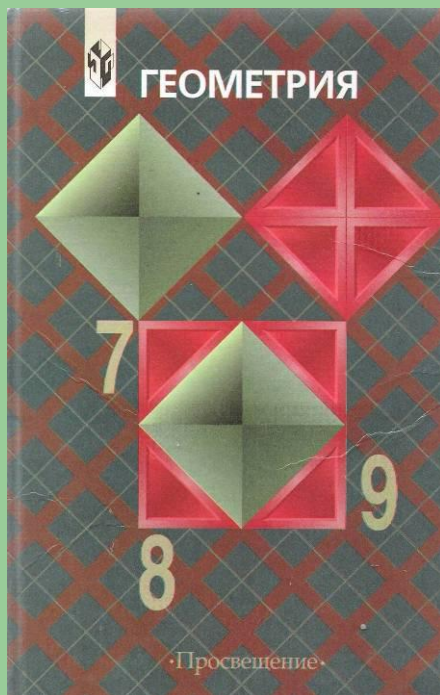


Решение треугольников



Геометрия 9 класс

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Тест на определение истинности (ложности) утверждения

1. В треугольнике против угла в 150° лежит большая сторона.
2. В равностороннем треугольнике внутренние углы равны между собой и каждый равен 60° .
3. Существует треугольник со сторонами 2 см, 7 см, 3 см.
4. Прямоугольный равнобедренный треугольник имеет равные катеты.
5. Сумма длин двух других сторон любого треугольника меньше третьей стороны.
6. Если острый угол прямоугольного треугольника равен 60° , то прилежащий к нему катет равен половине гипотенузы.
7. Существует треугольник с двумя тупыми углами.
8. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90° .

Тест на определение истинности (ложности) утверждения

1. **И** В треугольнике против угла в 150° лежит большая сторона.
2. **И** В равностороннем треугольнике внутренние углы равны между собой и каждый равен 60° .
3. **Л** Существует треугольник со сторонами 2 см, 7 см, 3 см.
4. **И** Прямоугольный равнобедренный треугольник имеет равные катеты.
5. **Л** Сумма длин двух других сторон любого треугольника меньше третьей стороны.
6. **И** Если острый угол прямоугольного треугольника равен 60° , то прилежащий к нему катет равен половине гипотенузы.
7. **Л** Существует треугольник с двумя тупыми углами.
8. **И** В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90° .

Немного из истории



В 10 в. багдадский ученый Мухаммед из Буджана, известный под именем Абу-ль-Вефа сформулировал теорему синусов. Насир-эд-Дин из Туса (1201-1274) систематически рассмотрел все случаи решения косоугольных сферических треугольников и указал ряд новых способов решения. В 12 в. был переведен с арабского на латынь ряд астрономических работ, что позволило ознакомиться с ними европейцам. Но, к сожалению, многое осталось непереведенным, и выдающийся немецкий астроном и математик Иоганн Мюллер (1436 -1476), которого современники знали под именем Региомонтана (именно так переводится на латынь название его родного города Кенигсберга), через 200 лет после Насир-эд-Дина заново открыл его теоремы.



ФРАНСУА ВИЕТ (1540 – 1603)

Виет встал у истоков создания новой науки - тригонометрии. Многие тригонометрические формулы впервые были записаны Виетом.

В 1593 году он первым сформулировал в словесной форме теорему косинусов.

Косинус – это сокращение латинского выражения *completelysinus*, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”; $\text{cosa} = \sin(90^\circ - a)$).

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Современные обозначения синуса и косинуса знаками $\sin x$ и $\cos x$ были впервые введены в 1739 году И. Бернулли в письме к петербургскому математику Л. Эйлеру. Придя к выводу, что эти обозначения весьма удобны, он стал употреблять их в своих математических работах. Кроме того, Эйлер вводит следующие сокращенные обозначения тригонометрических функций угла x : $\text{tang } x$, $\text{cot } x$, $\text{sec } x$, $\text{cosec } x$.

