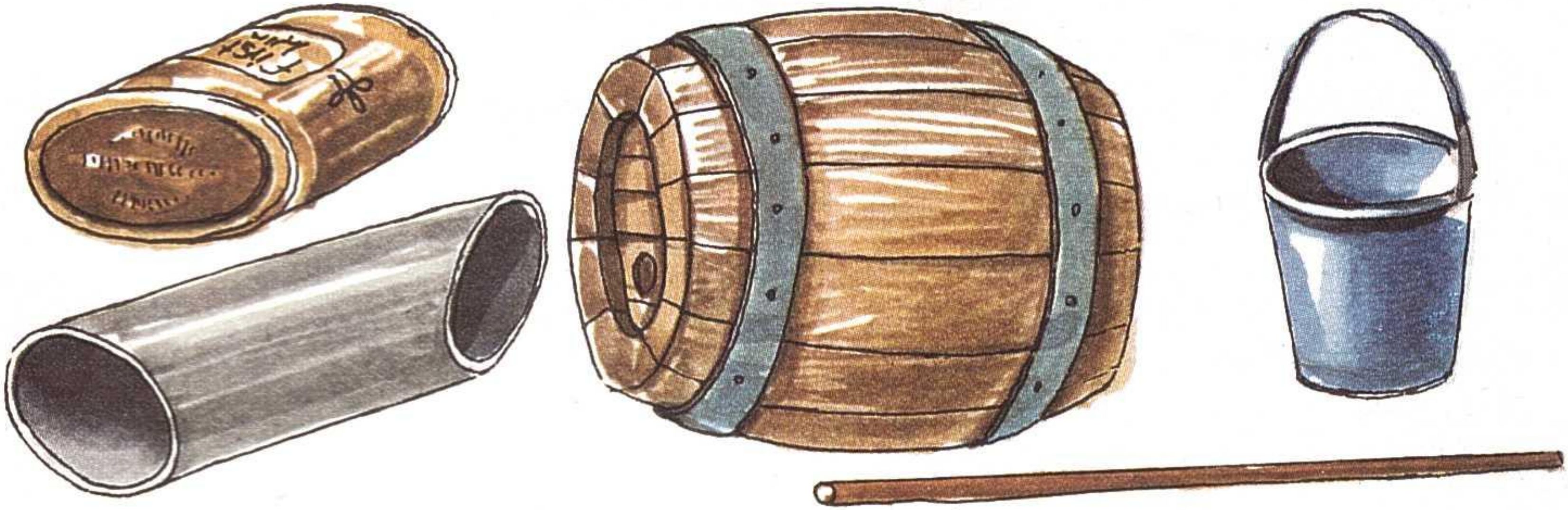


Геометрия

11 класс

КАК ИЗМЕРЯЮТСЯ ОБЪЁМЫ КРУГЛЫХ ТЕЛ?

Цель

Выбрать способ получения формул объёмов тел вращения.

Способ 1. Практический.

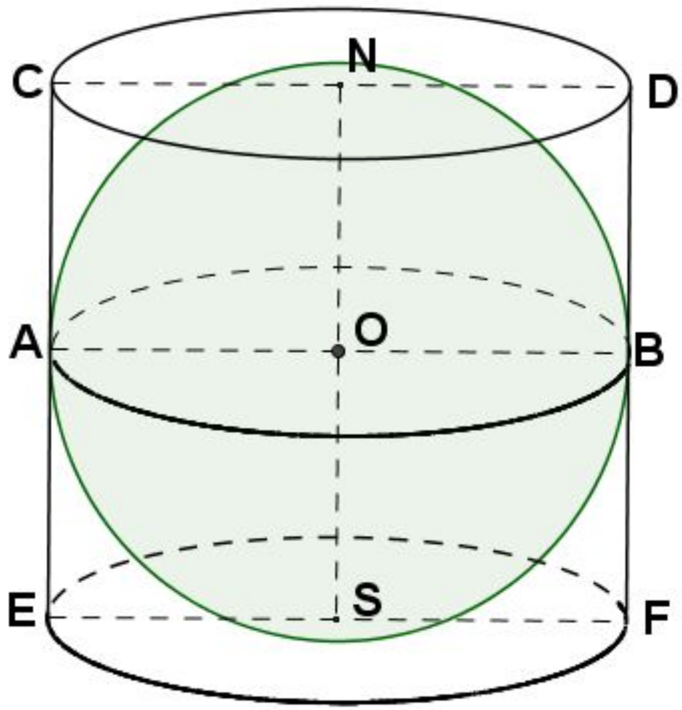
Практическим путём находим объёмы тел при помощи какой-либо меры.

