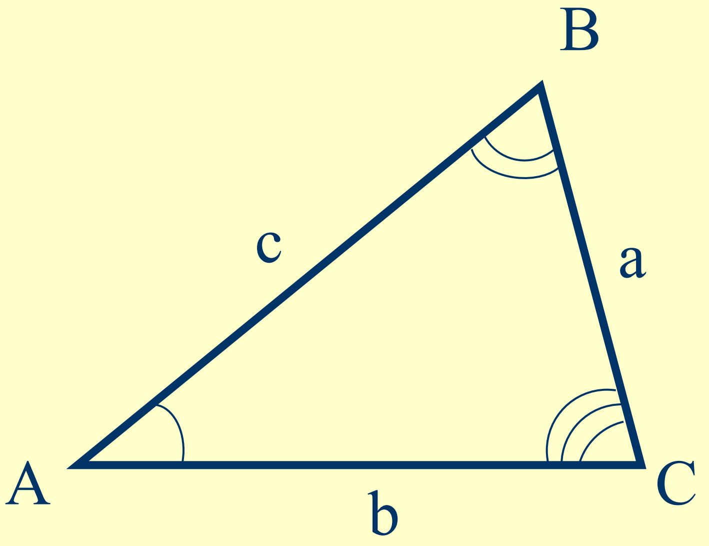
Три задачи на решение треугольника

Рассмотрим 3 задачи на решение треугольника:

- решение треугольника по двум сторонам и углу между ними;
- решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам;
- решение треугольника по трем сторонам.

При решении треугольников будем пользоваться следующими обозначениями для сторон треугольника *ABC*:

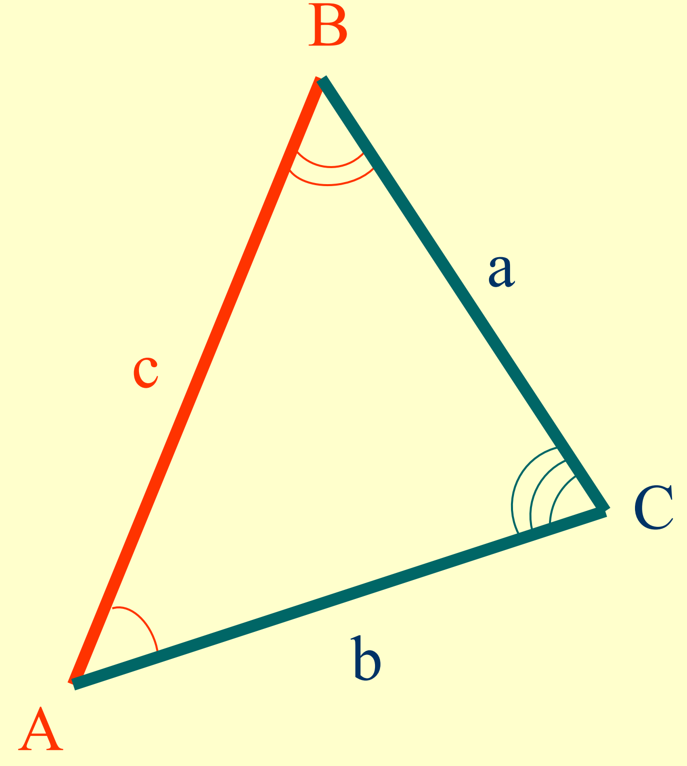
AB = c, BC = a, CA = b.



Задача 1. *Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними*

Дано: ΔABC, a, b, ∠C

Найти: c, ∠A, ∠B.