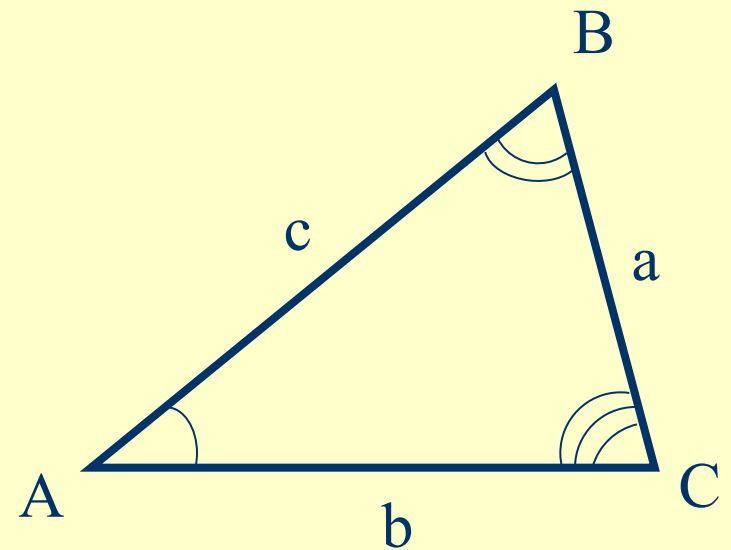


РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Определение



Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (то есть трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам.



Для этого вспомним



Решение данных задач основано на использовании теорем синуса и косинуса, теоремы о сумме углов треугольника и следствии из теоремы синусов: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Причем, при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов.

Соотношения между сторонами и углами в треугольнике

1. Сумма углов треугольника.
2. Теорема синусов.
3. Теорема косинусов.

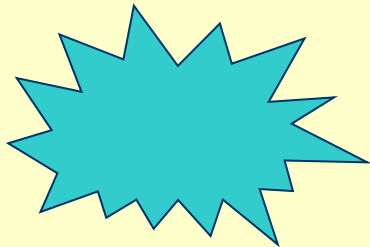
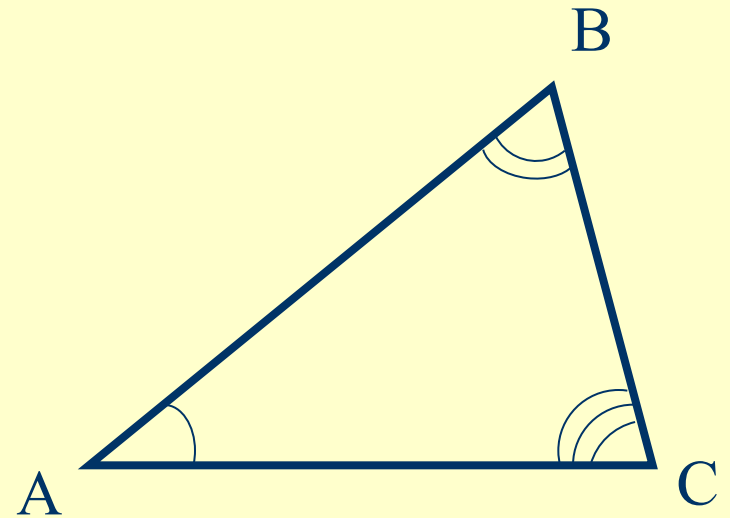




Сумма углов треугольника

Сумма углов
треугольника равна 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

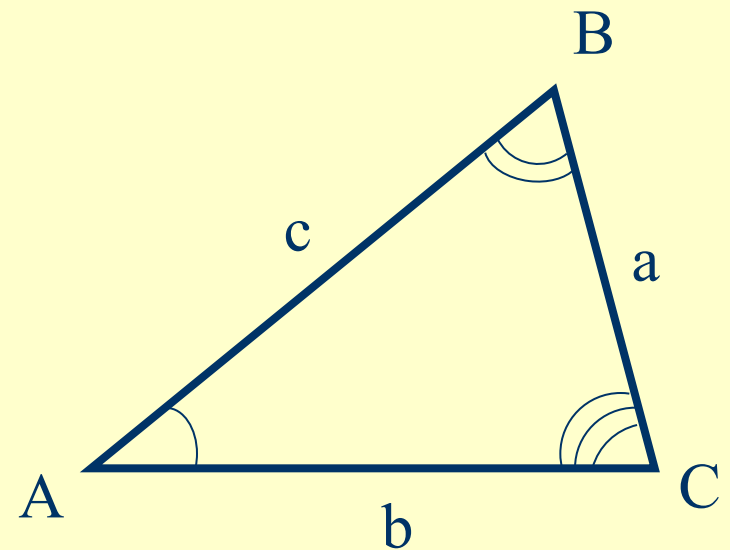
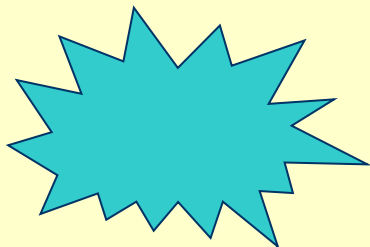


Теорема синусов



Стороны треугольника
пропорциональны синусам
противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

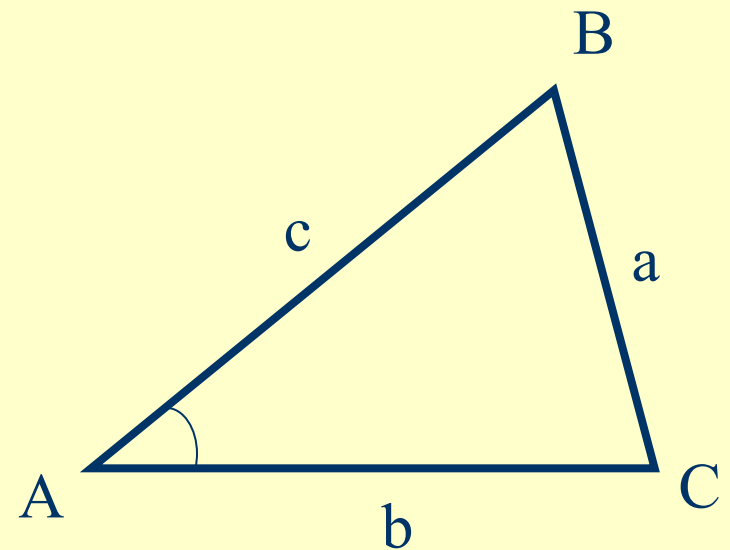
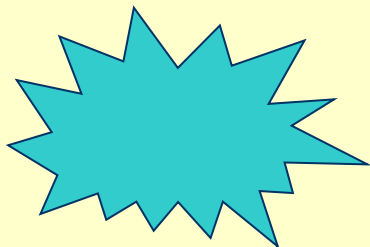


Теорема косинусов



Квадрат стороны
треугольника равен сумме
квадратов двух других сторон
минус удвоенное
произведение этих сторон на
косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

