

Геометрия

11 класс

КАК ИЗМЕРЯЮТСЯ ОБЪЁМЫ КРУГЛЫХ ТЕЛ?

Цель

Выбрать способ получения формул объёмов тел вращения.

Способ 1. Практический.



Практическим путём находим объёмы тел при помощи какой-либо меры.



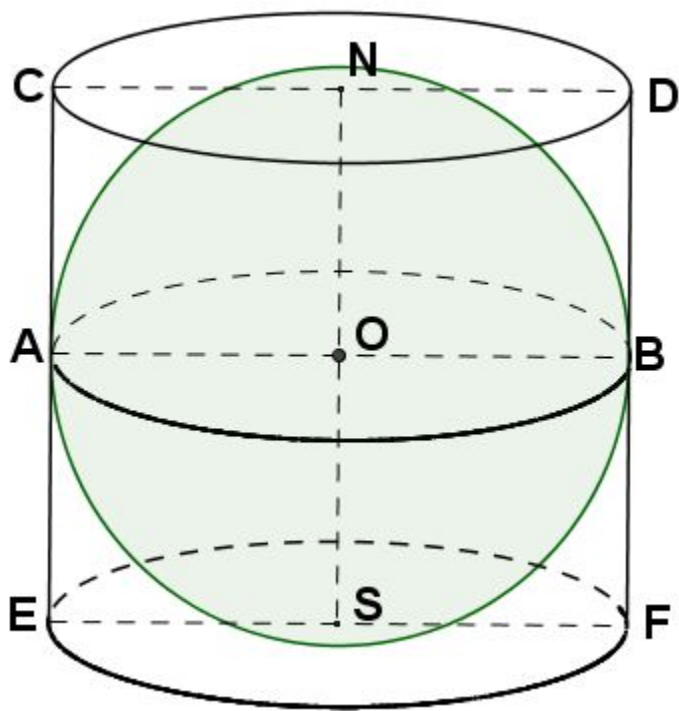
Практический способ использовал Архимед (ок. 287 – 212 гг. до н.э.)



Сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению величин.

Нашёл общий метод, позволяющий определять любой объём.

Его «метод исчерпывания» стал основой интегрального исчисления.



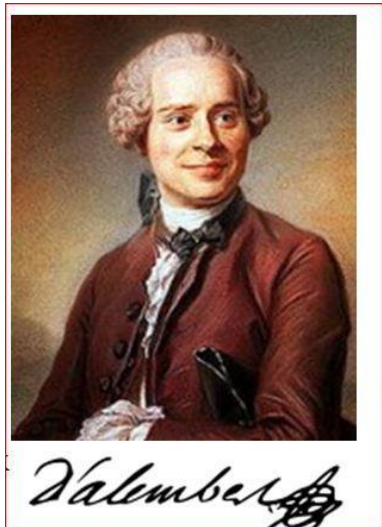
Больше всего Архимед гордился тем, что первым получил соотношение объёма шара и описанного вокруг цилиндра, которое равно $\frac{2}{3}$. Сочетание этих фигур по его завещанию было изображено на его могильной плите.



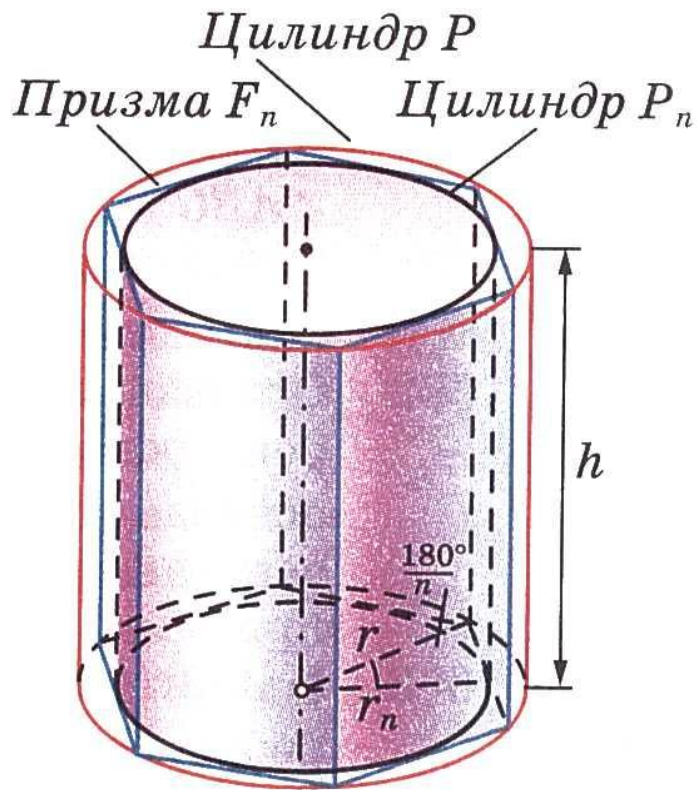
Практическое измерение объёмов использовалось долго. Этим объясняется существование огромного набора мер объёмов: галлон, ведро, бочка и т.д.



Исаак Ньютон,
Готфрид Лейбниц, Жан
Даламбер, Леонард
Эйлер развили теорию
пределов.



Способ 2. Предельные ограничения.



Объём цилиндра P_n стремится к объёму цилиндра P .

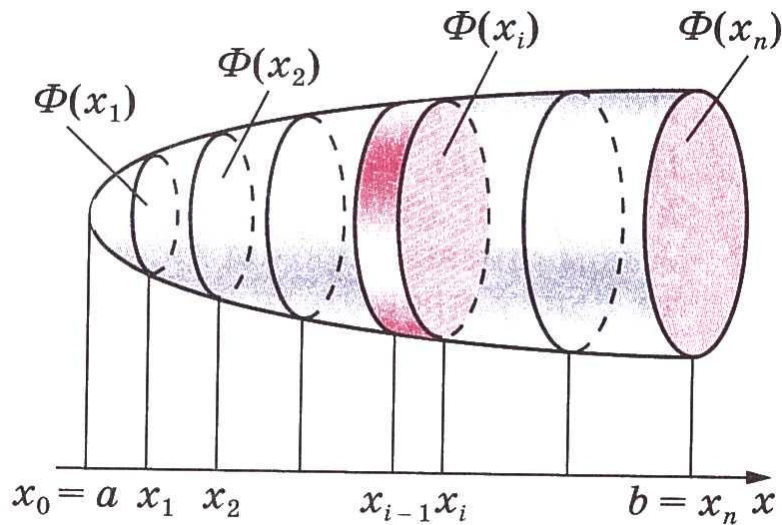
$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \cdot h = V,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi r^2,$$

$$V = \pi r^2 h \text{ или } V = S \cdot h$$

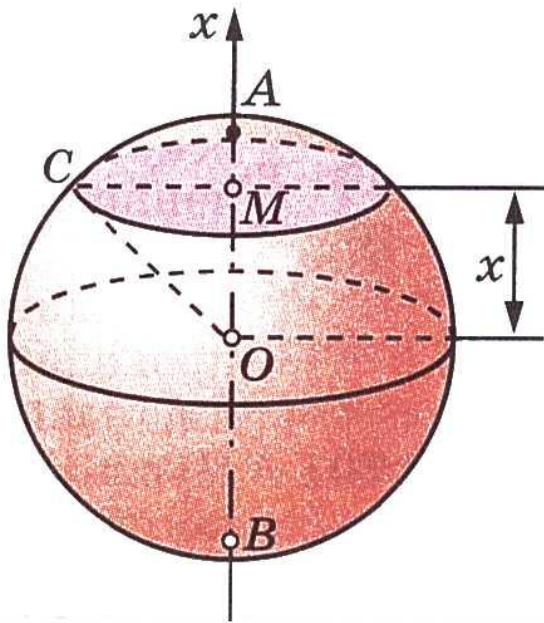
Способ 3. С помощью интеграла.



$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx.$$

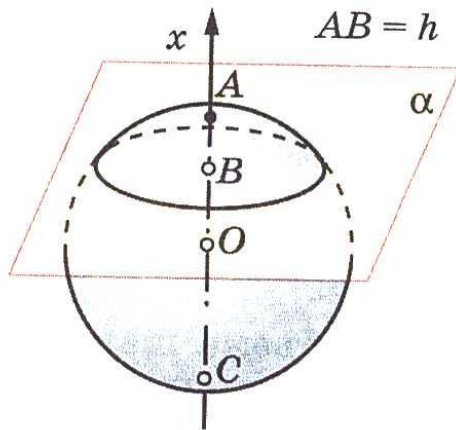
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Пример 1. Объём шара.



$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx = \pi R^2 \int_{-R}^R dx - \pi \int_{-R}^R x^2 dx = \\ &= \pi R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

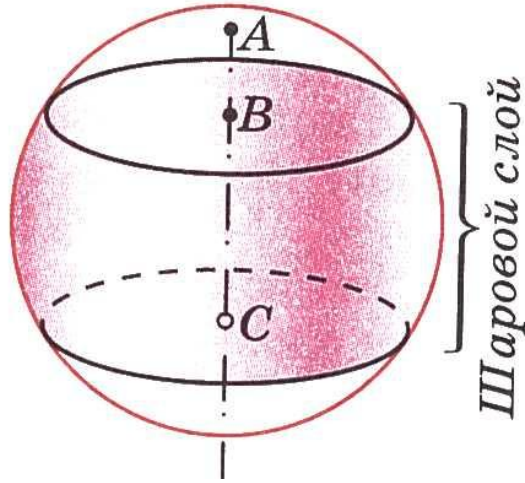
Пример 2. Объём шарового сегмента.



Шаровой сегмент

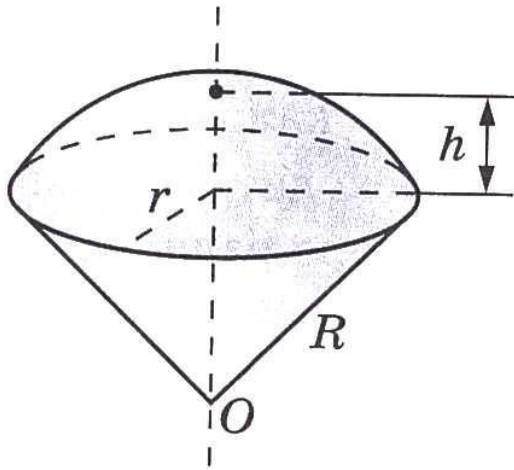
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

Пример 3. Объём шарового



$$V = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-h}^R = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

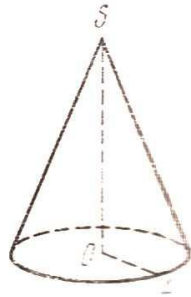
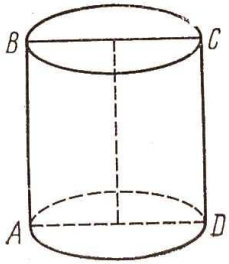
Пример 4. Объём шарового сектора.



Шаровой сектор

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Группа 1. Практическое определение соотношения объёмов.



Оборудование: полые
цилиндр и конус
равной высоты и
равного основания.

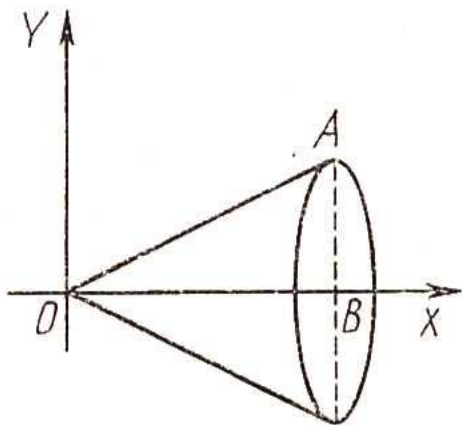
Цель: сравнить объём
цилиндра и конуса.

Группа 2.

Получить формулу
объёма конуса
методом ограничений
пирамиды.

Группа 3.

Получить формулу объёма конуса с использованием интегрирования.



Необходимо найти объём фигуры, полученной от вращения графика функции $f(x) = \frac{R}{H}x$, ограниченной линиями $y=0$, $x=0$, $x=H$ (ОВ).

$$\begin{aligned} V_{\text{кон}} &= \pi \int_0^H f^2(x) dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R^2}{H^2}x^2\right) dx = \\ &= \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \end{aligned}$$

ИТОГИ

3 группы получили формулу объёма конуса разными способами.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

Какой из способов вызвал у вас интерес?

Домашнее задание

§§81, 82, с. 170, 174-175

Одним из выбранных способов вывести формулу объёма усечённого конуса.