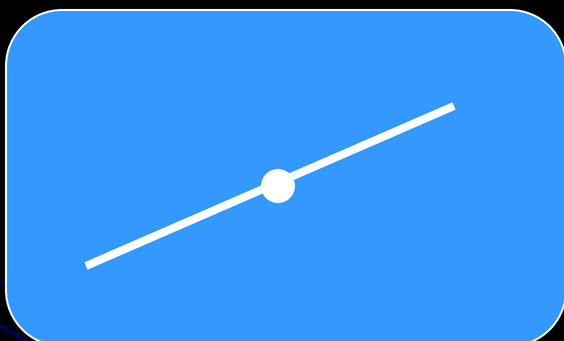
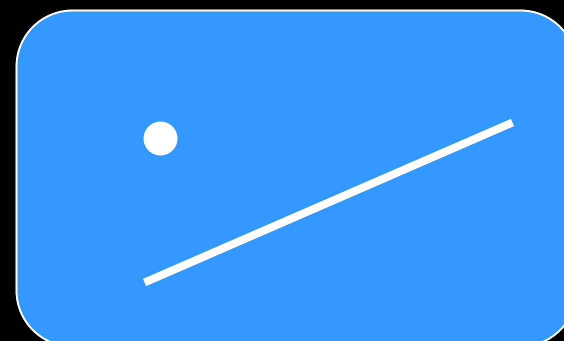
Содержание

Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в простанстве

$A \in a$

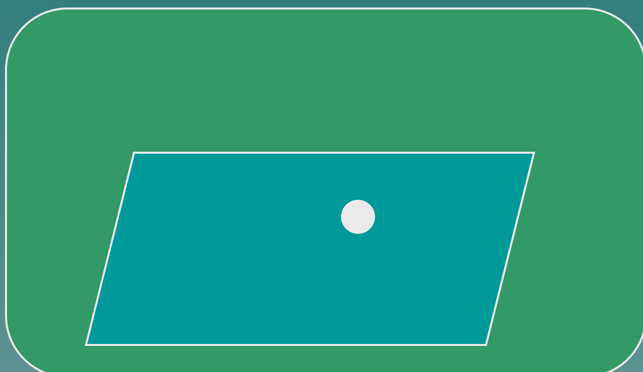


$A \in a$

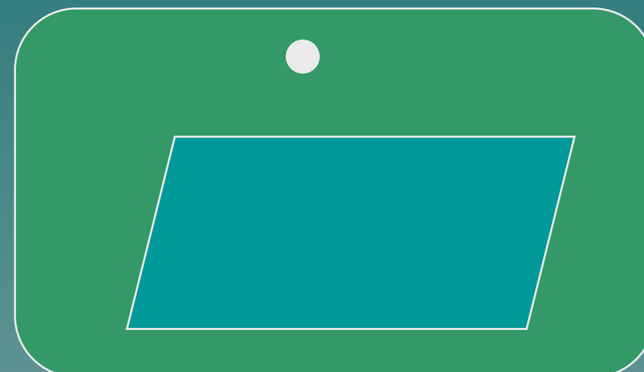


$A \notin a$

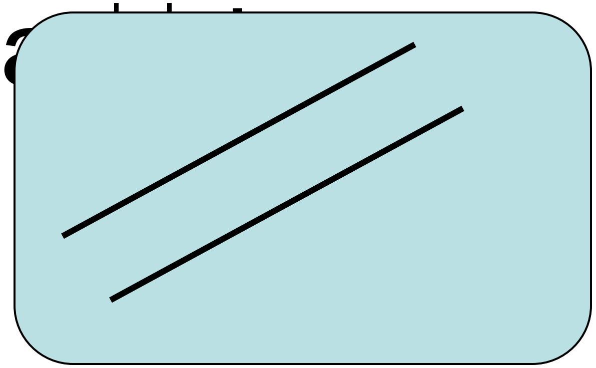
$A \in \alpha$



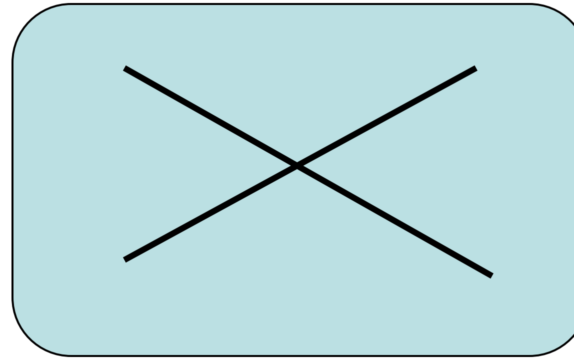
$A \in \alpha$



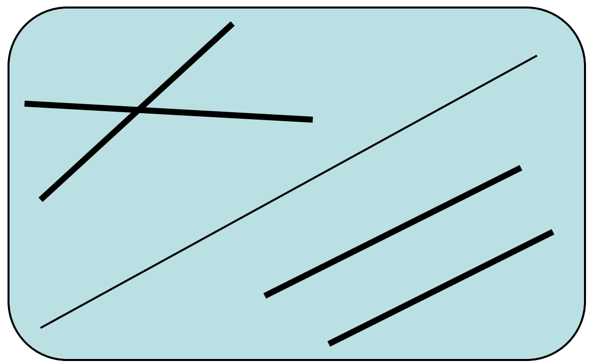
$A \notin \alpha$



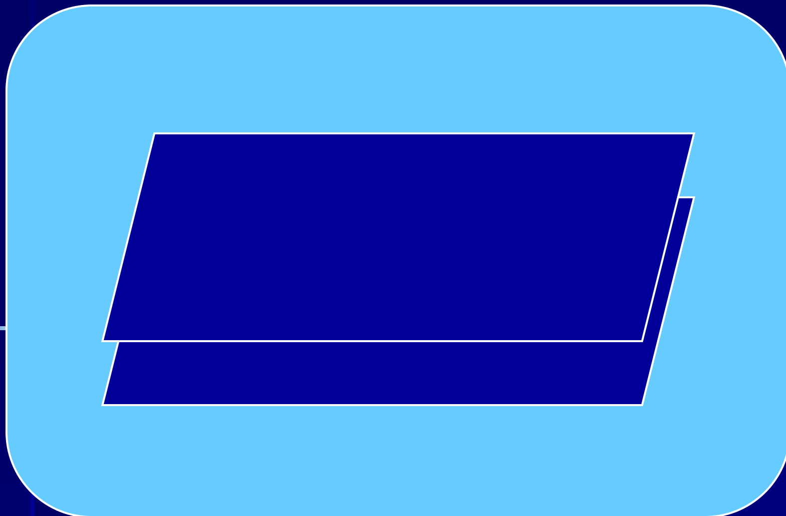
a || b

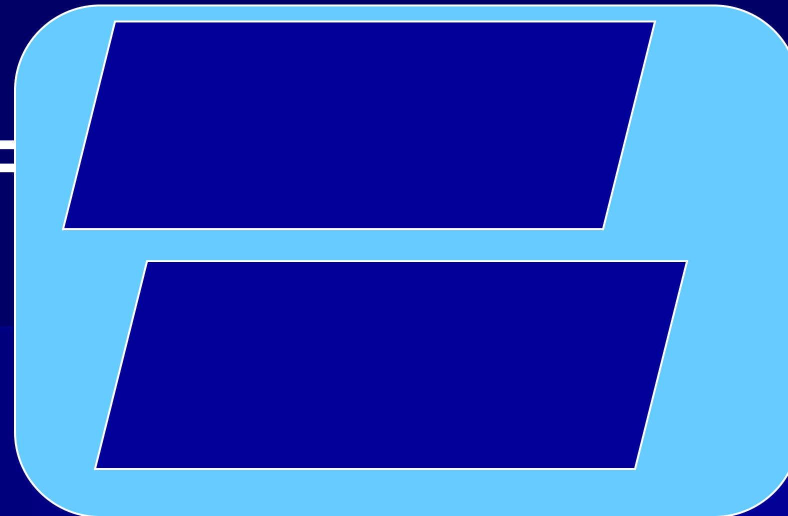


$a \cap b$



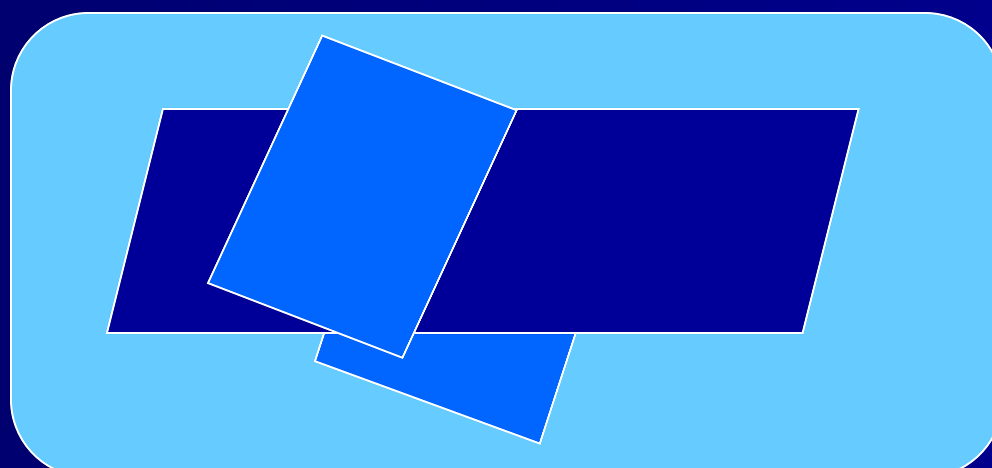
Не имеют общих точек



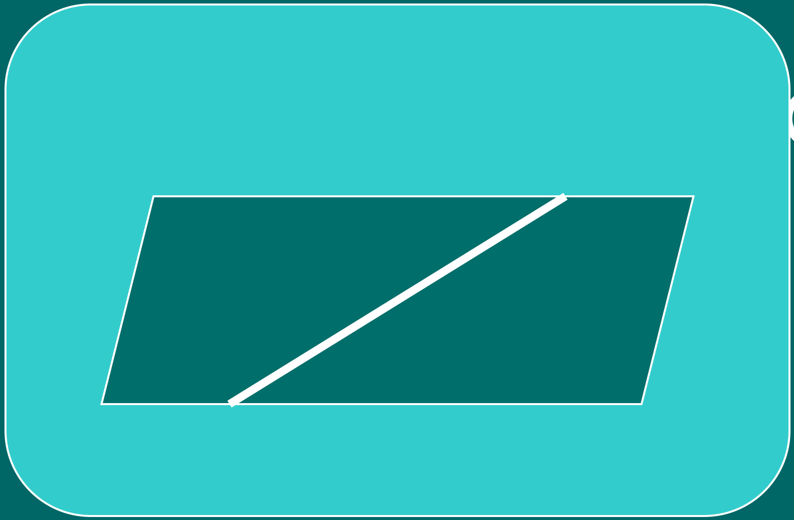


$\alpha = \beta$

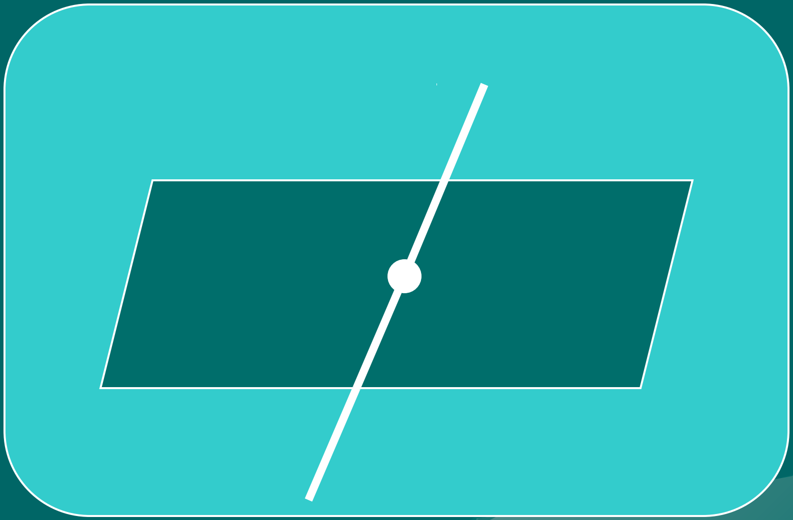
$\alpha \parallel \beta$



$\alpha \cap \beta$

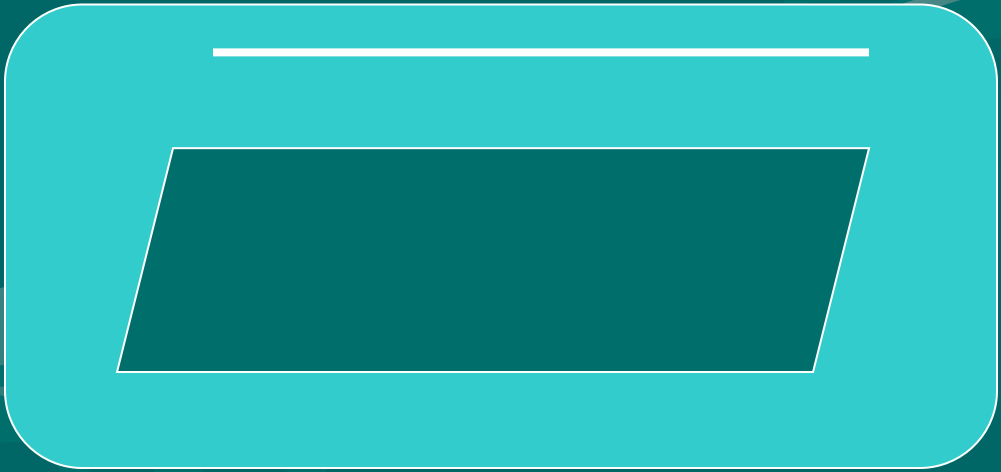


$\subset$



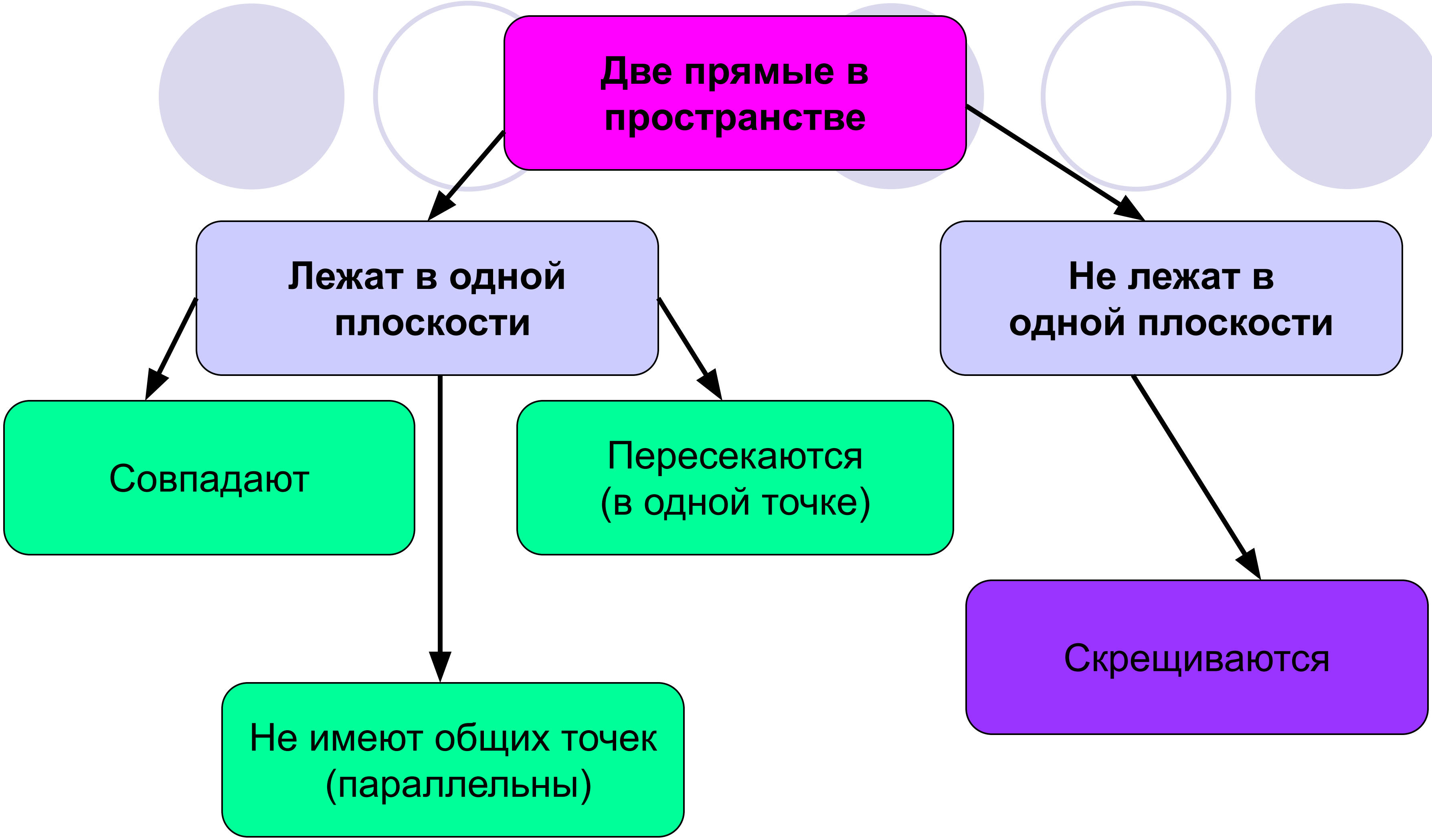
$a \subset \alpha$

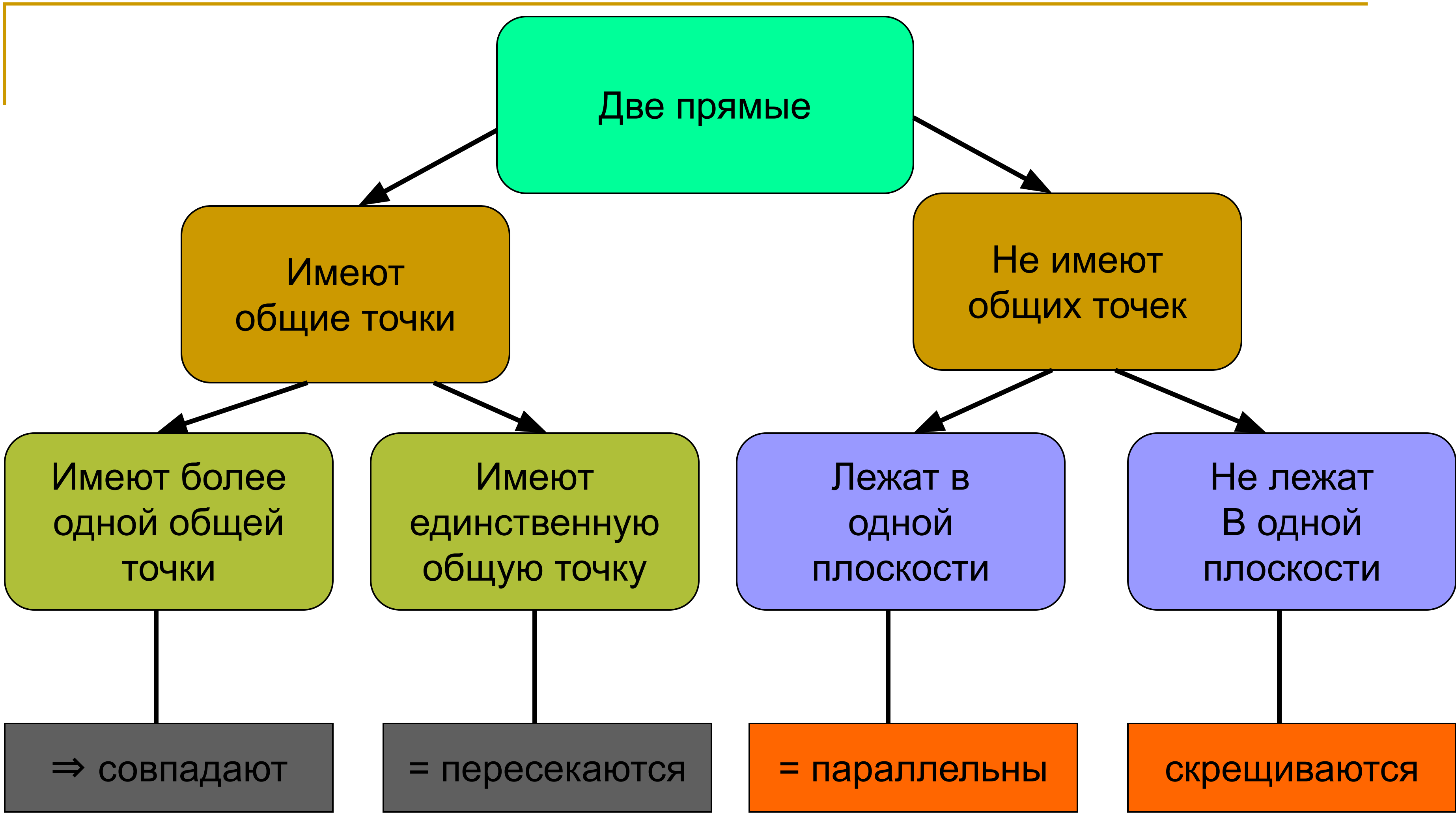
$a \cap \alpha$



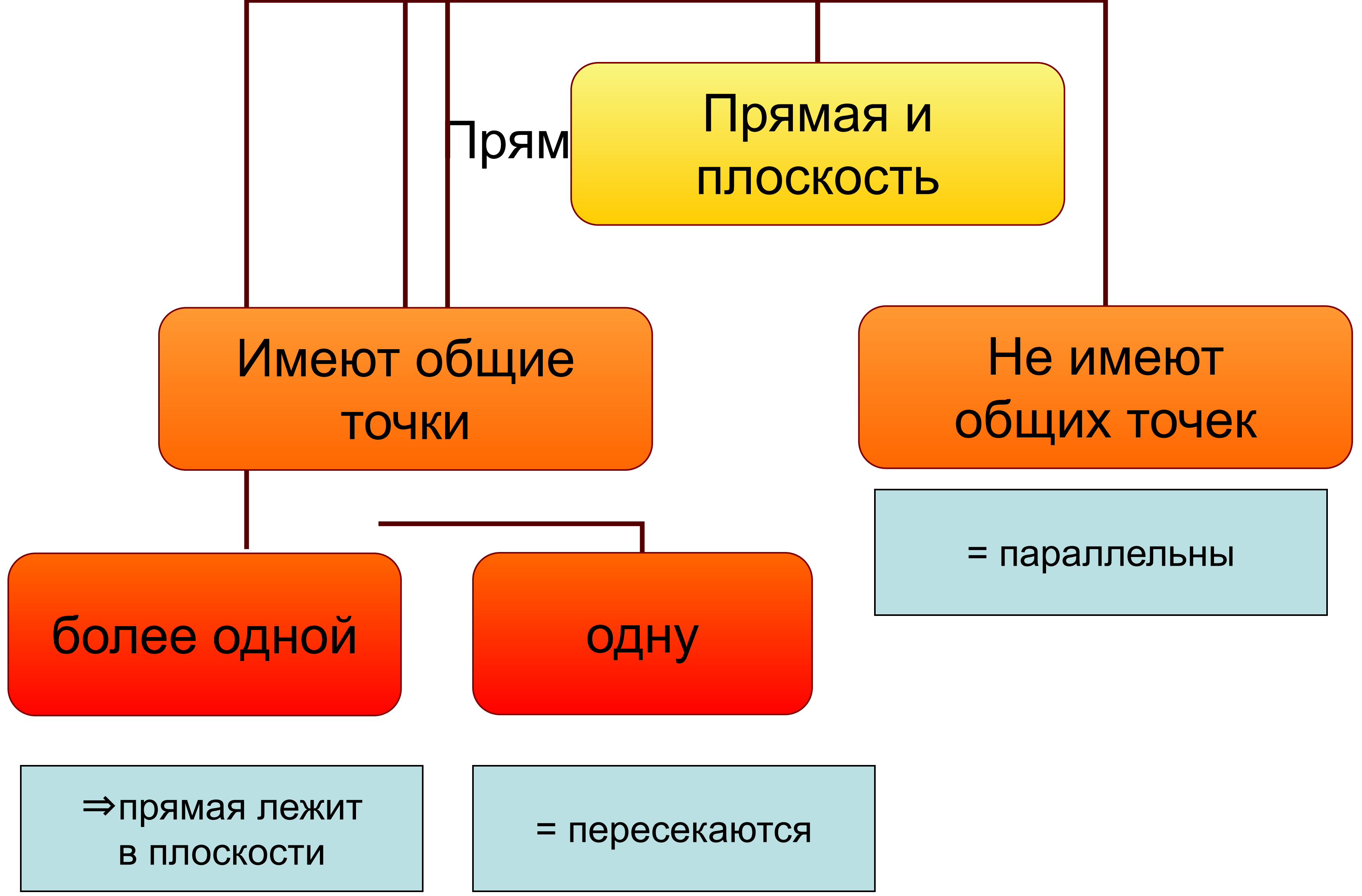
$a \parallel \alpha$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве


Две прямые в пространстве
Лежат в одной плоскости
Не лежат в одной плоскости
Совпадают
Пересекаются (в одной точке)
Не имеют общих точек (параллельны)
Скрещиваются


Две прямые
Имеют общие точки
Не имеют общих точек
Имеют более одной общей точки
Имеют единственную общую точку
Лежат в одной плоскости
Не лежат В одной плоскости
⇒ совпадают
= пересекаются
= параллельны
скрещиваются

Параллельность прямой и плоскости


Прям
Прямая и плоскость
Имеют общие точки
Не имеют общих точек
= параллельны
более одной
одну
⇒прямая лежит в плоскости
= пересекаются

Параллельные плоскости

Две плоскости

Две плоскости

Имеют общие точки

Не имеют общих точек

= параллельны

совпадают

Не совпадают

= пересекаются

Две плоскости

Две плоскости

Совпадают

Не совпадают

Имеют
общие точки

Не имеют
общих точек

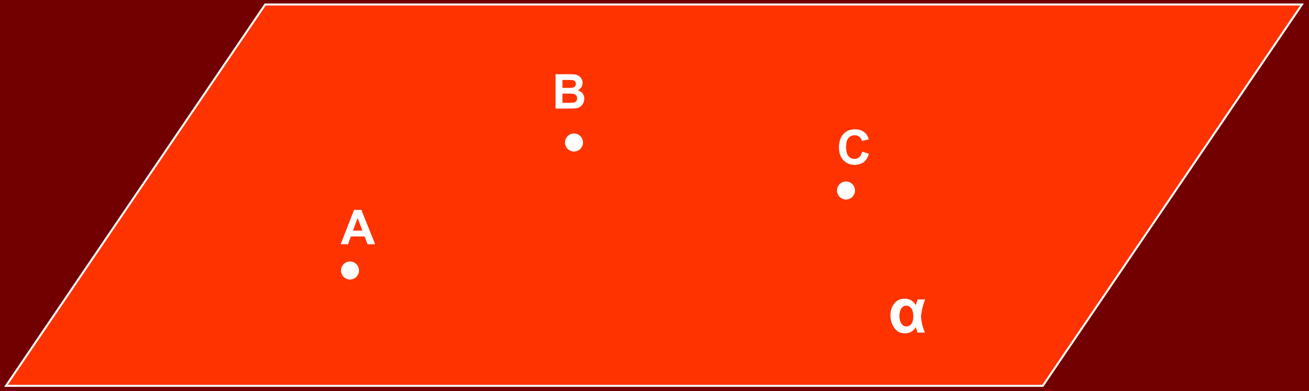
= пересекаются

= параллельны

Основные аксиомы и определения

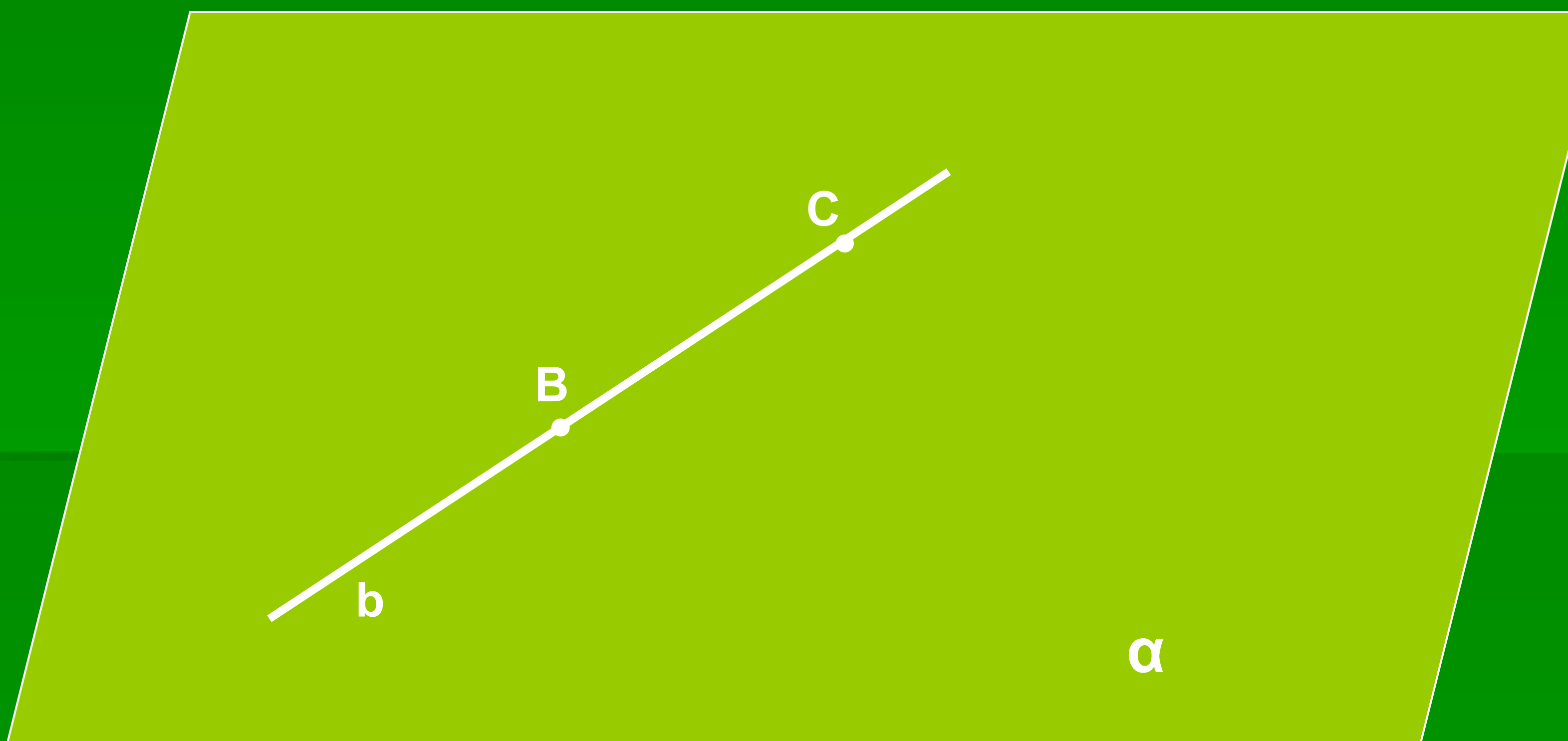
Через любые три точки, не лежащие
на одной прямой, проходит
одна и только одна плоскость

A



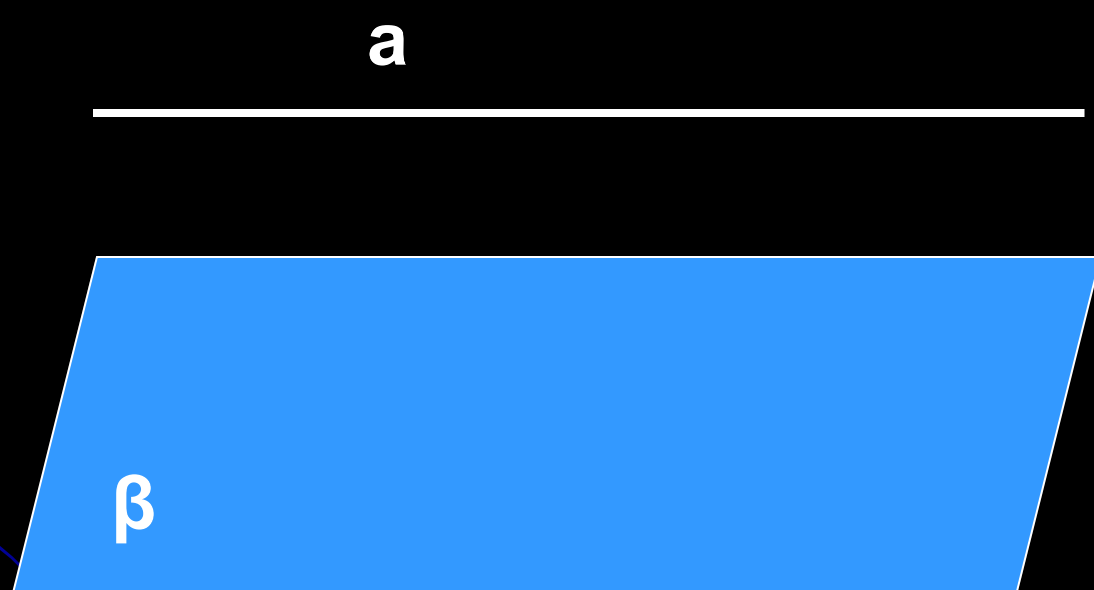
Если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