<u>Задача 1</u>. *Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними*

1. Применим <u>теорему косинусов</u>

$$\tilde{n} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

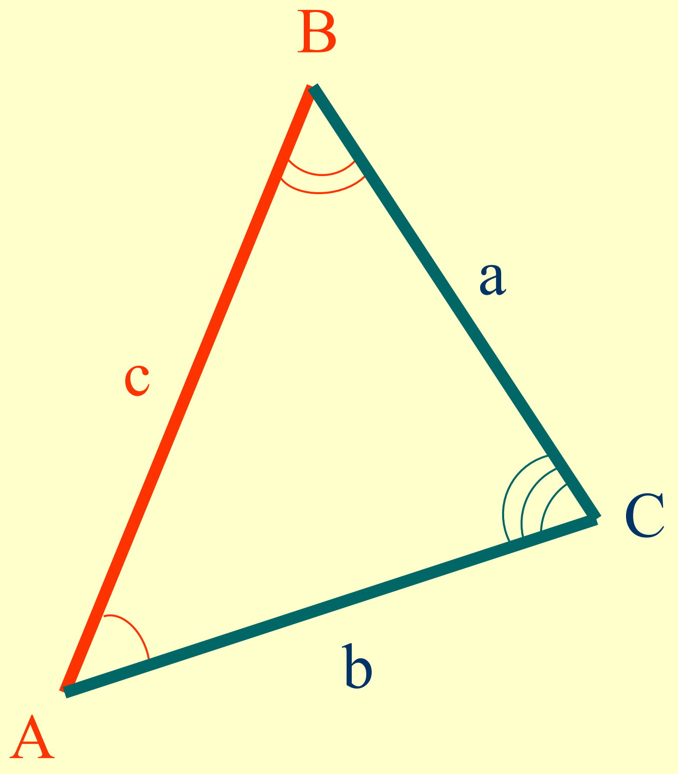
2. По <u>теореме косинусов</u> находим

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

3. Угол *A* находим с помощью таблицы Брадиса

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$$

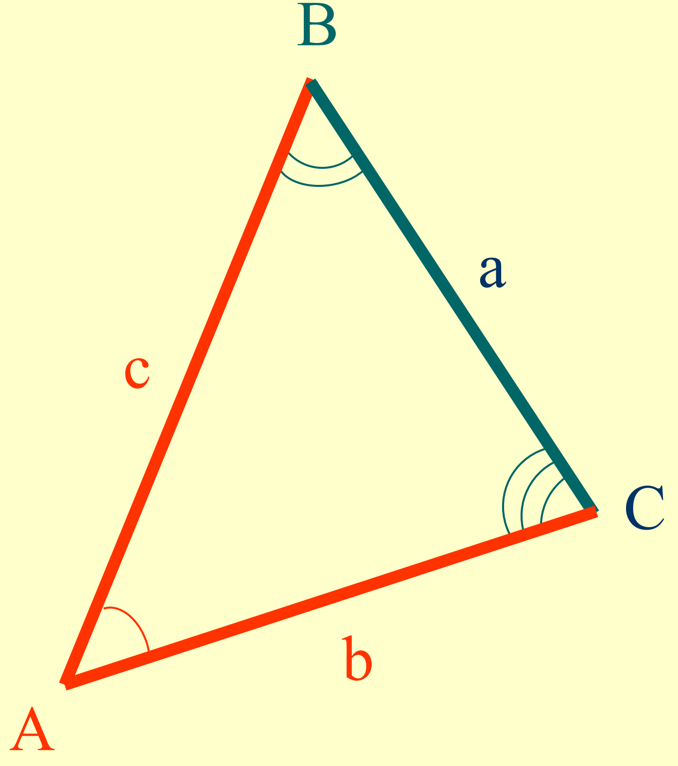
4. Запишем ответ



<u>Задача 2</u>. *Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам*