Практический способ использовал Архимед (ок. 287 – 212 гг. до н.э.)

Сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению величин.

Нашёл общий метод, позволяющий определять любой объём.

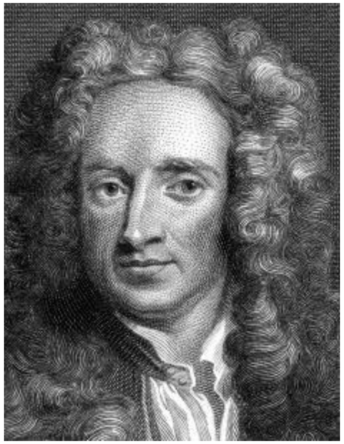
Его «метод исчерпывания» стал основой интегрального исчисления.



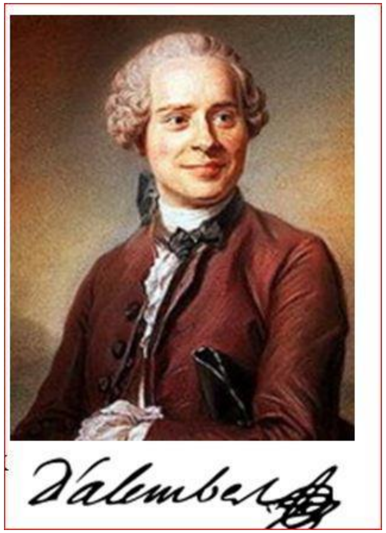
Больше всего Архимед гордился тем, что первым получил соотношение объёма шара и описанного вокруг цилиндра, которое равно $\frac{2}{3}$. Сочетание этих фигур по его завещанию было изображено на его могильной плите.

Практическое измерение объёмов использовалось долго.

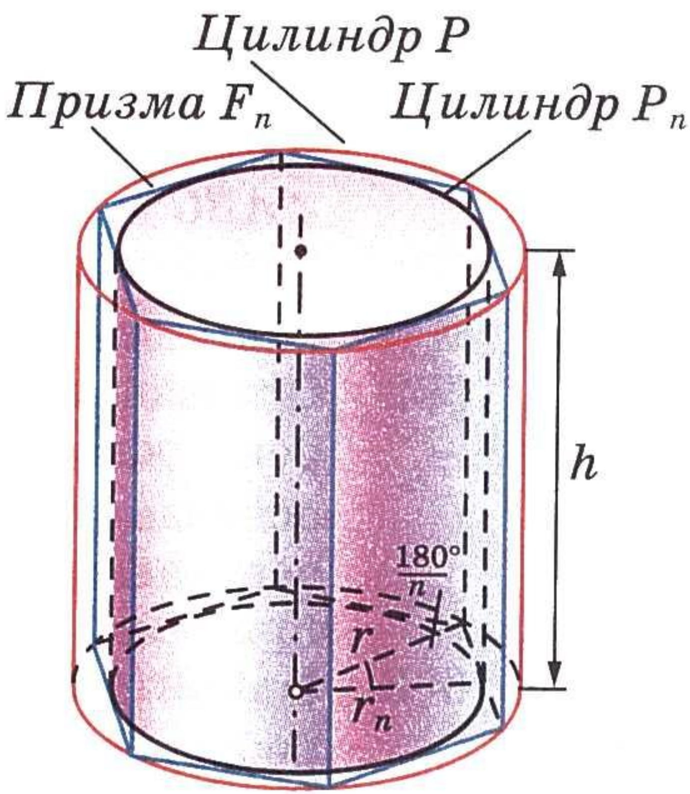
Этим объясняется существование огромного набора мер объёмов: галлон, ведро, бочка и т.д.