С



- **Прямая называется параллельной плоскости, а плоскость – параллельной прямой, если они не имеют общих точек.**

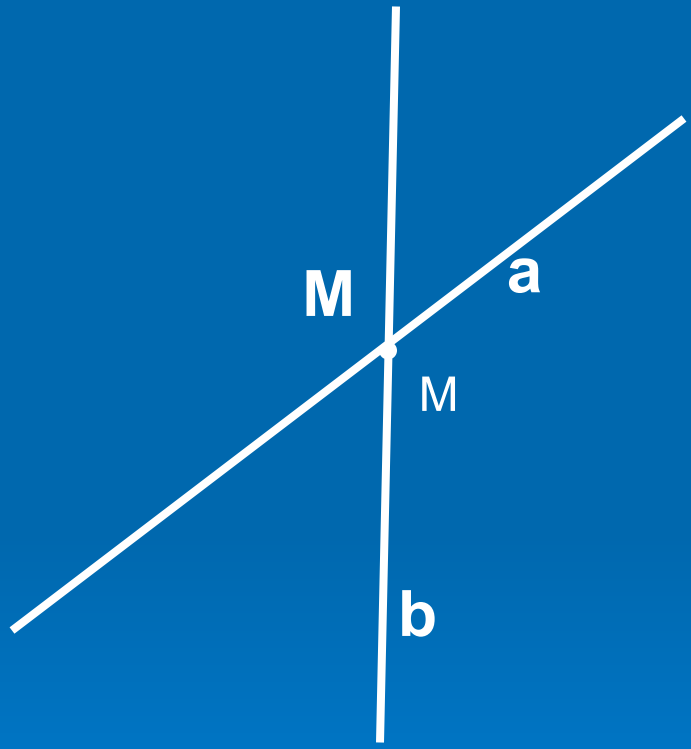
β



a || β, β || a

- Две прямые, имеющие только одну общую точку, называются **пересекающимися**

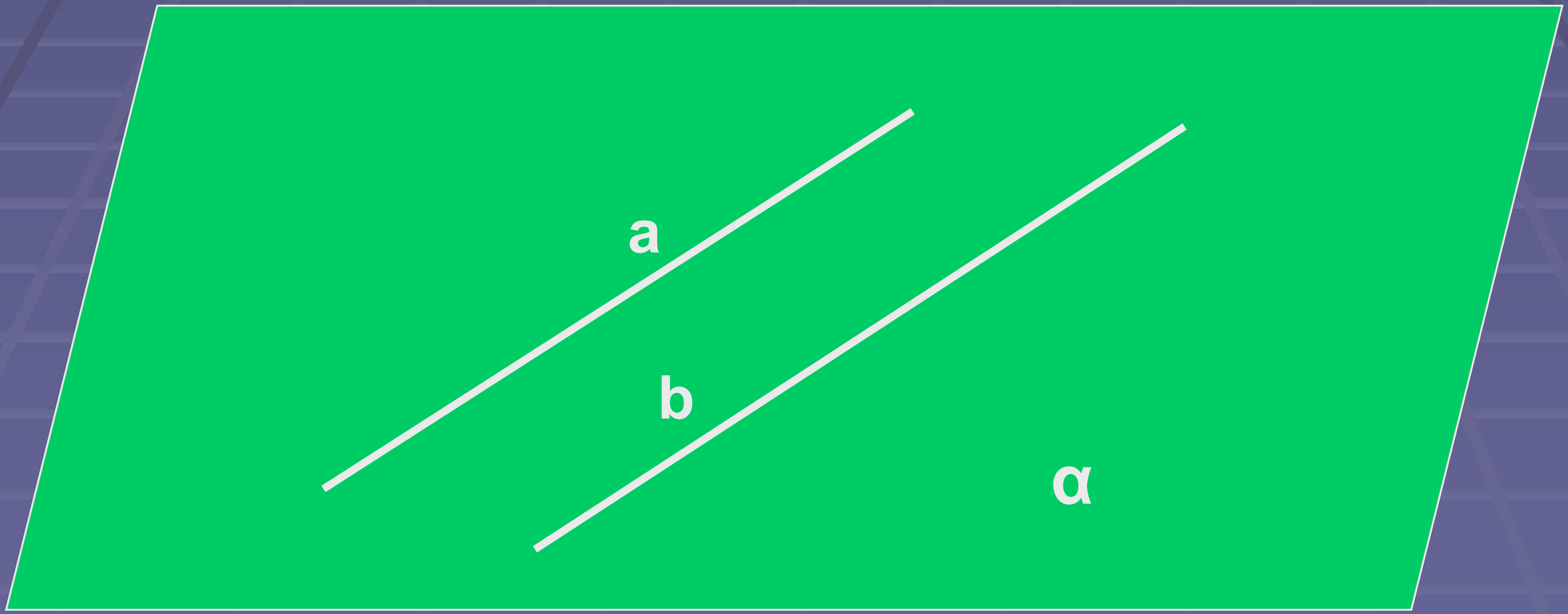
M



$$a \cap b = M$$

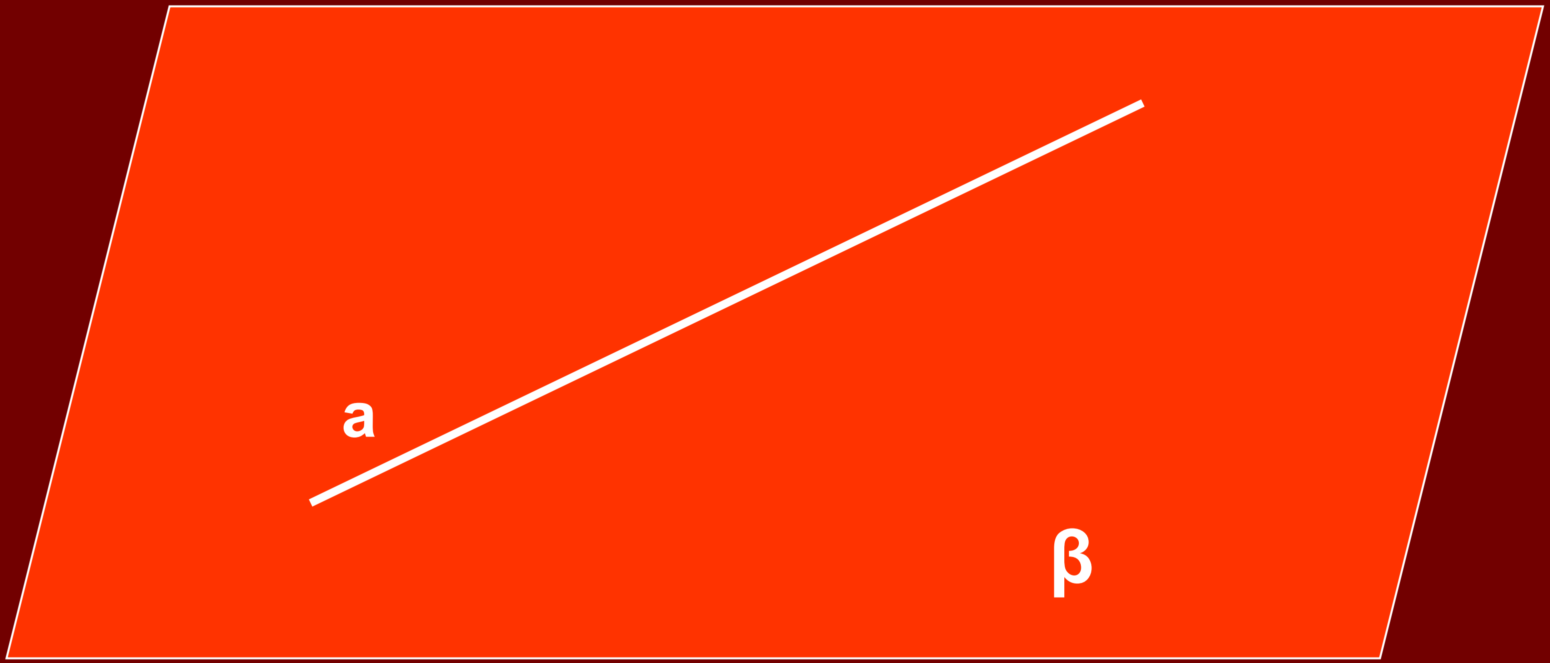
- Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются параллельными.

a



- **Прямая, все точки которой принадлежат плоскости, называется прямой, лежащей в этой плоскости.**

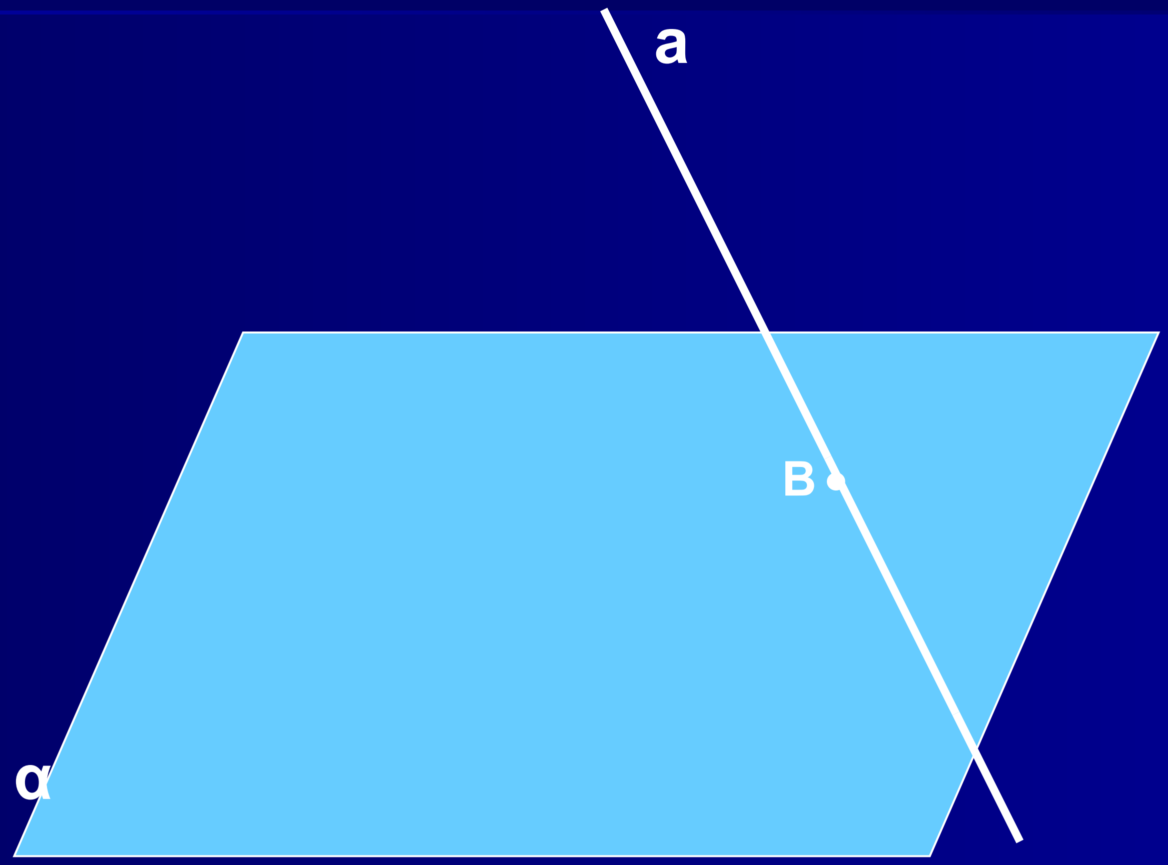
a



$a \subset \beta$

- **Прямая пересекает плоскость, если у них есть только одна общая точка.**

В



$a \cap \alpha = B$

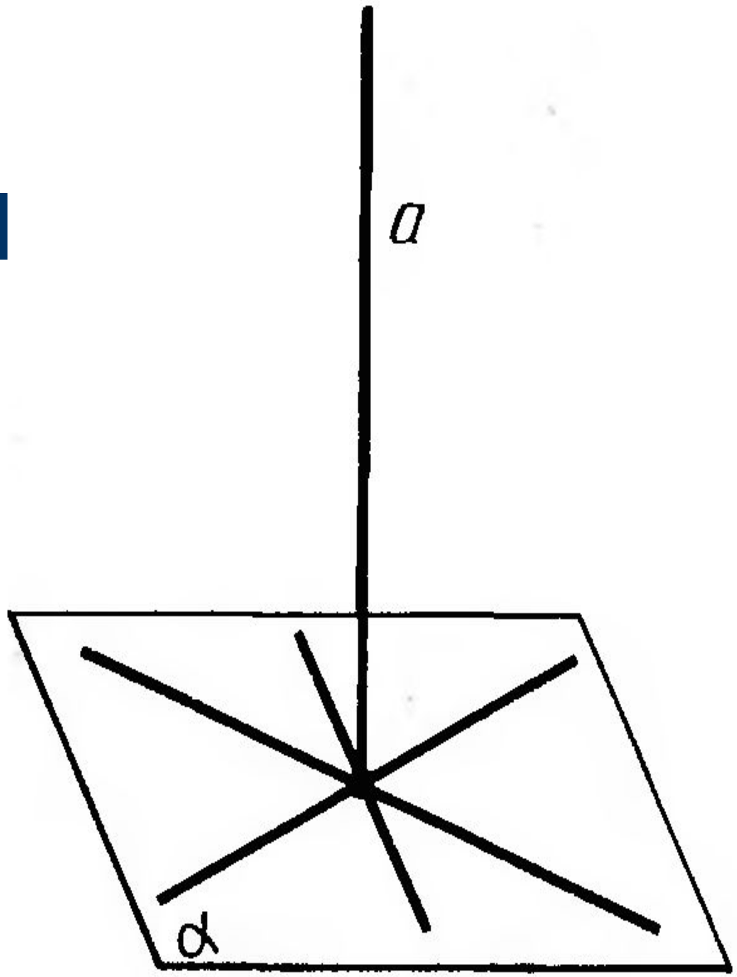
- Две плоскости, не имеющие общих точек, называются параллельными α

a || β

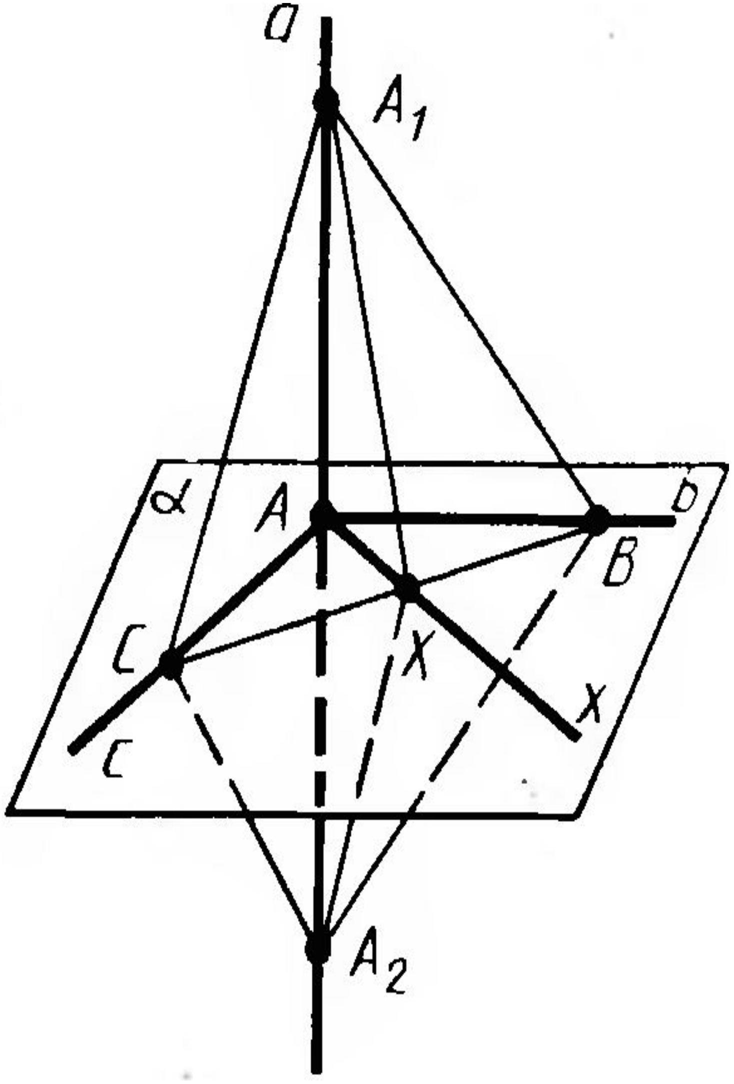
- Прямая называется *перпендикулярной плоскости* (а плоскость прямой), если прямая перпендикулярна любой прямой лежащей в этой плоскости.