Дано: ΔABC, a, $\angle B$, $\angle C$

Найти: b, c, $\angle A$



Задача 2. *Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам*

1. Найдём неизвестный угол

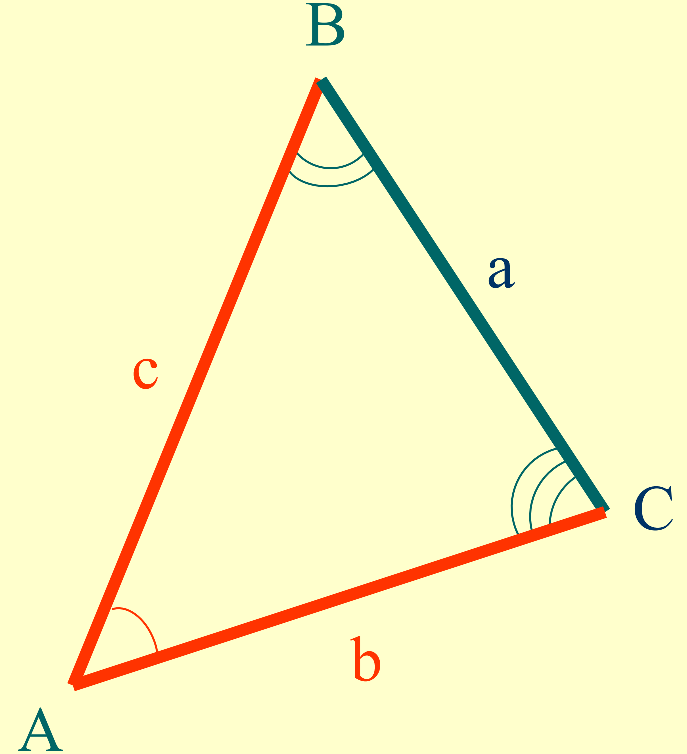
$$\angle A = 180^\circ - \left(\angle B + \angle C\right)$$

2. С помощью теоремы синусов:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\tilde{n} = \frac{a \sin \tilde{N}}{\sin A}$$

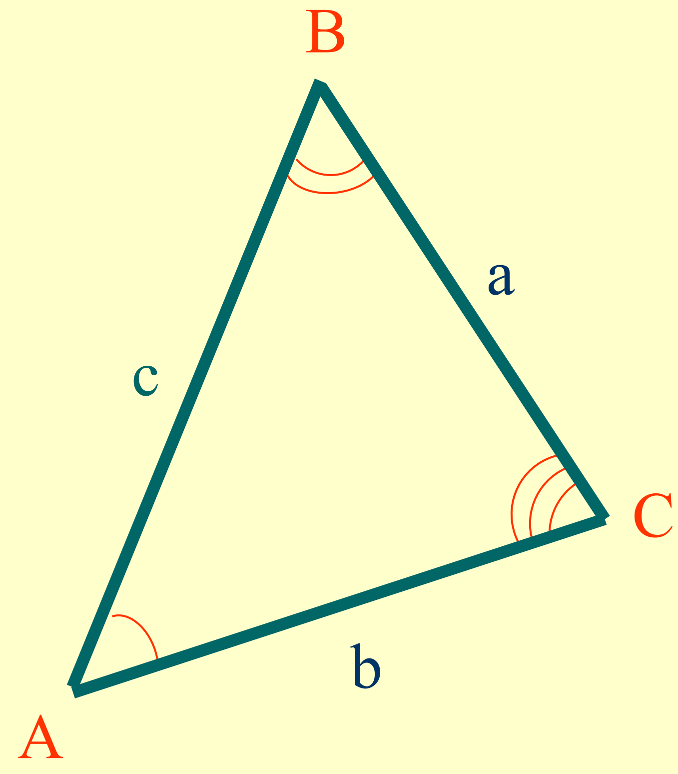
3. Запишем ответ



<u>Задача 3</u>. *Решение треугольника по трём сторонам*

Дано: ΔABC, a, b, c

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.