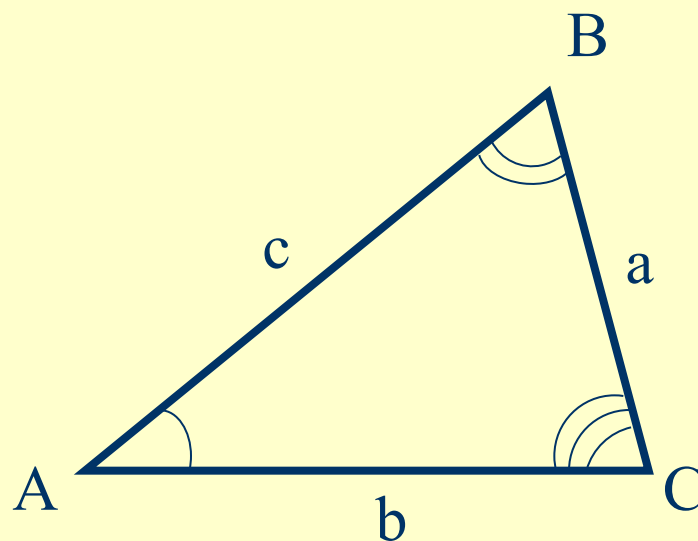


Три задачи на решение треугольника

Рассмотрим 3 задачи на решение треугольника:

- решение треугольника по двум сторонам и углу между ними;
- решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам;
- решение треугольника по трем сторонам.

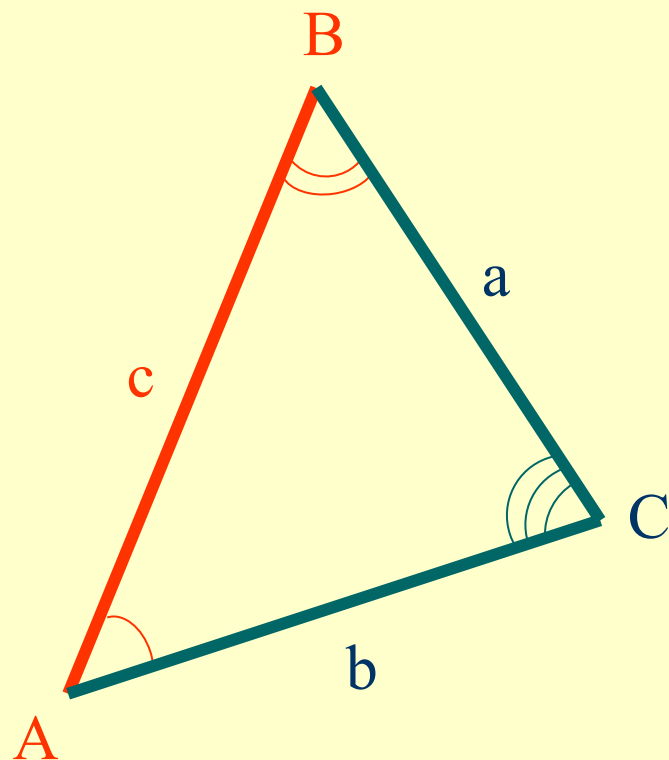
При решении
треугольников будем
пользоваться
следующими
обозначениями для
сторон треугольника
ABC:
 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.



Задача 1. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Дано: $\triangle ABC$, a , b , $\angle C$

Найти: c , $\angle A$, $\angle B$.