- ***ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ***

- ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.***



a
α

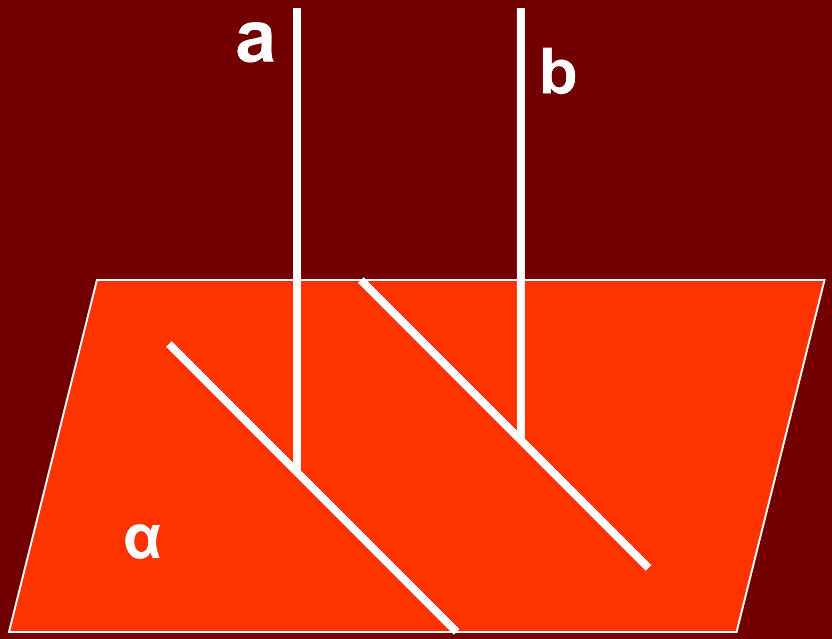


a
A1
α
A
b
B
C
X
x
c
A2

СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

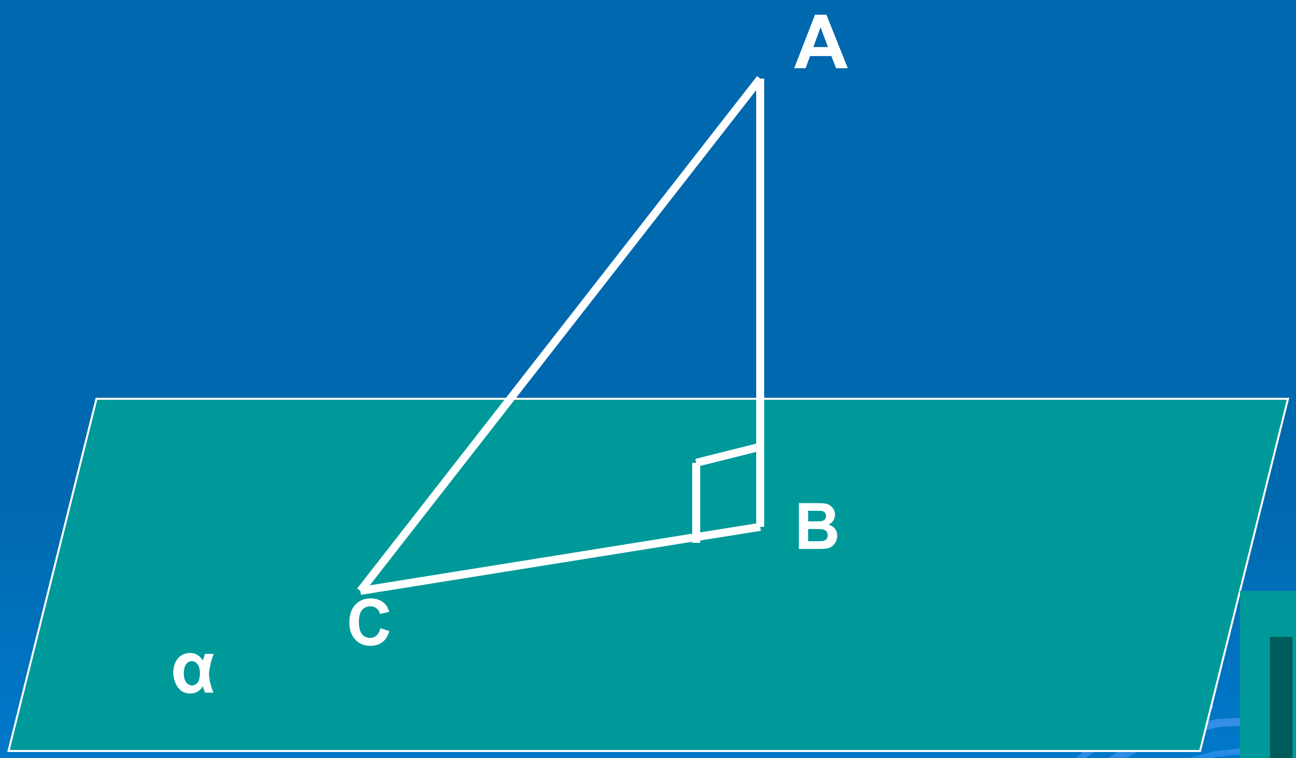
α



- ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ
- *Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.*

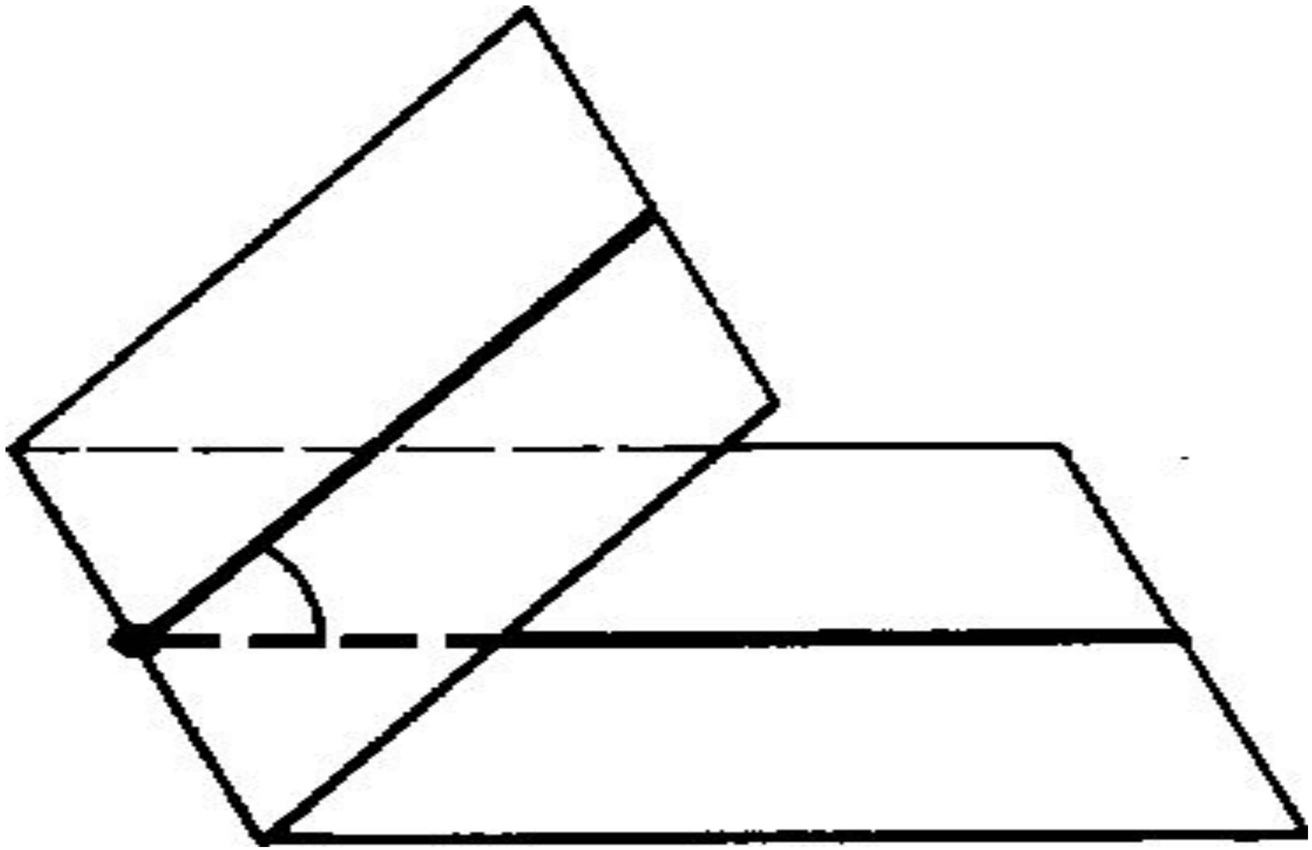
- *Наклонной*, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

α



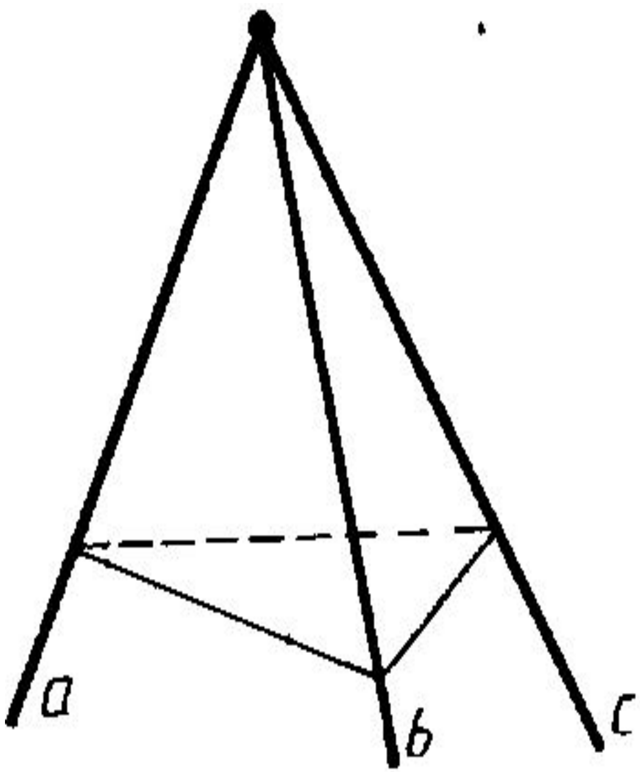
Двугранным углом

называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются *гранями,* а ограничивающая их прямая — *ребром* двугранного угла.

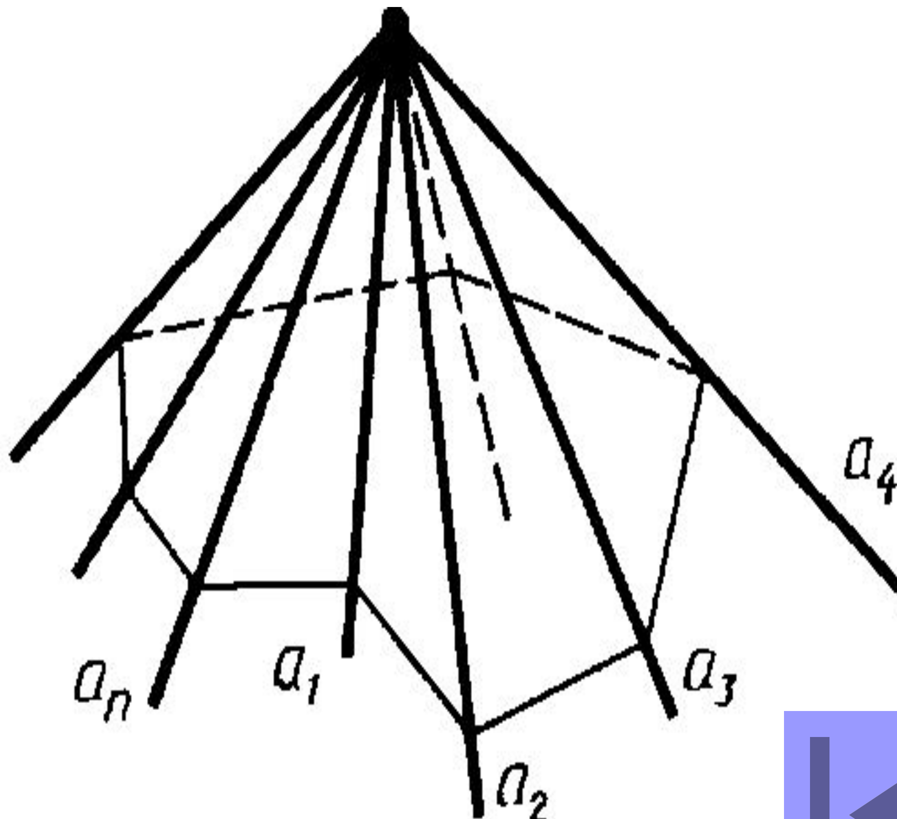


- ***Линейным углом двугранного угла*** **называется пересечение этого двугранного угла и плоскости перпендикулярной его ребру.**

- ***Трехгранным углом (abc)*** **называется фигура, составленная из трех плоских углов *(ab), (bc)* и *(ac)*. Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны — *ребрами.* Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла.***



a
b
c

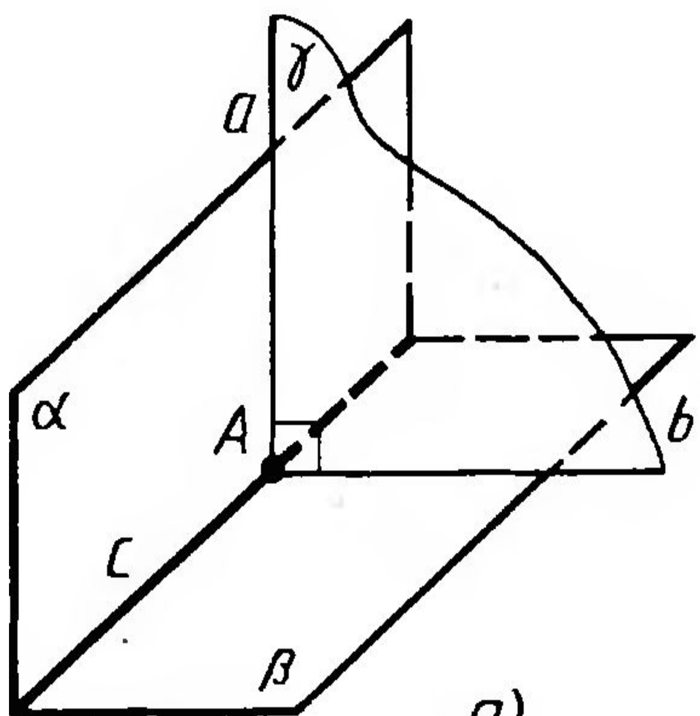


a_4
a_n
a_1
a_3
a_2

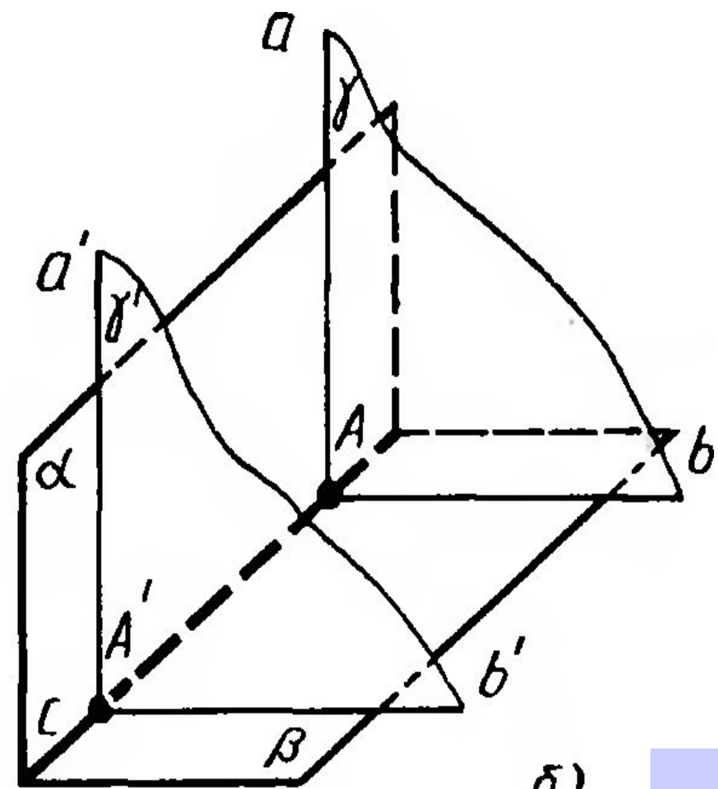
Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными,* если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

- # ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

- ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***



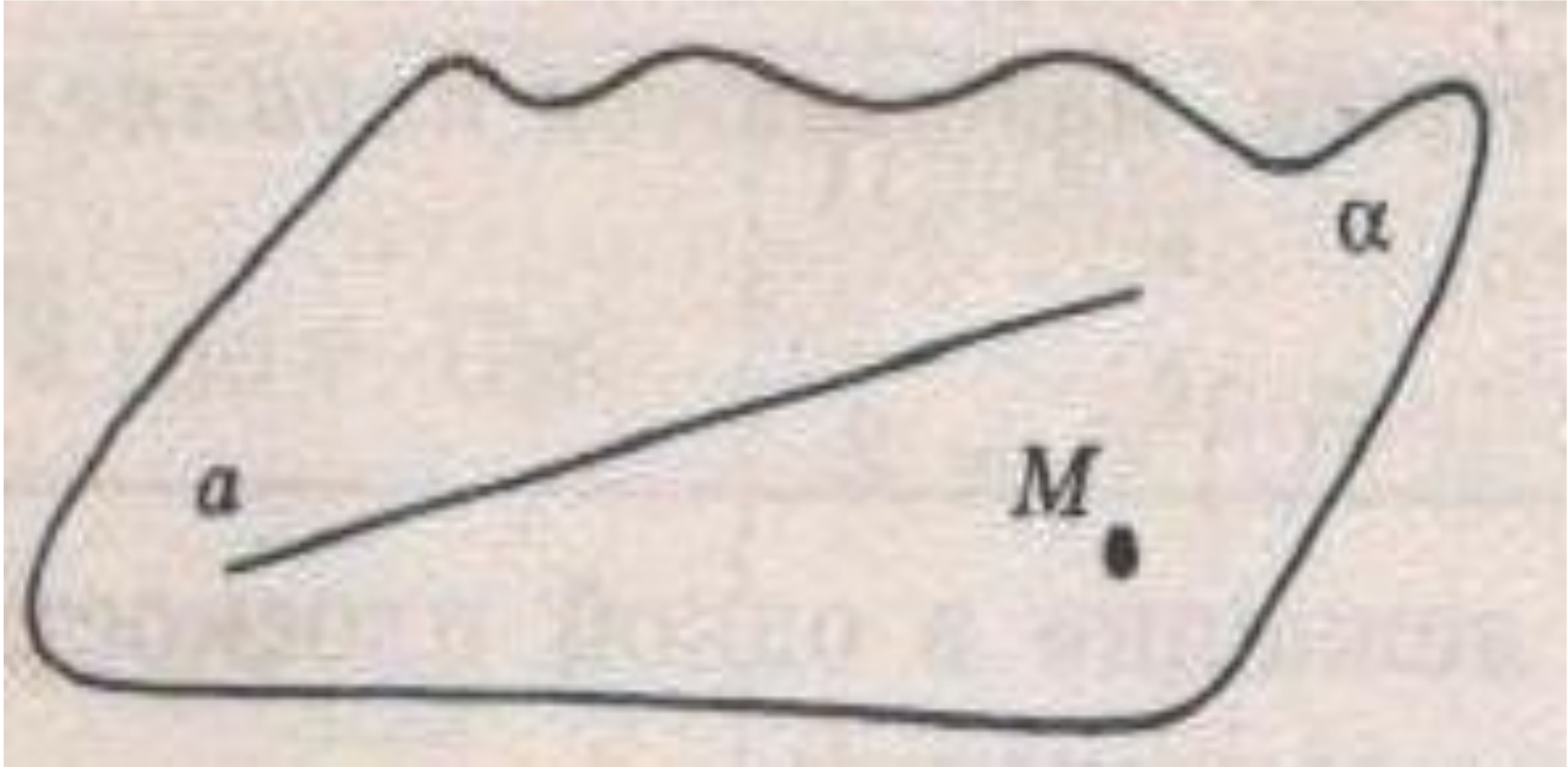
а)



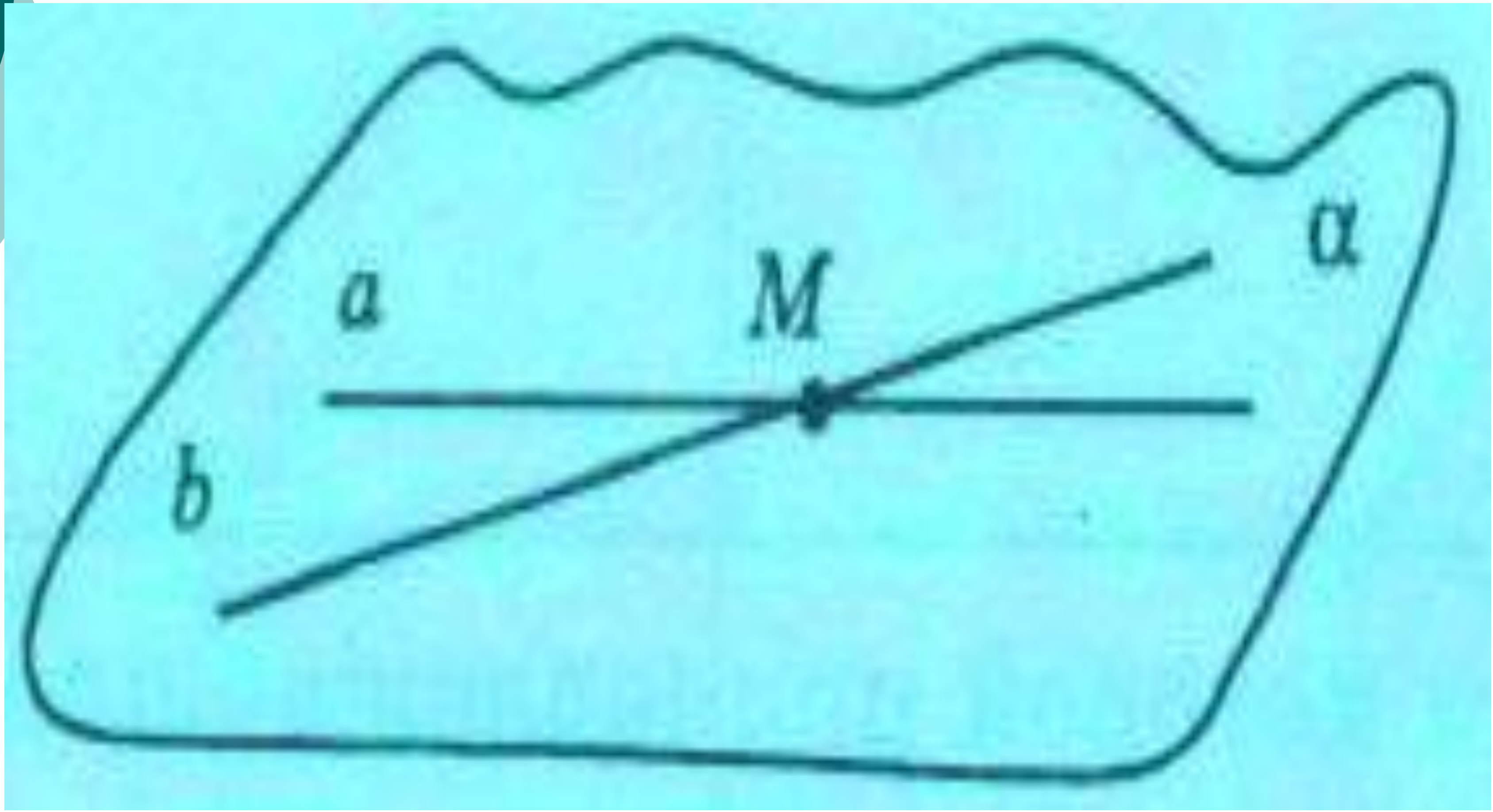
б)

Теоремы стереометрии

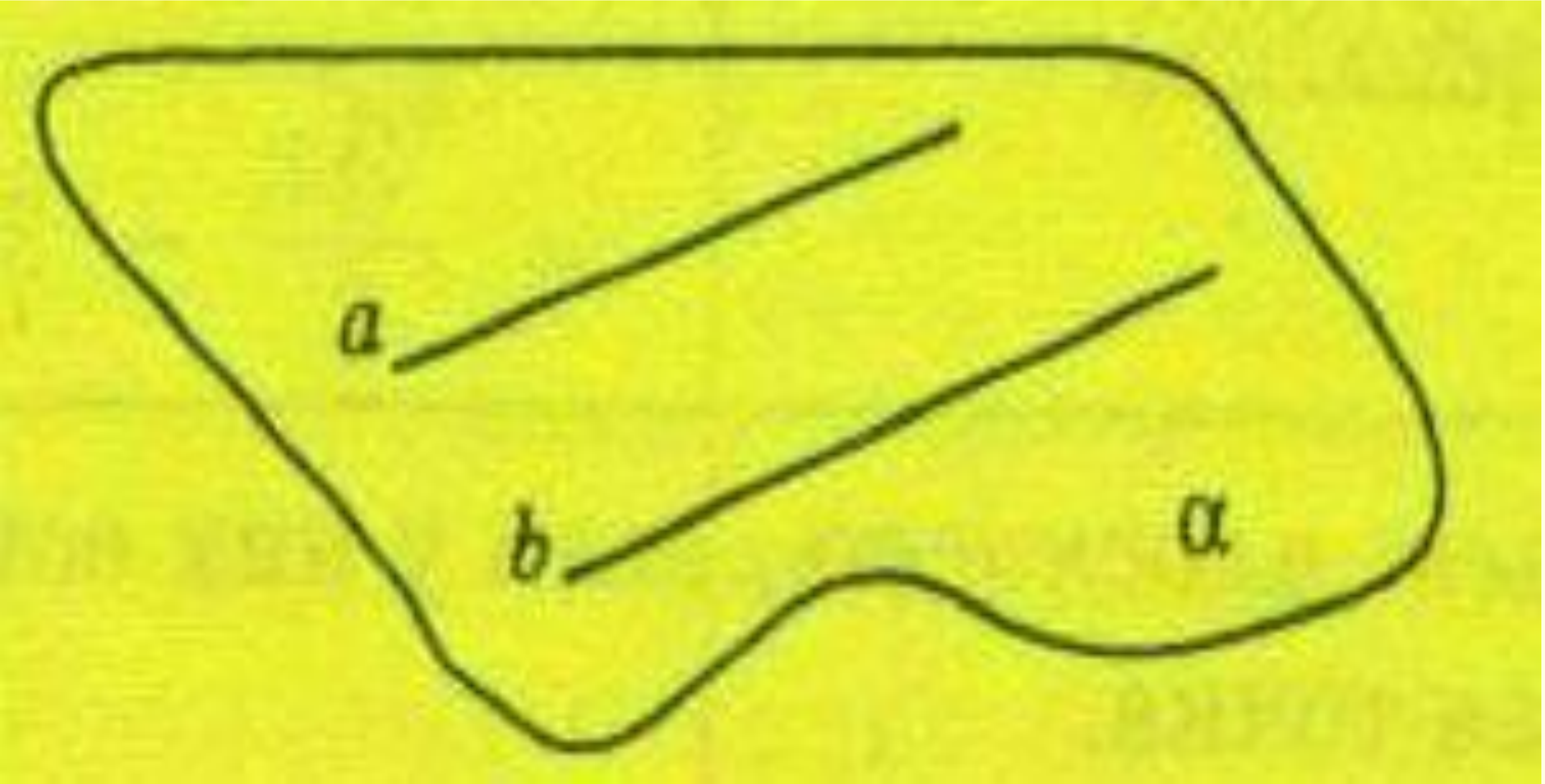
Через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна и только одна плоскость

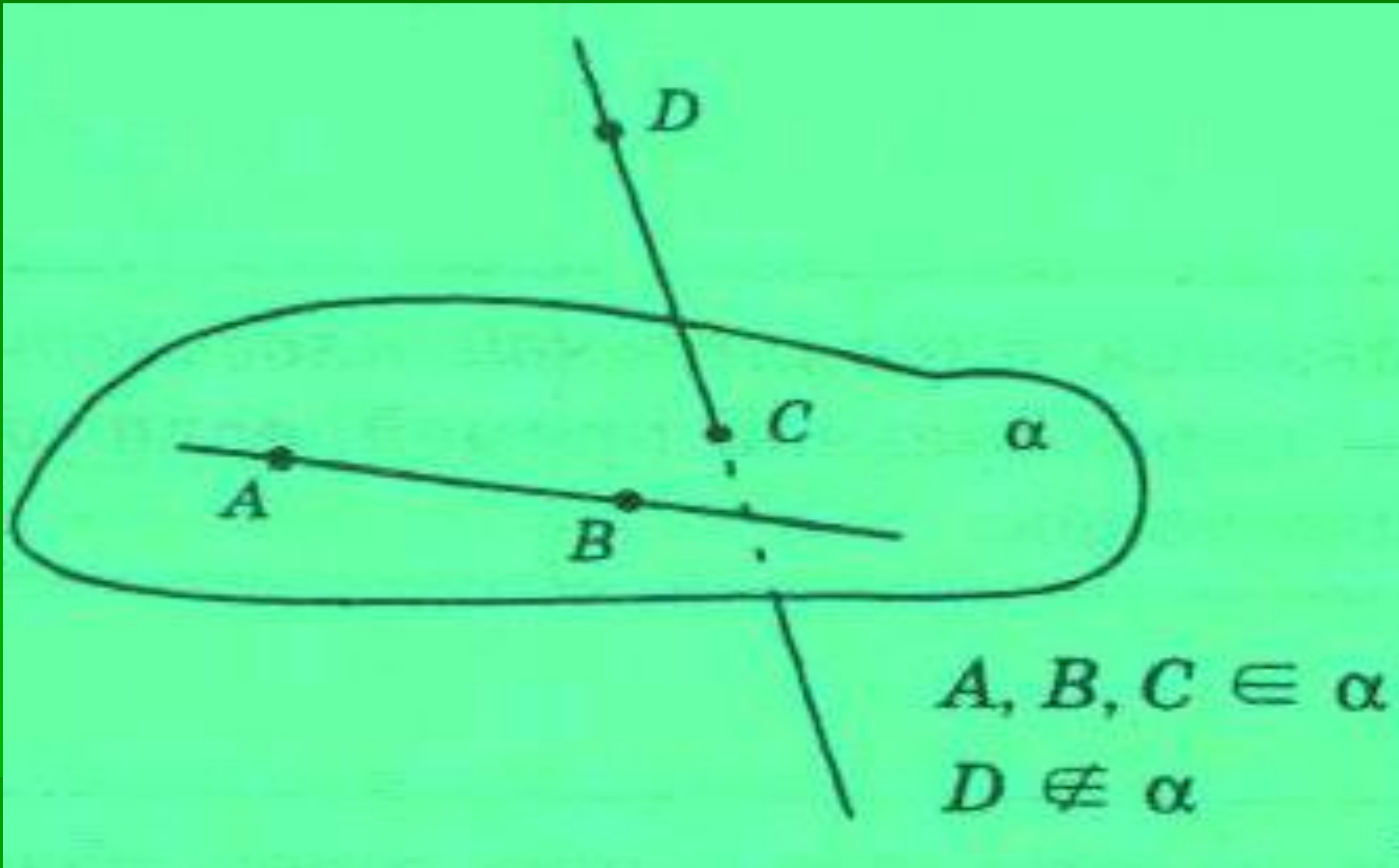


Через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость



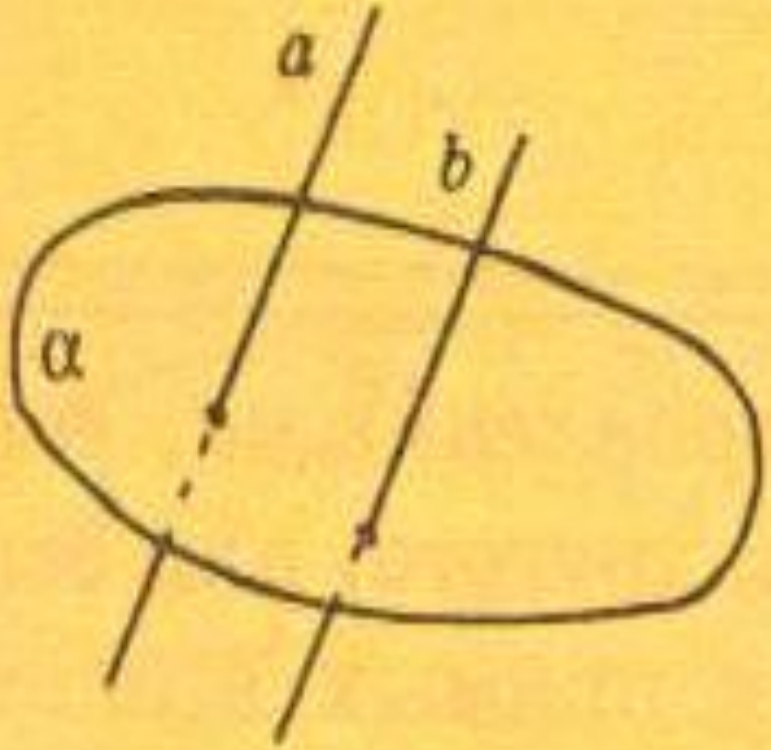
Через две параллельные прямые проходит одна и только одна плоскость





Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD скрещиваются

Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD скрещиваются

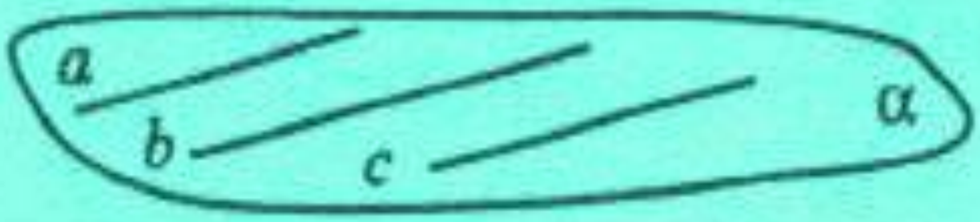


$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \cap \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow b \cap \alpha$$

Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость

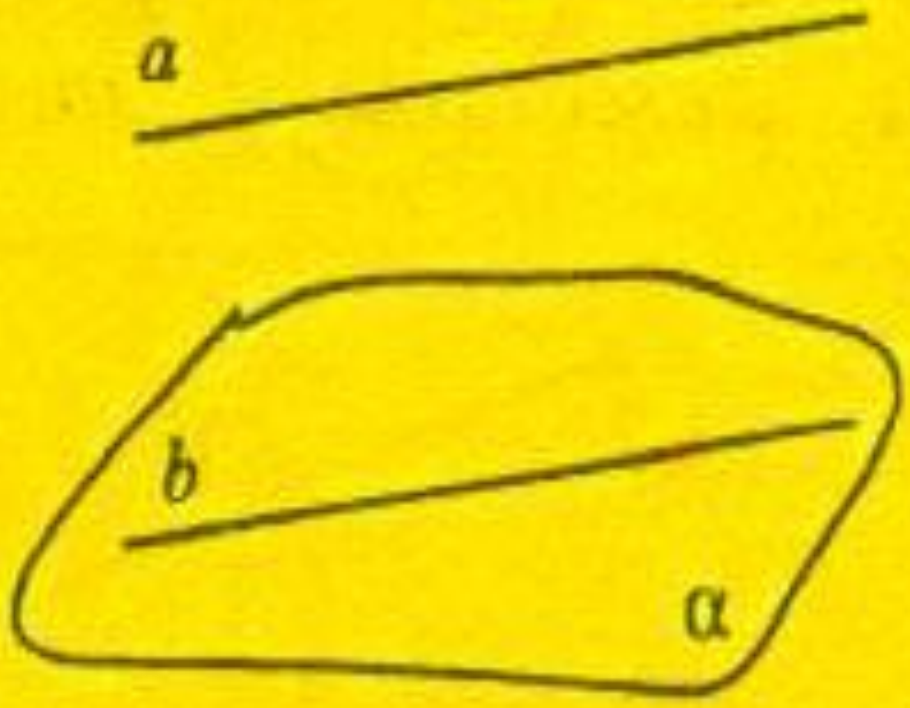
Признак параллельности прямых

- Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой



$$\left.\begin{matrix} a \parallel c \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

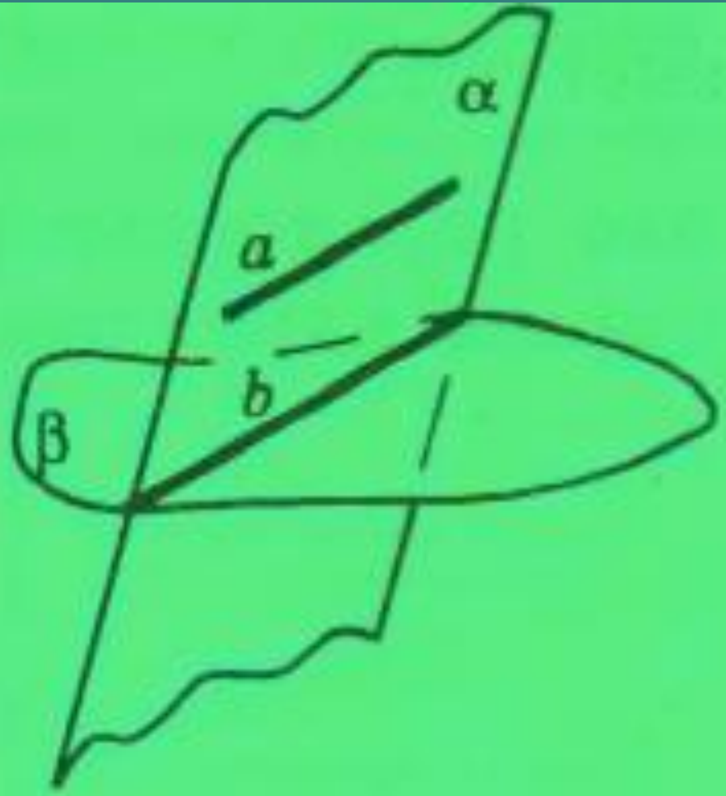
Признак параллельности прямой и плоскости



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$

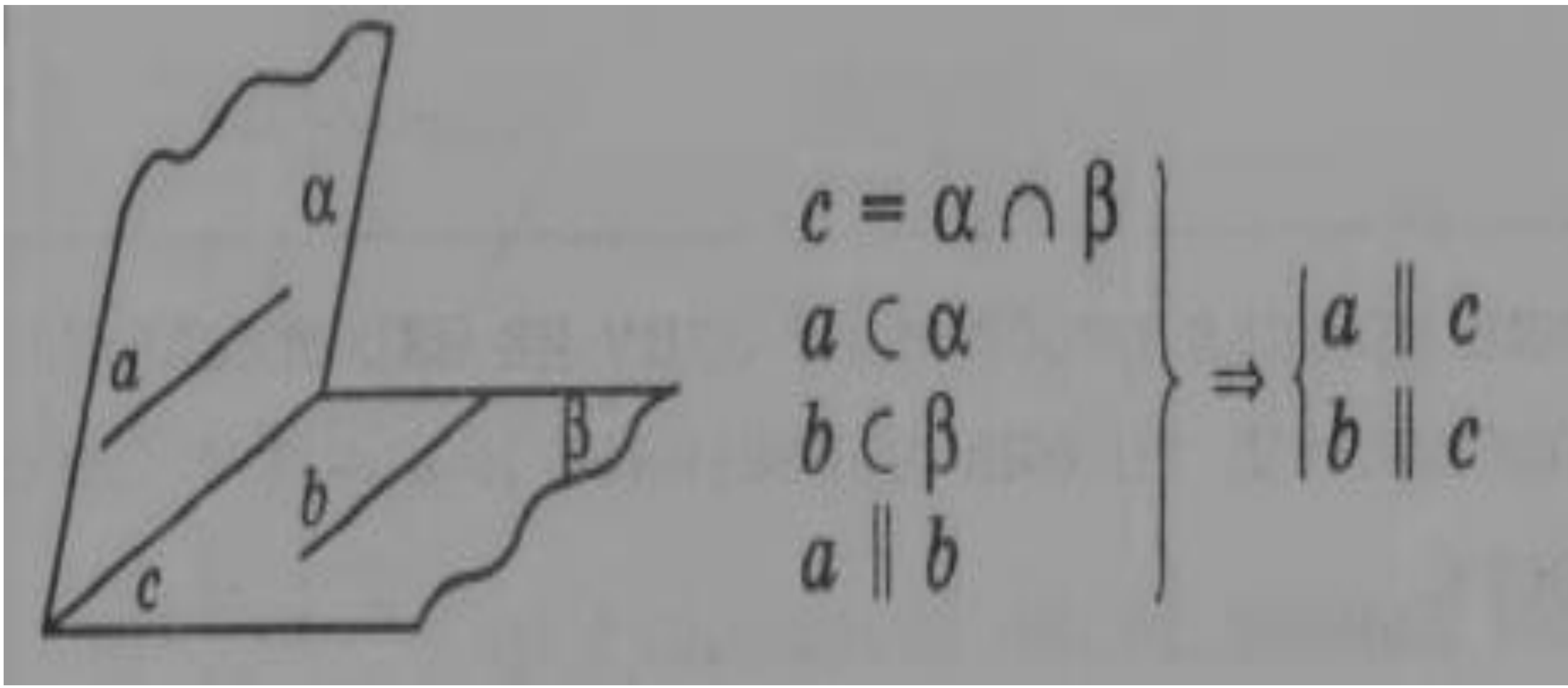
Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости

Если одна из пересекающихся плоскостей проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой.

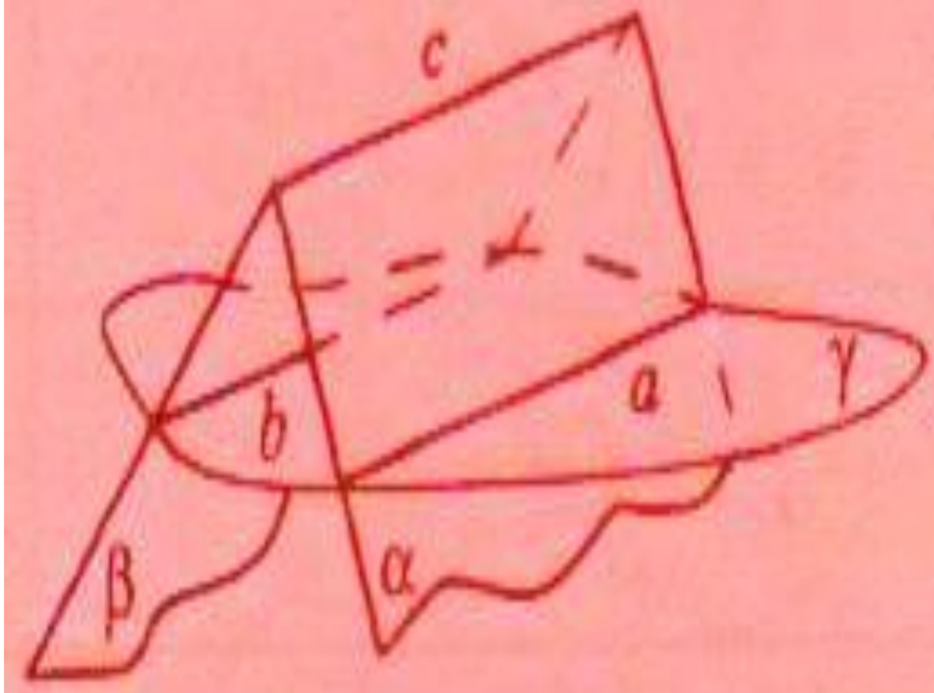


$$\left.\begin{aligned} &\alpha \cap \beta = b \\ &a \subset \alpha \\ &a \parallel \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Если каждая из пересекающихся плоскостей проходит через одну из двух параллельных прямых, то прямая пересечения плоскостей параллельна этим прямым

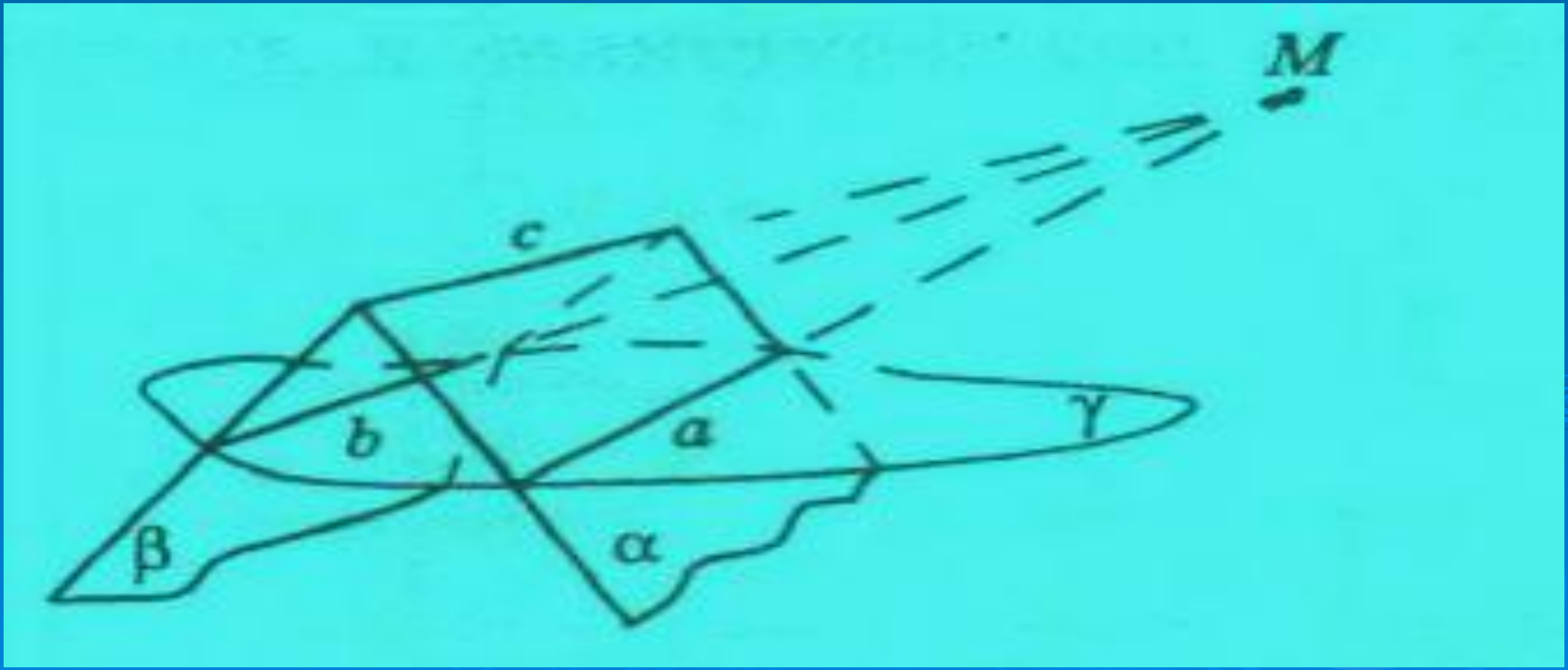


Если две пересекающиеся плоскости пересечены третьей плоскостью по параллельным прямым, то линия их пересечения параллельна этим прямым



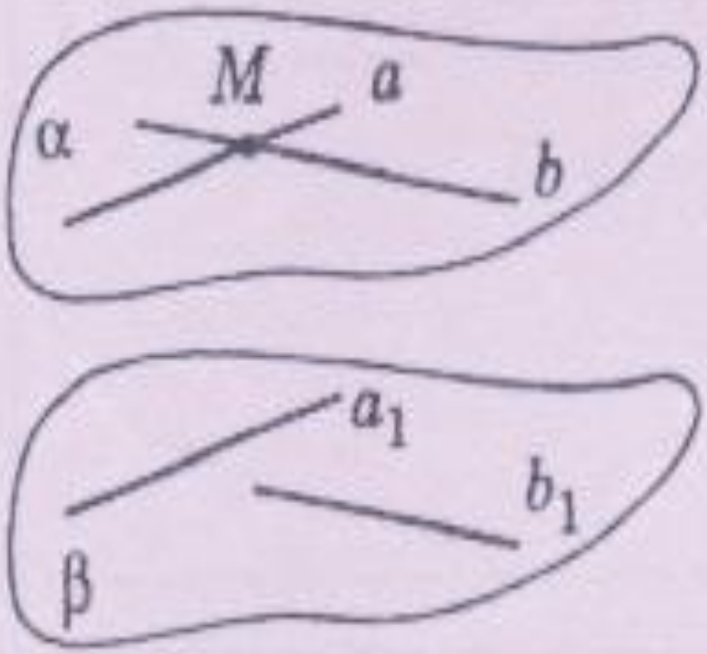
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = c \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c \parallel a \\ c \parallel b \end{array}\right.$$

Если две пересекающиеся плоскости пересечены третьей плоскостью по пересекающимся прямым, то точка их пересечения лежит на линии пересечения плоскостей