Исаак Ньютон, Готфрид Лейбниц, Жан Даламбер, Леонард Эйлер развили теорию пределов.



Способ 2. Предельные ограничения.



Объём цилиндра P_n стремится к объёму цилиндра *P*.

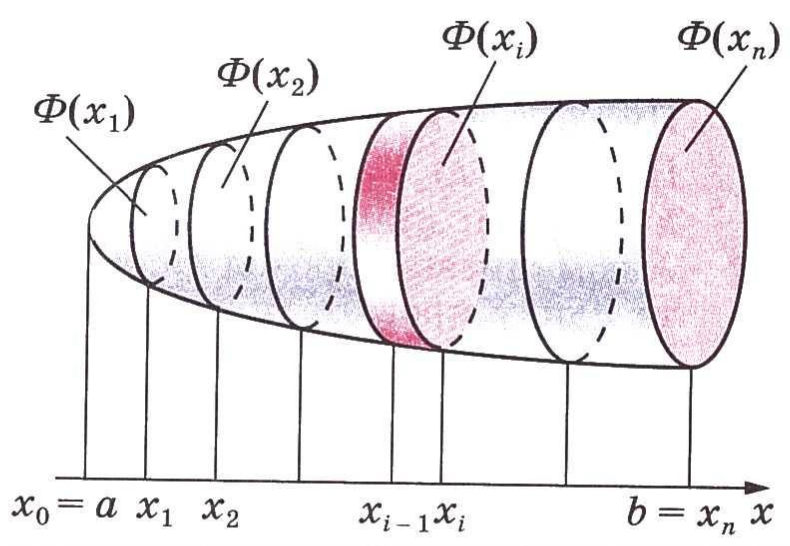
$\lim_{n\to\infty} V_n$=V,

$\lim_{n\to\infty} S_n$·h =V,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ =πr^2,

V= πr^2h или V=S·h

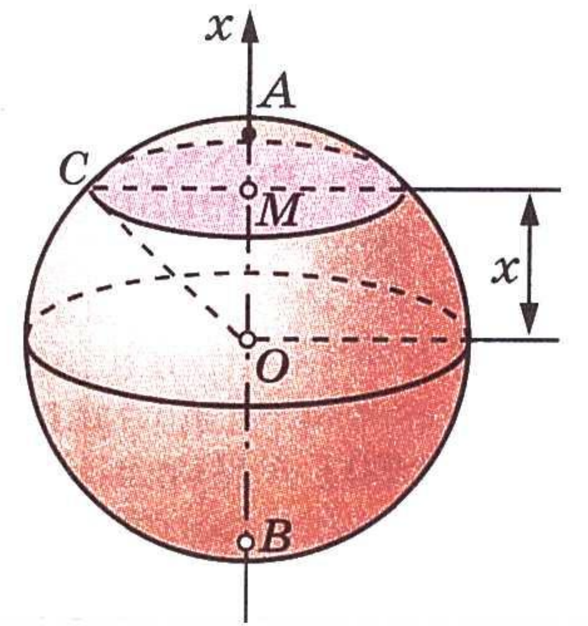
Способ 3. С помощью интеграла.



- V≈$V_n=\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx$.

V=$\boldsymbol{\int_a^b S(x)dx}$

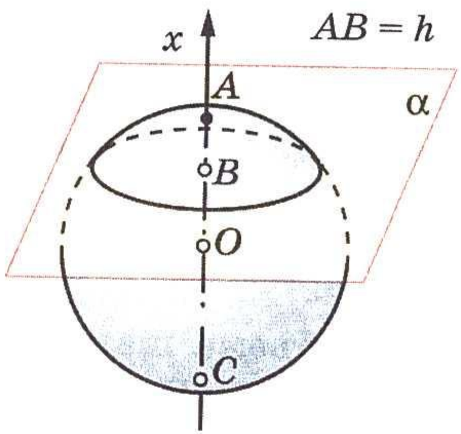
Пример 1. Объём шара.



$$V = \int_{-R}^{R} \pi \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

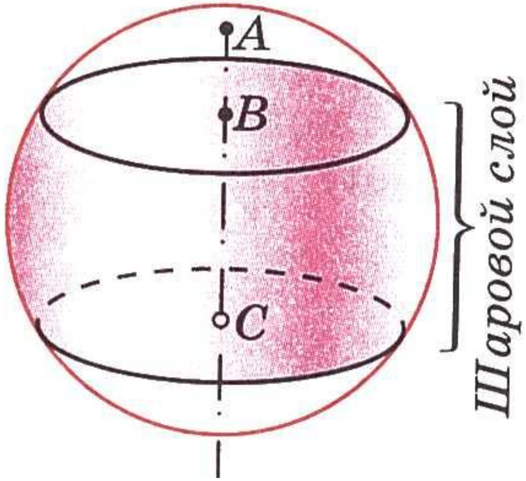
Пример 2. Объём шарового сегмента.



Шаровой сегмент

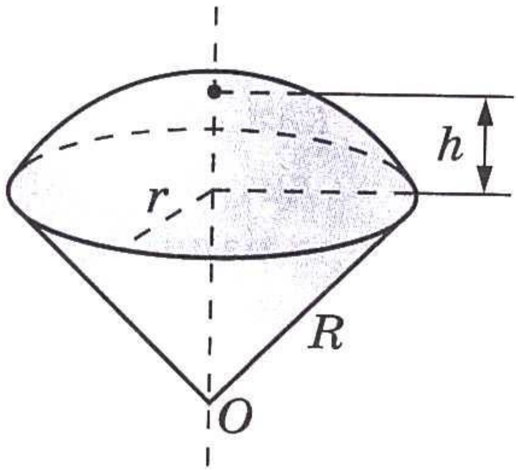
$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

Пример 3. Объём шарового



$$V=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right).$$

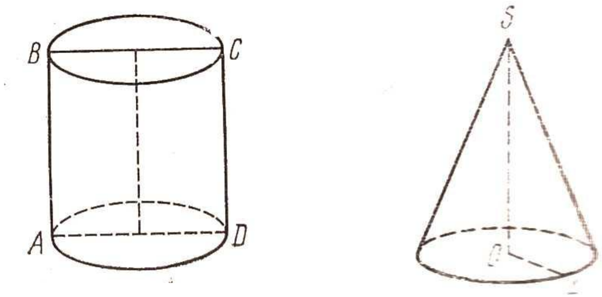
Пример 4. Объём шарового сектора.



Шаровой сектор

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Группа 1. Практическое определение соотношения объёмов.



Оборудование: полые цилиндр и конус равной высоты и равного основания.

Цель: сравнить объём цилиндра и конуса.

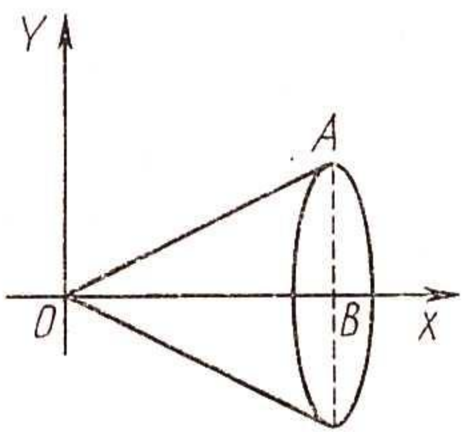
Группа 2.

Получить формулу объёма конуса методом ограничений пирамиды.

Группа 3.

Получить формулу объёма конуса с использованием интегрирования.

- Необходимо найти объём фигуры, полученной от вращения графика функции f(x)=$\frac{R}{H}$x, ограниченной линиями y=0, x=0, x=H (OB).



$$V_{\text{кон}} = \pi \int_0^H f^2(x)\,dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}\,x\right)^2 dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R^2}{H^2}\,x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \pi\,\frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3} = \frac{1}{3}\,\pi R^2 H.$$

Итоги

3 группы получили формулу объёма конуса разными способами.

Какой из способов вызвал у вас интерес?

$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$

Домашнее задание

§§81, 82, с. 170, 174-175

Одним из выбранных способов вывести формулу объёма усечённого конуса.