Задача 3. *Решение треугольника по трём сторонам*

1. По теоремe косинусов найдём

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

2. Значения углов А и В находим с помощью таблицы Брадиса.
3. Находим оставшийся угол

$$\angle B = 180^\circ - \left(\angle A + \angle C\right)$$

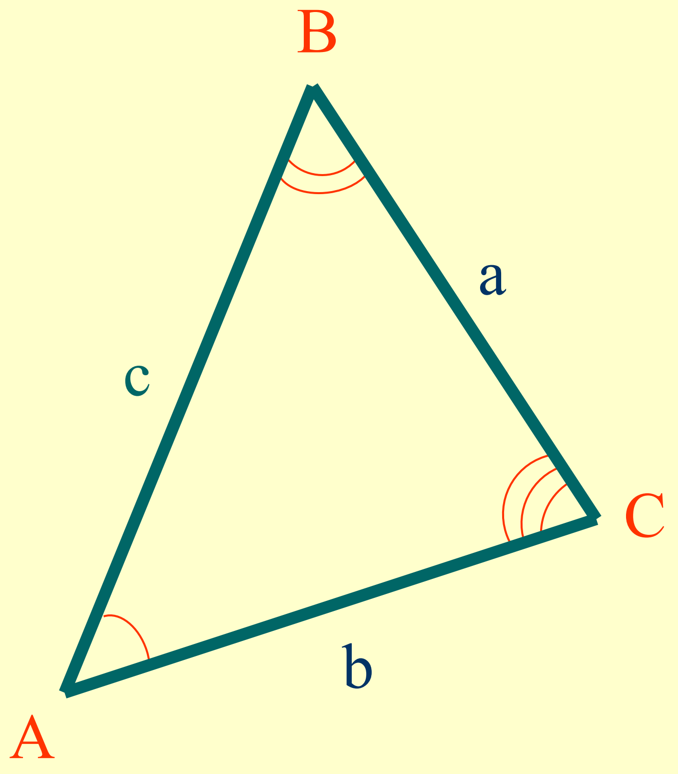
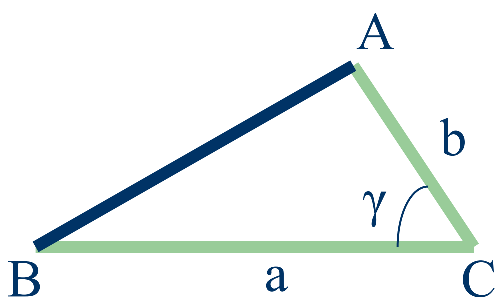
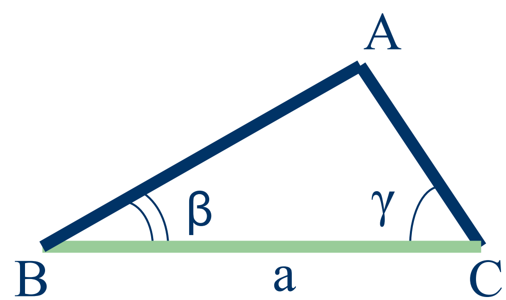
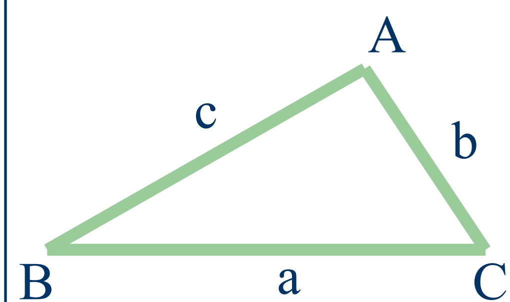
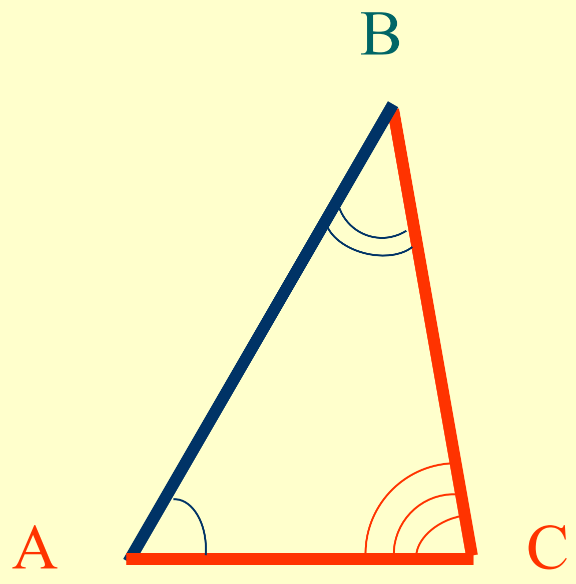


Таблица – памятка

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними	Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам	Решение треугольника по трем сторонам
		
$\tilde{n}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$	$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$ $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ $\tilde{n}=\dfrac{a\sin \tilde{N}}{\sin A}$	$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$ $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$

Решаем задачу 1

Решить треугольник ABC, если $\angle A=60^{\circ}$ $\angle B=40^{\circ}$, c=14см.

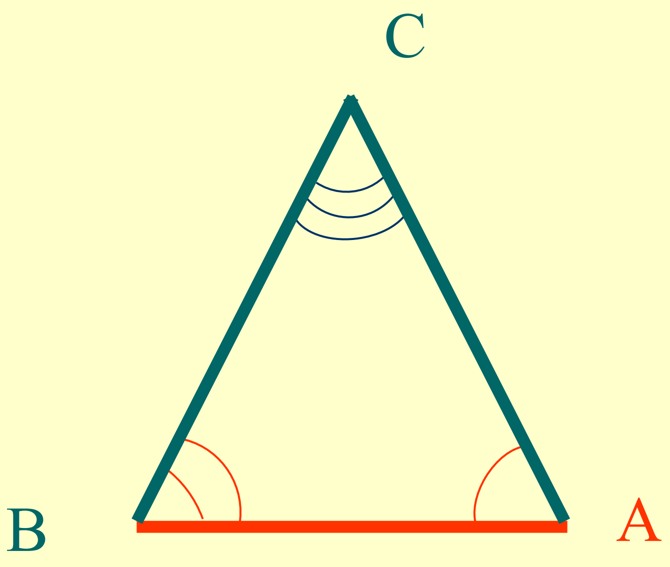


Дано: ΔABC, $\angle A=60^{\circ}$, $\angle B=40^{\circ}$, c=14см.
Найти: a, b, $\angle C$.

Ответ

Решаем задачу 2

Решить треугольник ABC, если a=6,3 см, b=6,3 см, ∠C=54º.

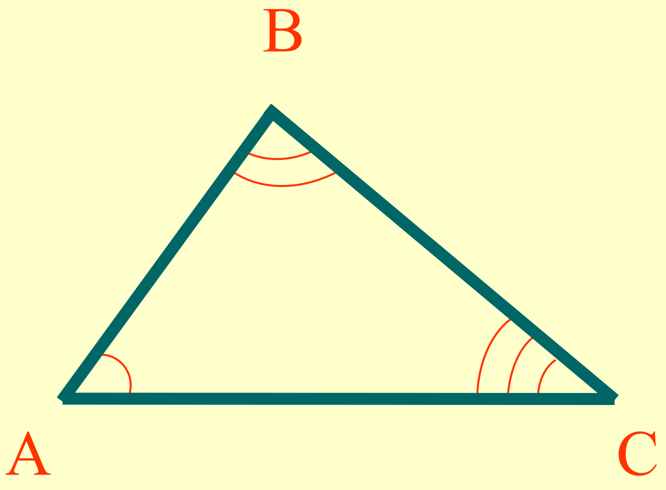


Дано: ΔABC, a=6,3 см,
b=6,3 см, ∠C=54º.
Найти: ∠A, ∠B, c.

Ответ

Решаем задачу 3

Решить треугольник АВС, если
a=6 см, b=7,7 см, c=4,8 см.



Дано: a=6 см, b=7,7 см,
c=4,8 см.
Найти: ∠A, ∠B, ∠C.

Ответ

Ответ к примеру 1

$\angle C = 80^{\circ}$

$a \approx 12{,}3$ см

$b \approx 9{,}1$ см

Ответ к примеру 2

$\angle A = 63°$

$\angle B = 63°$

$c \approx 5{,}7$ см

Ответ к примеру 3

$\angle A=54^{\circ}52'$

$\angle B=84^{\circ}16'$

$\angle C=40^{\circ}52'$