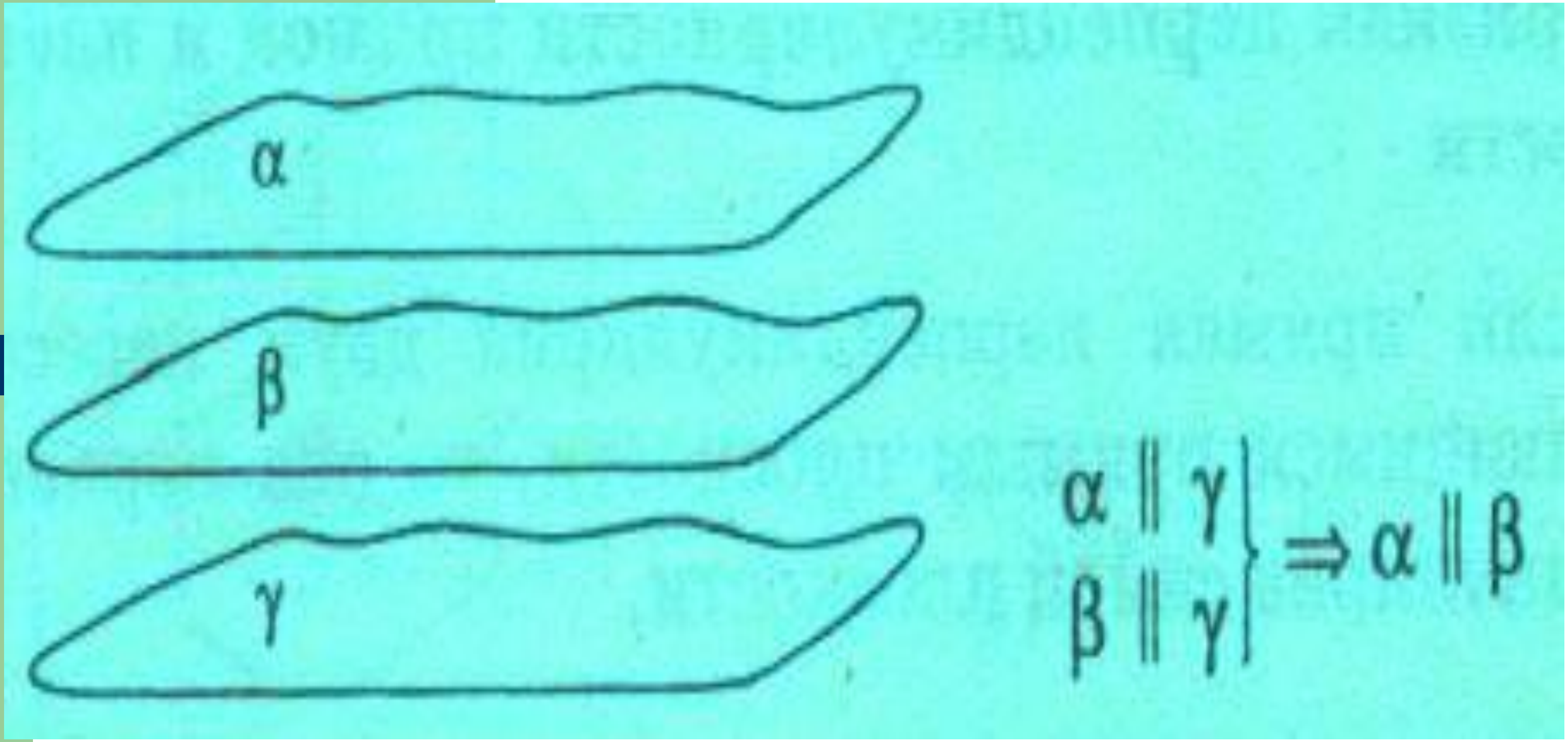


Признаки параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

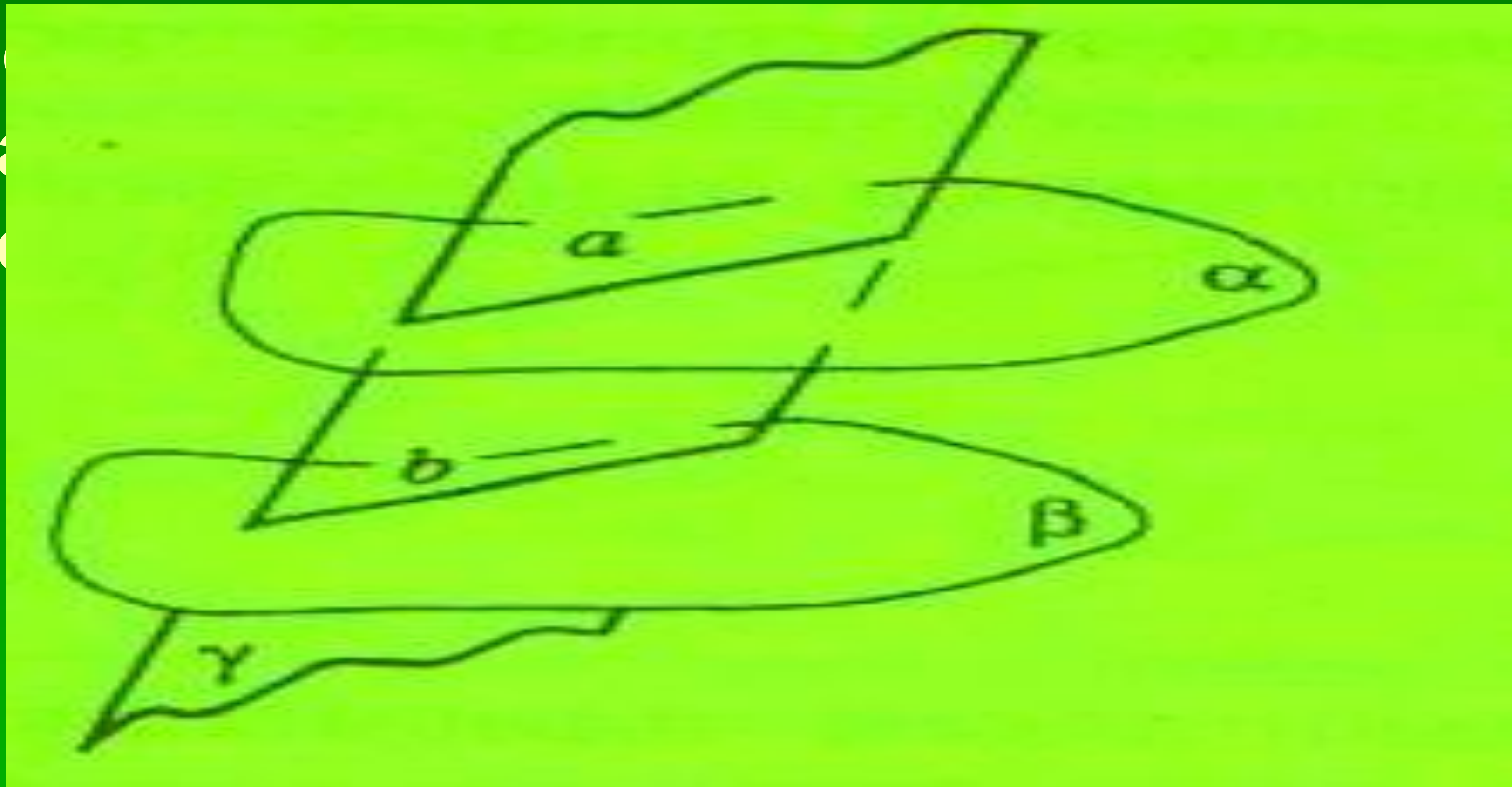


$$\left.\begin{array}{l} a \cap b = M \\ a \subset \alpha;\ b \subset \alpha \\ a \parallel a_1;\ b \parallel b_1 \\ a_1 \subset \beta;\ b_1 \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$



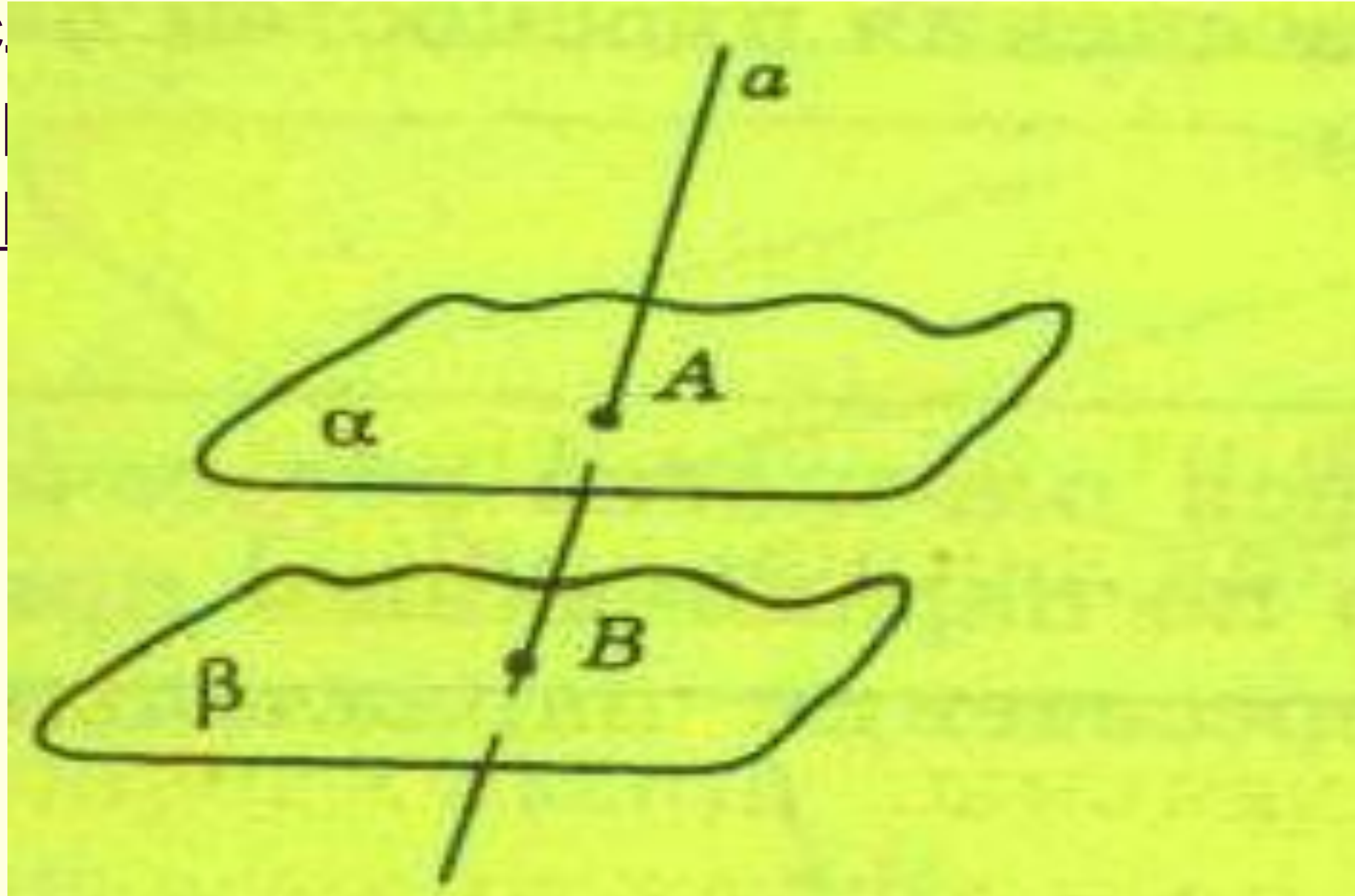
Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой

Свойства параллельных плоскостей



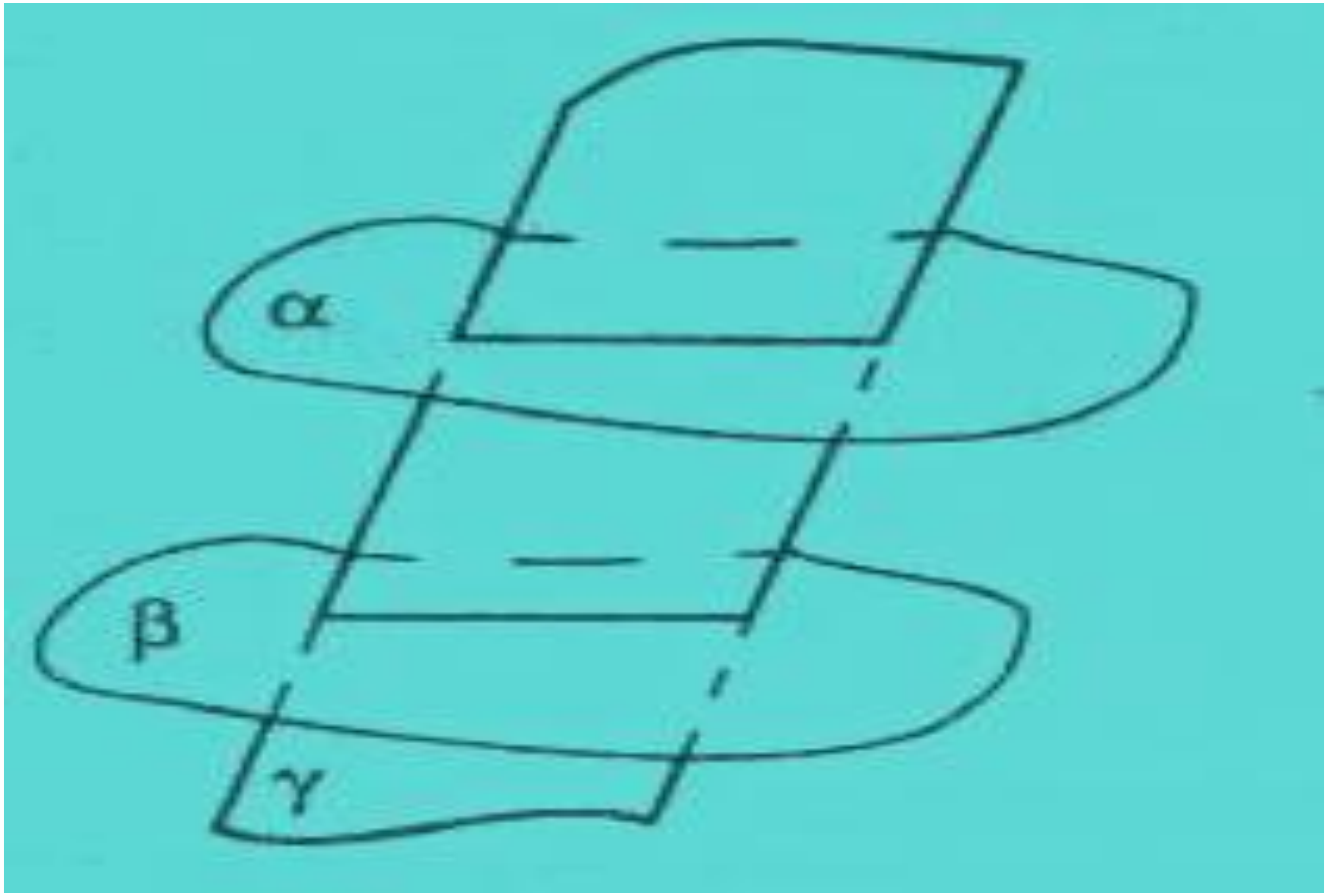
Если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то прямые пересечения параллельны