Задача 1. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними

1. Применим теорему косинусов

$$\tilde{n} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

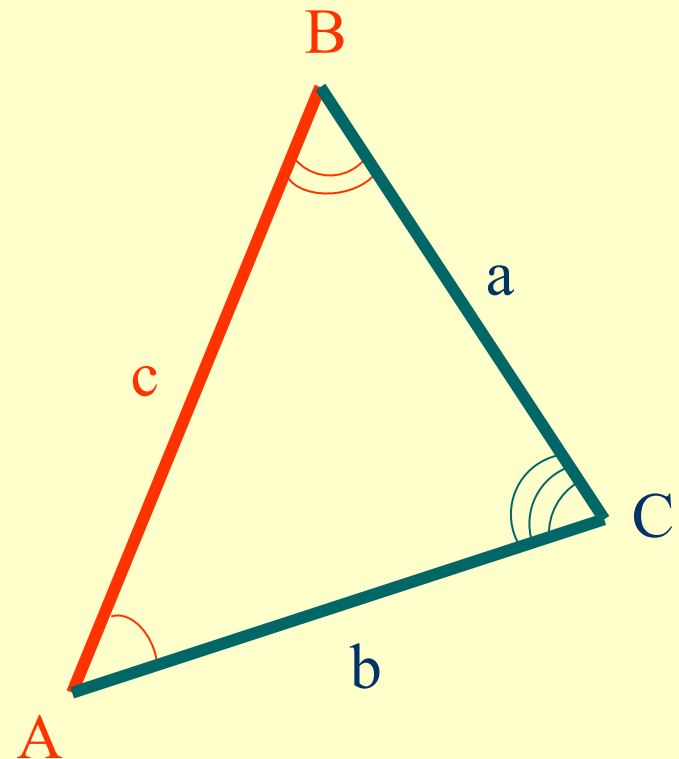
2. По теореме косинусов находим

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

3. Угол A находим с помощью таблицы Брадиса

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$$

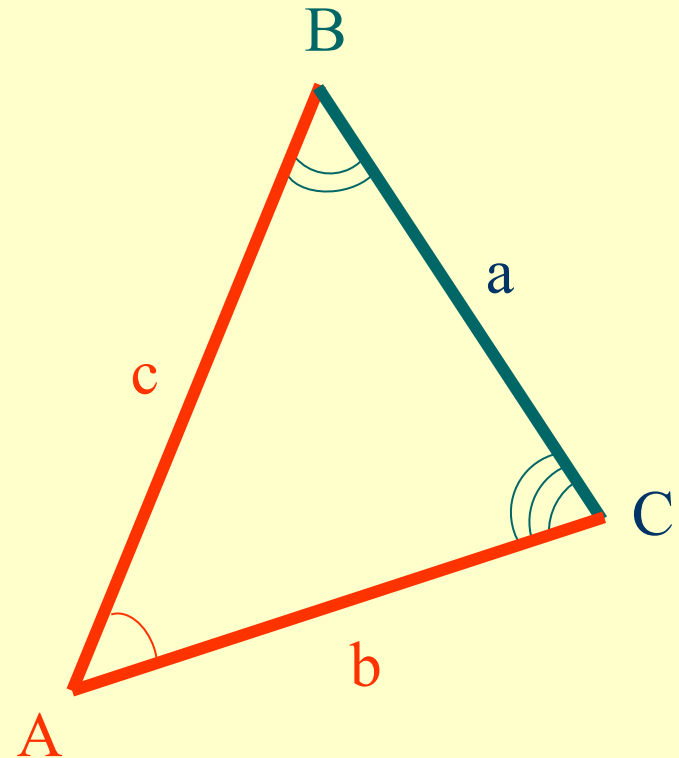
4. Запишем ответ



Задача 2. Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам

Дано: $\triangle ABC$, a , $\angle B$,
 $\angle C$

Найти: b , c , $\angle A$



Задача 2. Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам

1. Найдём неизвестный угол

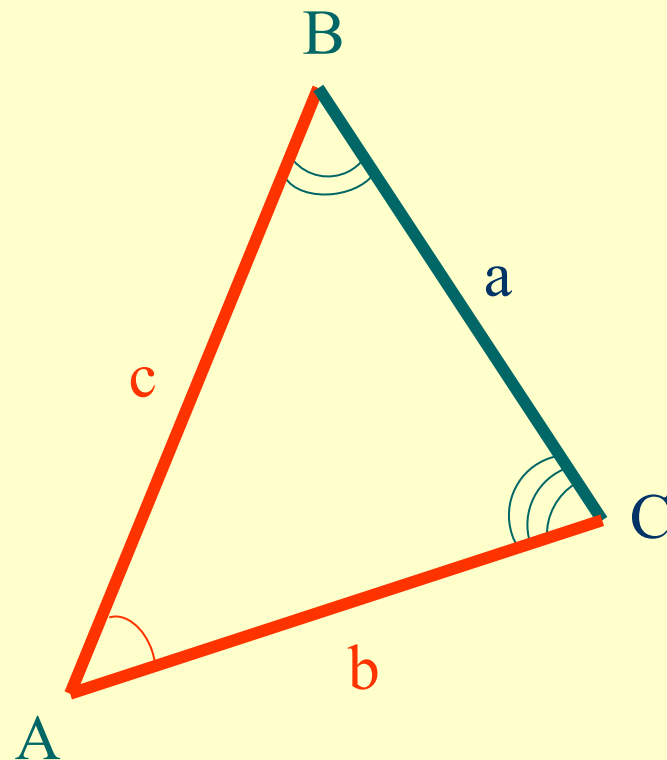
$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$$

2. С помощью теоремы синусов:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\tilde{n} = \frac{a \sin \tilde{N}}{\sin A}$$

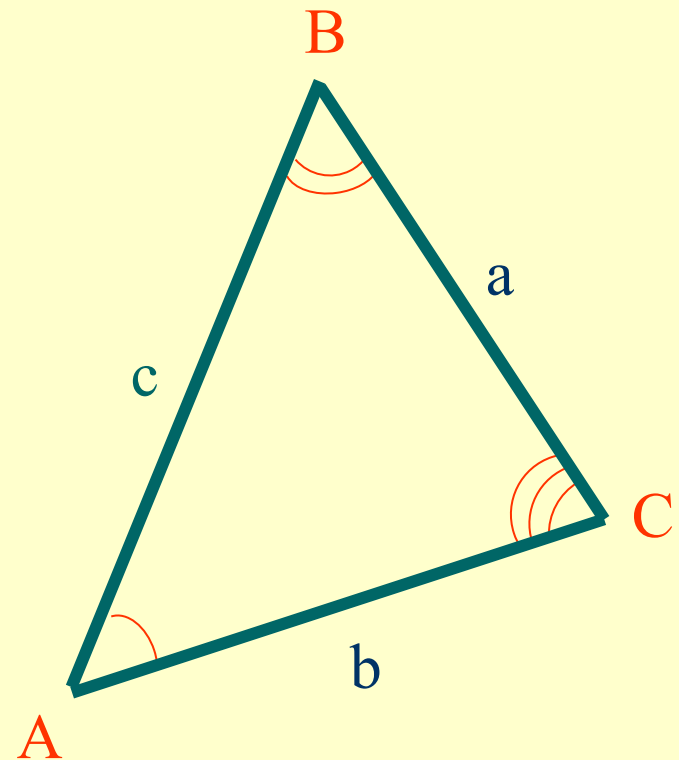
3. Запишем ответ



Задача 3. *Решение треугольника по трём сторонам*

Дано: $\triangle ABC$, a , b , c

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.



Задача 3. Решение треугольника по трём сторонам

1. По теореме косинусов найдём

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

2. Значения углов A и C находим с помощью таблицы Брадиса.
3. Находим оставшийся угол

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$$

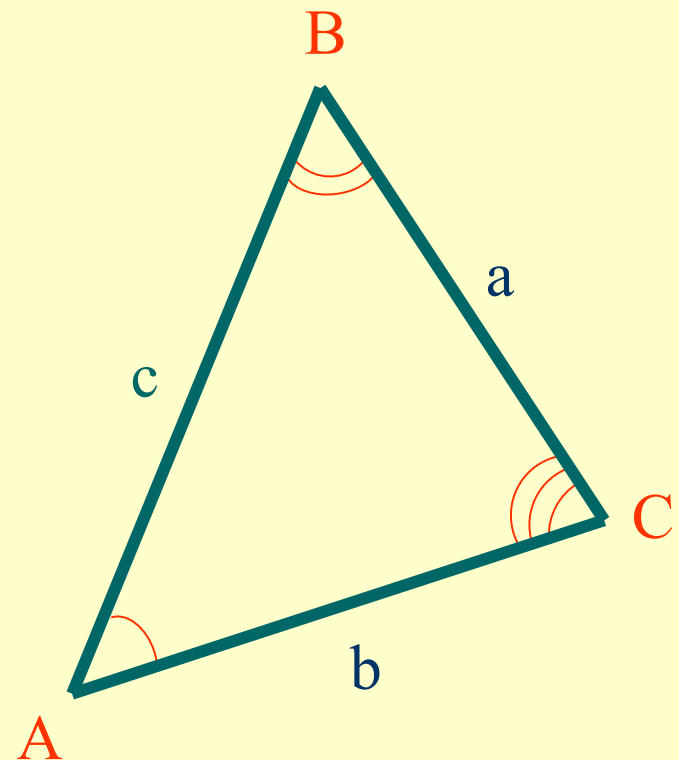
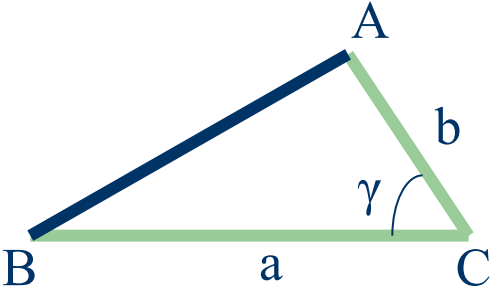
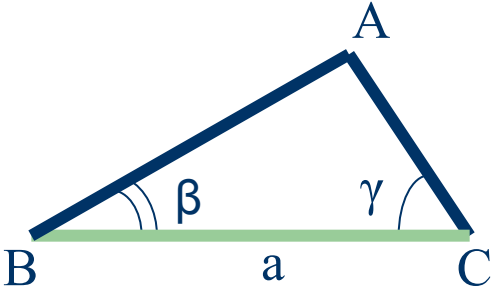
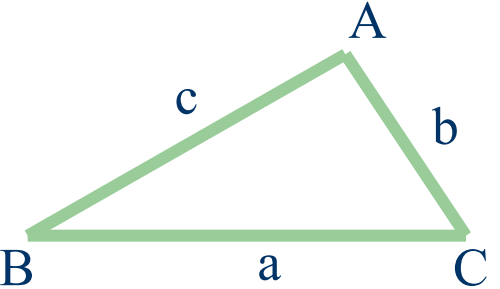


Таблица – памятка



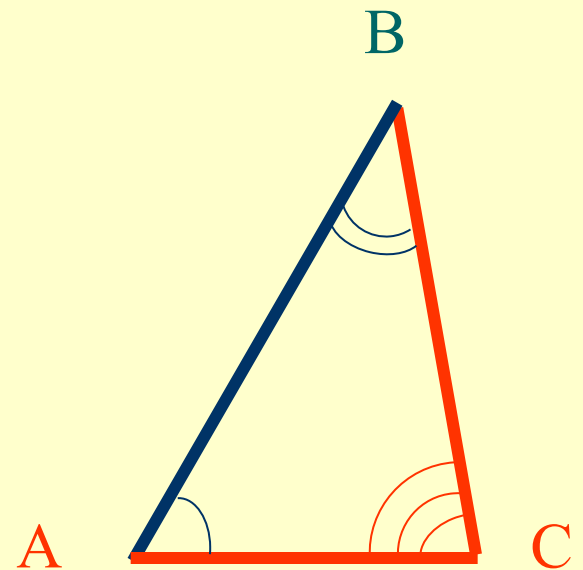
Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними	Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам	Решение треугольника по трем сторонам
		
$\tilde{n} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$	$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$ $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ $\tilde{n} = \frac{a \sin \tilde{N}}{\sin A}$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$

Решаем задачу 1

Решить треугольник ABC, если
 $\angle A=60^\circ$ $\angle B=40^\circ$, $c=14\text{см}$.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle A=60^\circ$,
 $\angle B=40^\circ$, $c=14\text{см}$.
Найти: a , b , $\angle C$.

Ответ

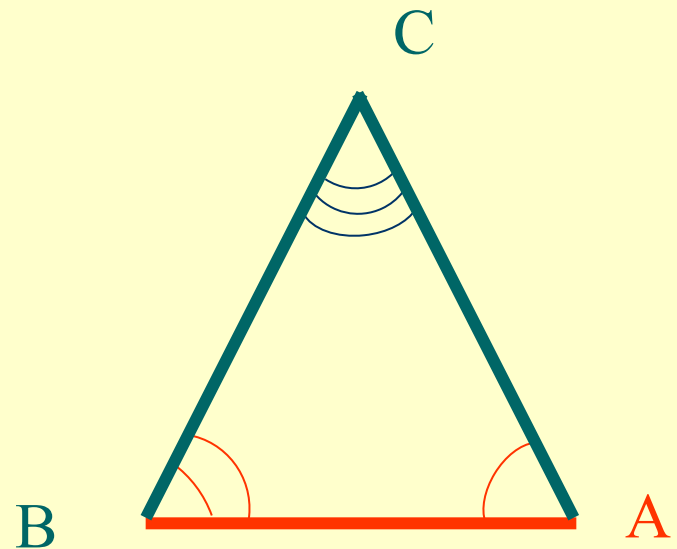


Решаем задачу 2

Решить треугольник ABC, если $a=6,3$ см, $b=6,3$ см, $\angle C=54^\circ$.

Дано: $\triangle ABC$, $a=6,3$ см,
 $b=6,3$ см, $\angle C=54^\circ$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, c .

Ответ



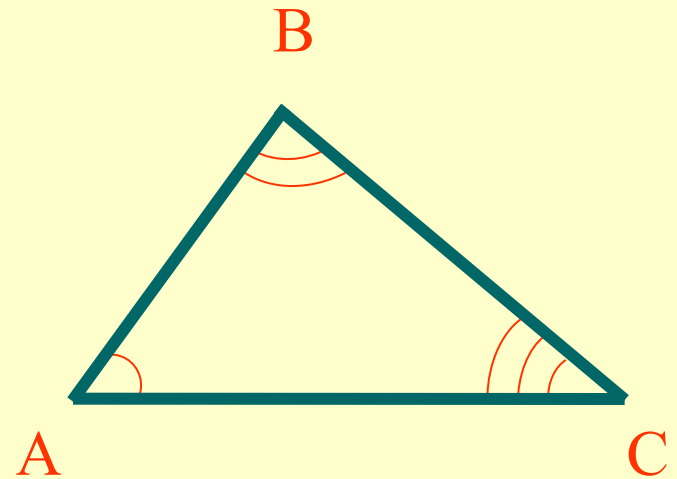
Решаем задачу 3

Решить треугольник ABC, если
 $a=6$ см, $b=7,7$ см, $c=4,8$ см.

Дано: $a=6$ см, $b=7,7$ см,
 $c=4,8$ см.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Ответ

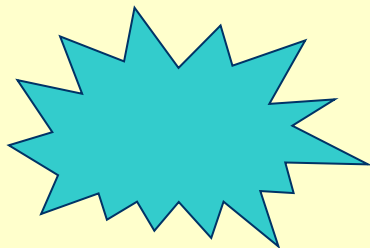


Ответ к примеру 1

$$\angle C = 80^\circ$$

$$a \approx 12,3 \text{ см}$$

$$b \approx 9,1 \text{ см}$$

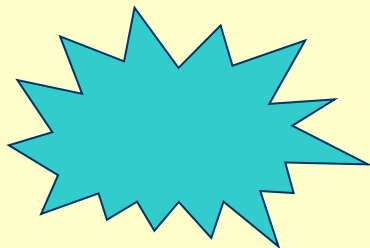


Ответ к примеру 2

$$\angle A = 63^\circ$$

$$\angle B = 63^\circ$$

$$c \approx 5,7 \text{ см}$$



Ответ к примеру 3

$$\angle A = 54^{\circ}52'$$

$$\angle B = 84^{\circ}16'$$

$$\angle C = 40^{\circ}52'$$