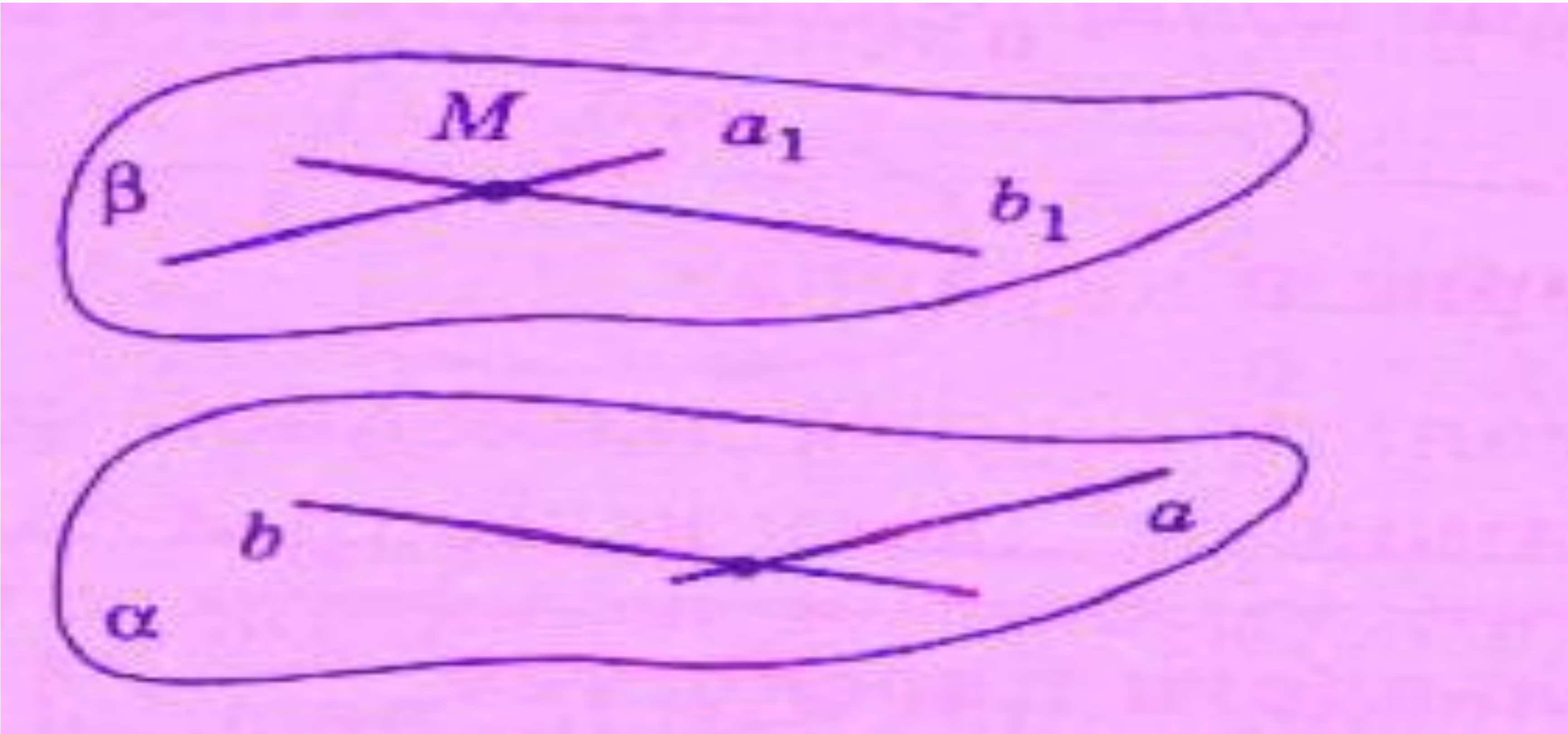
Ес
па
пе



Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость

Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость

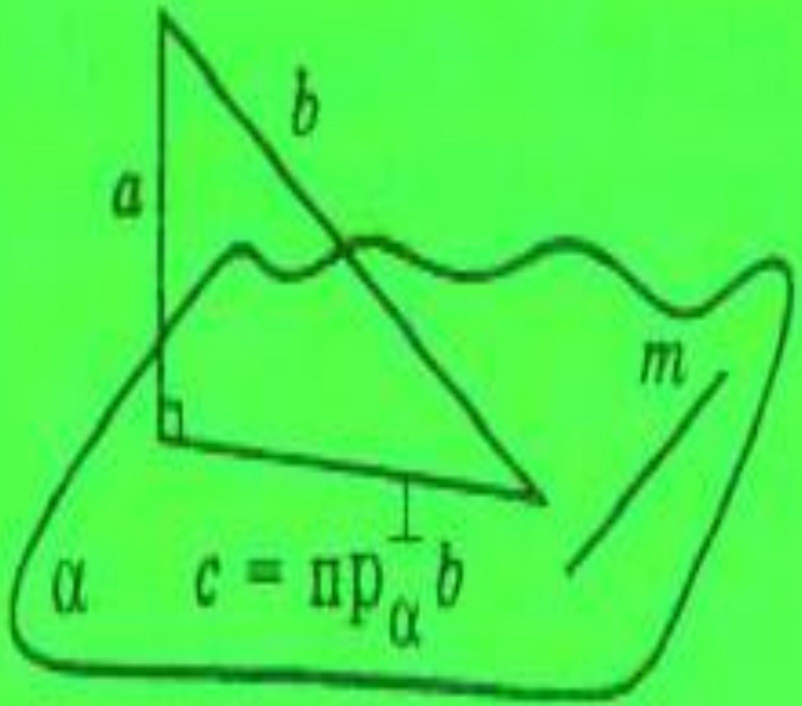




Через точку, не лежащую на плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной

Теорема о трех перпендикулярах

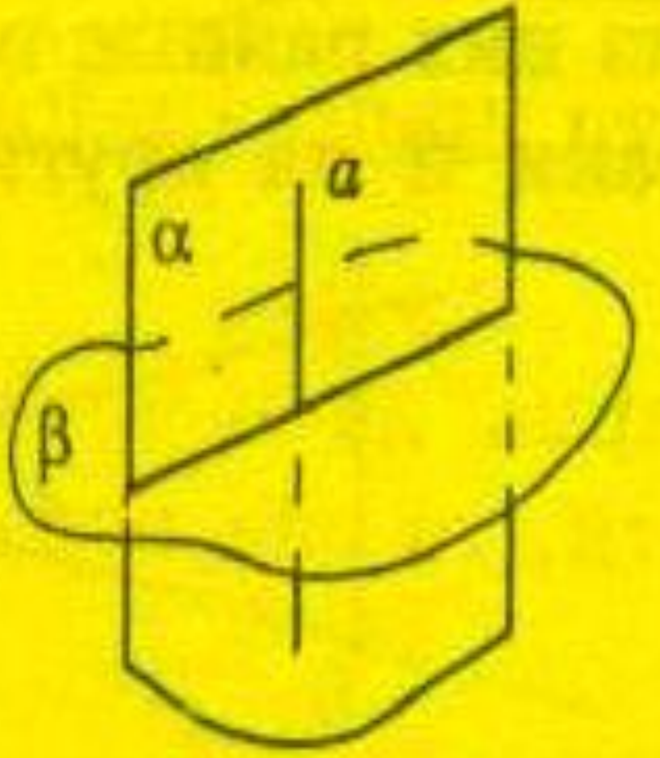
- Если (ортогональная) проекция наклонной перпендикулярна прямой на плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой.
- Если наклонная перпендикулярна некоторой прямой плоскости, то и (ортогональная) проекция наклонной на эту плоскость перпендикулярна этой прямой.



$$\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \cap \alpha \\ b \not\perp \alpha \\ c = \text{пр}^{\perp}_{\alpha} b \\ m \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (c \perp m) \Leftrightarrow$$

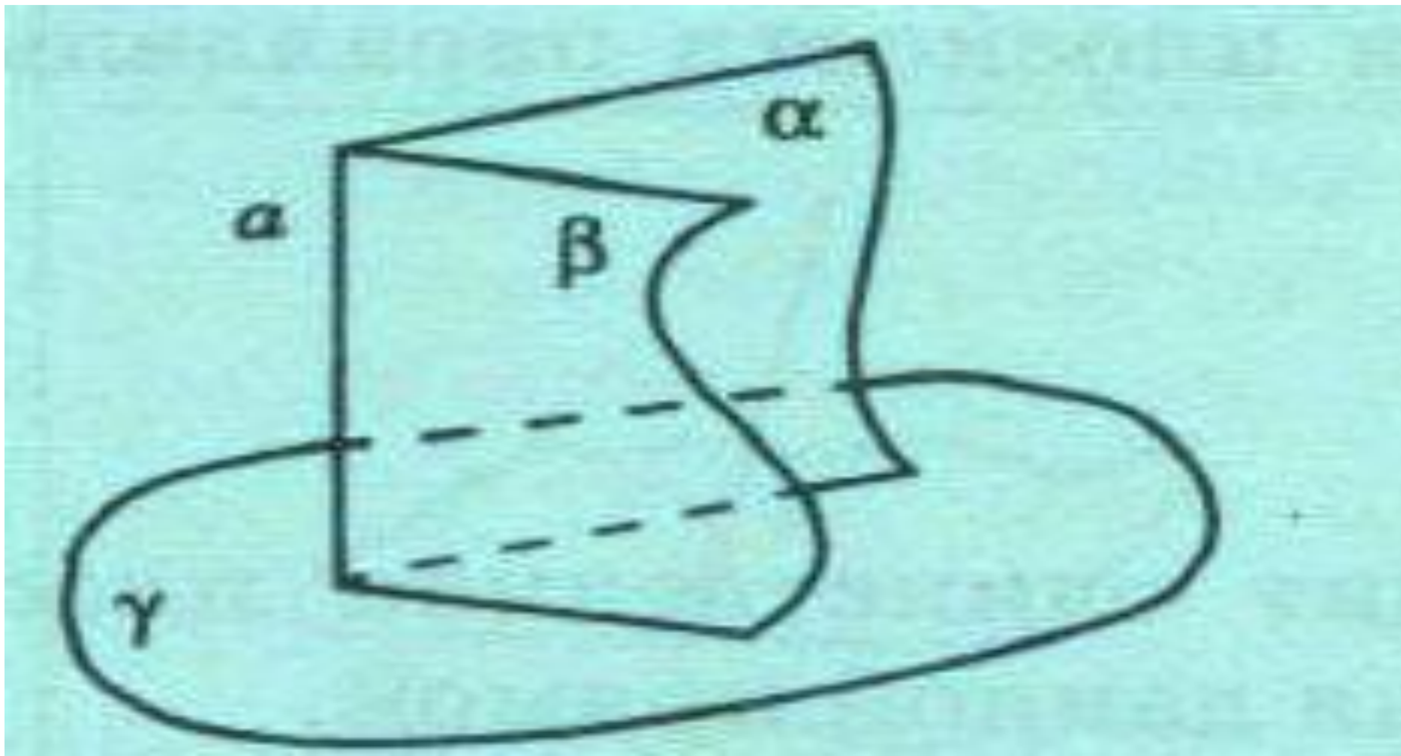
$$\Leftrightarrow (b \perp m)$$

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости



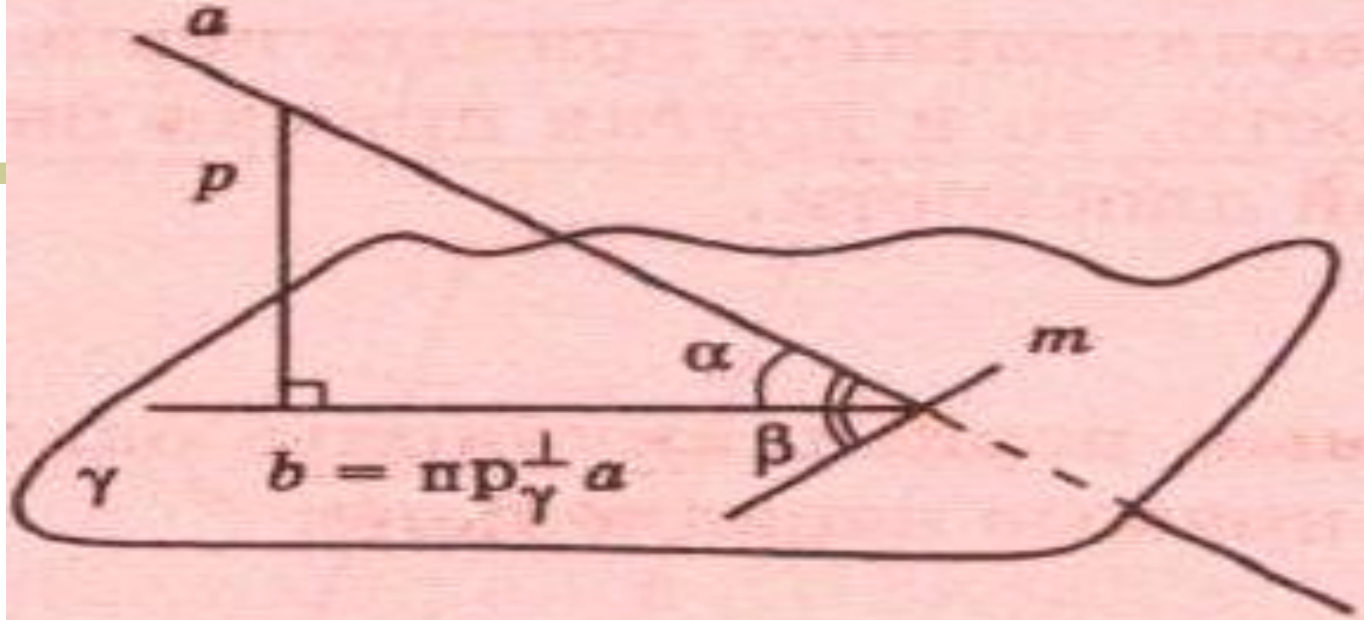
$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ a \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то и линия их пересечения перпендикулярна этой плоскости



- Угол, образованный наклонной и плоскостью, не больше угла между этой наклонной и любой прямой плоскости.

- Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.



$p \perp \gamma$

$a \cap \gamma$ $\qquad\qquad b = \text{пр}_{\gamma}^{\perp} a$

$a \not\perp \gamma$

$m \subset \gamma$

$\angle(a, \gamma) = \alpha = \angle(a, b) \leqslant \beta = \angle(a, m)$

Контрольные работы и задания по карточкам

Карточка 1

- Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые AB и CD пересекаться?
- Через точки K, L и середину N отрезка KL проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках K_1, L_1, N_1 соответственно. Найдите длину отрезка NN_1, если KK_1 = 15 м, LL_1 = 5 м, причем отрезок KL не пересекает плоскость α.

Карточка 2

- Точки K, L, M, T не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые KL и MT пересекаться?
- Через точки A, B и середину N отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, N_1 соответственно. Найдите длину отрезка NN_1, если AA_1 = 10 м, BB_1 = 8 м, причем отрезок AB не пересекает плоскость α.

Карточка 3

- Прямые b и c пересекаются. Прямая f является скрещивающейся с прямой b. Могут ли прямые c и f быть параллельными? Ответ обоснуйте.
- Плоскость β проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции ABCD – точки S и P. Докажите, что AD || β. Найдите BC, если AD=6 м, SP =9 м.

Карточка 4

- Прямые a и b пересекаются. Прямая k является скрещивающейся с прямой a. Могут ли прямые b и k быть параллельными? Ответ обоснуйте.

  Плоскость β проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции ABCD – точки S и P. Докажите, что AD || β. Найдите BC, если AD=12 см, SP =10см.

Карточка 1

- Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости β, пересекающие её в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если AC = 8 см, BD= 5 см, CD= 4 см и отрезок AB не пересекает плоскость β.

Карточка 2

- Через точки М и К проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие её в точках T и L соответственно. Найдите расстояние между точками М и К, если МТ= 12 см, КL = 8 см, TL = 3 см и отрезок МК не пересекает плоскость α.

Карточка 3

- Телефонная проволока длиной 10 м. протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 12 м. от поверхности земли, к дому, где её прикрепили на высоте 18 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

Карточка 4

- Телефонная проволока длиной 10 м. протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 14 м. от поверхности земли, к дому, где её прикрепили на высоте 22 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

Карточка 1

- Точка отстоит от плоскости на 12 см; из неё проведена к плоскости наклонная, равная 13 см. Чему равна проекция этой плоскости?
- CDEK – квадрат, диагональ которого равна 8 см. BD перпендикулярно плоскости CDE. Найдите расстояние от точки B до плоскости CDE, BK=10 см.

Карточка 2

- Точка отстоит от плоскости на 8 см; из неё проведена к плоскости наклонная, равная 10 см. Чему равна проекция этой плоскости?
- CDEK – квадрат, диагональ которого равна 12 см. BD перпендикулярно плоскости CDE. Найдите расстояние от точки B до плоскости CDE, BK=13 см.

Параллельность прямых и плоскостей

- № 1
- Через концы отрезка CD и его середину К проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках C1, D1 и К1.Найдите длину отрезка КК1, если отрезок CD не пересекает плоскость и CC1=8 см, DD1=10 см.
- CC1=10 см, DD1=12 см.(второй вариант)

№ 2

- Плоскость β проходит через основание KL трапеции KMNL. A и B – середины боковых сторон трапеции. Докажите, что AB||β. Найдите KL, если MN=5 см, AB = 7 см.

- MN=7 см, AB = 9 см. (второй вариант)

№ 3

- Даны параллельные плоскости β и γ. Через точки C и D плоскости проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость γ в точках C1 и D1. Найдите C1D1, если CD=9 см.
- CD=10 см. (второй вариант)

№ 4

- Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

№ 5

- Параллельные прямые **a** и **b** пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A1 и B1, а другую в точках A2 и B2 соответственно. Найдите <A2A1B1, если <A1A2B2 = 140°
- <A1A2B2 = 150°(второй вариант)

Перпендикулярность прямых и плоскостей. № 1

- 1. Через точки А и В проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие её в точках Си Д соответственно. Найдите расстояние между точками А и В, если отрезок АВ не пересекает плоскость α и АС = 10 см, ВД = 4 см, СД = 8 см.

- (Второй вариант: АС = 10 см, ВД = 2 см, СД = 6 см.)

№ 2

- Точка А отстоит от плоскости на расстояние 4 м. Найти длину наклонной, проведенной из этой точки под углом 30° к плоскости.
- (Второй вариант: Точка А отстоит от плоскости на расстояние 6 м.)

№ 3

- Дан прямоугольник АВСД. Через точку О пересечения его диагоналей проведена прямая ОК, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от т. К до вершин прямоугольника, если ОК =24 см, АВ =12 см, АД =16 см.

Вопросы

- 1) Как называется раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве?
- 2) Как называется раздел геометрии, изучающий фигуры на плоскости?
- 3) Назовите основные фигуры в пространстве?
- 4) Могут ли прямая и плоскость иметь две общие точки?
- 5) Сколько плоскостей можно провести через три точки?
- 6) Сколько плоскостей можно провести через прямую и не лежащую на ней точку?
- 7) Сколько может быть общих точек у прямой и плоскости?
- 8) Могут ли прямая и плоскость иметь одну общую точку?

Задания

- Верно ли, что две прямые называются перпендикулярными в пространстве, если они пересекаются под углом 180°?
- Верно ли, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны?
- Верно ли, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую?
- Верно ли, что перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, больше любой наклонной, проведенной из той же точки к плоскости?
- Верно ли, что если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости?
- Верно ли утверждение: Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости?