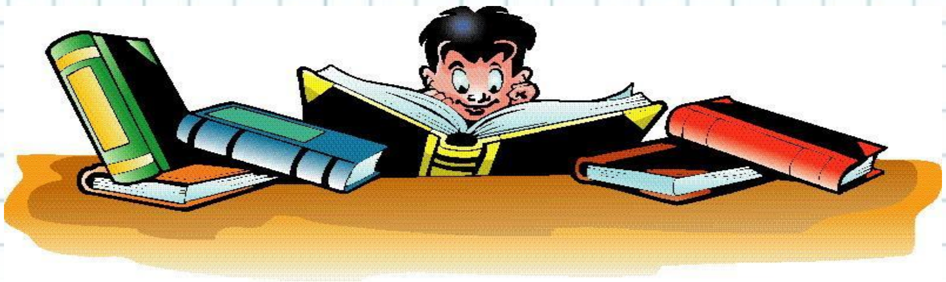
Решение геометрических задач при подготовке к ОГЭ



Из опыта работы преподавателя математики ФГКОУ НСВУ МВД России

Вабищевич С.Н.

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

Методы решения геометрических задач.

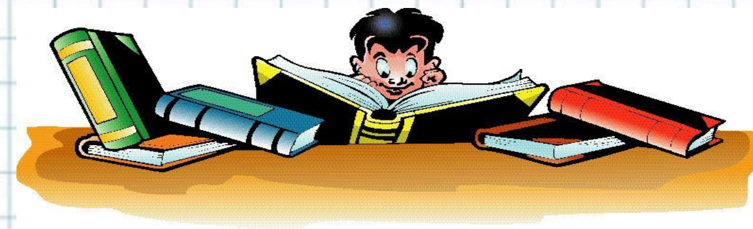
геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;

алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

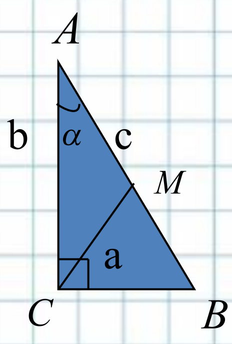
комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

Справочные сведения

Треугольники



α

<table>
<tr><th colspan="2">Прямоугольный треугольник</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

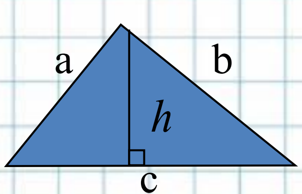
Решение прямоугольных треугольников

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

$\sin\alpha = \frac{a}{c};$ $\cos\alpha = \frac{b}{c};$ $tg\alpha = \frac{a}{b},$

где a – катет, противолежащий α; b - катет, прилежащий к α.

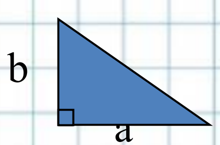
Середина гипотенузы равноудалена от его вершин: MA=MB=MC.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

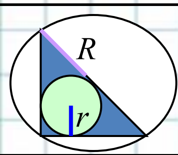
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике:

$h^2 = c_a \cdot c_b;$ $a^2 = c_a \cdot c;$ $b^2 = c_b \cdot c$

c_a, c_b - проекции катетов на гипотенузу.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{ab}{2}$

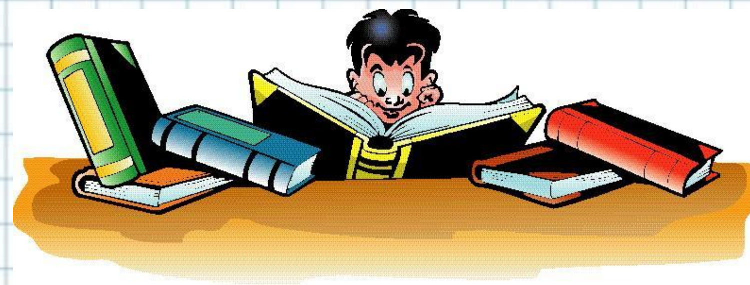
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

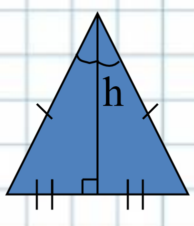
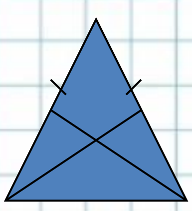
$R = \frac{1}{2}c$ $r = \frac{a+b+c}{2}$

</td></tr>
</table>

Справочные сведения

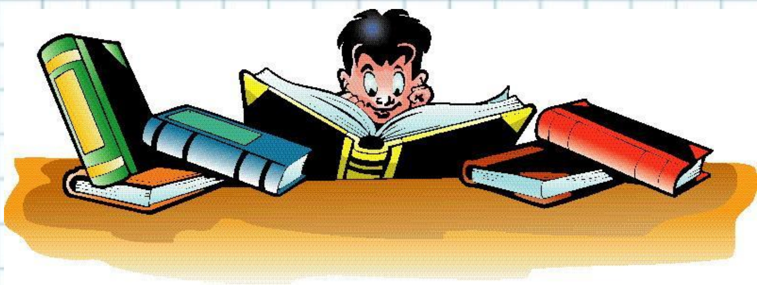
Треугольники



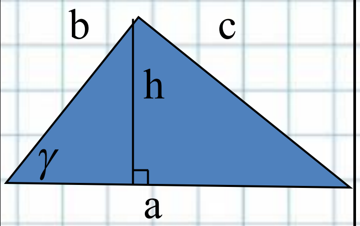
Равнобедренный треугольник	
	Медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.
	Высоты, проведённые к боковым сторонам, равны; медианы, проведённые к боковым сторонам, равны; биссектрисы углов при основании равны.

Справочные сведения

Треугольники



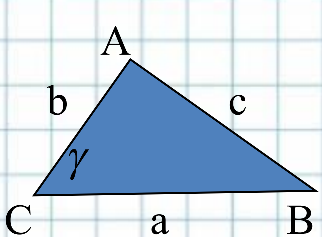
Произвольный треугольник



Площадь треугольника: $S = p \cdot r;$

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma;$ $S = \frac{abc}{4R};$ $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

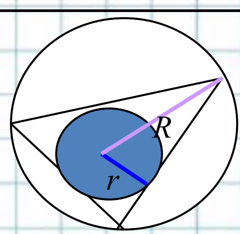
$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$ где p – полупериметр



Сумма углов в треугольнике: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

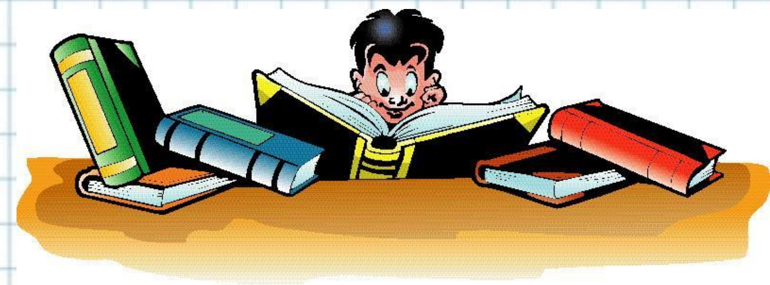
Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \sin\gamma$

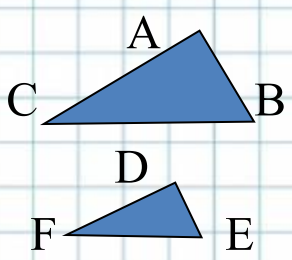
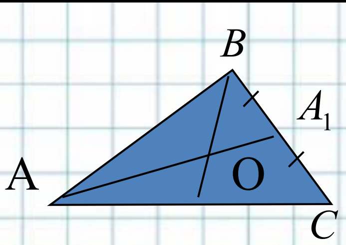
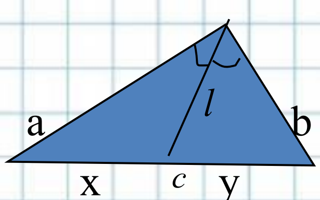


$R = \frac{abc}{4S_\Delta}$ $r = \frac{2S_\Delta}{p}$

Справочные сведения

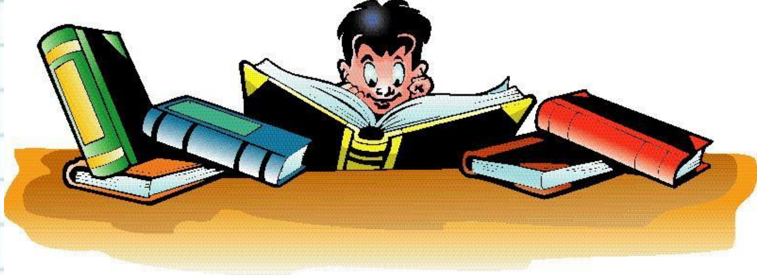
Треугольники



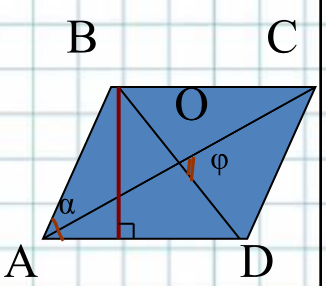
	**Подобие треугольников** в подобных треугольниках $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$ (соответствующие стороны лежат против равных углов)
	Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины угла $(AO : OA_1 = 2 : 1)$ $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-BC^2}$
	Биссектриса угла делит сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам (a : b = x : y). Длина биссектрисы $l=\sqrt{ab-xy}$ $\quad l_c=\frac{2ab\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$

Справочные сведения

Четырехугольники



Параллелограмм



Свойства

ABCD – параллелограмм $\Rightarrow$

AB   CD, BC   AD, AB = CD, BC = AD,

$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$

$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180^0,$

AO = OC, BO = OD,

$2 \cdot (AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.$

Признаки

AB   CD, BC   AD $\Rightarrow$ ABCD – параллелограмм;

AO = OC, BO = OD $\Rightarrow$ ABCD – параллелограмм;

AB = CD, BC = AD $\Rightarrow$ ABCD – параллелограмм;

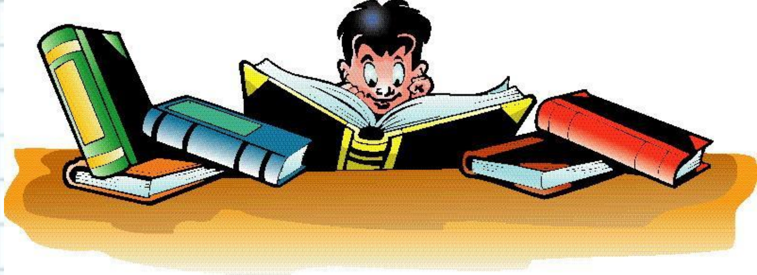
AB = CD, AB   CD $\Rightarrow$ ABCD – параллелограмм;

BC = AD, BC   AD $\Rightarrow$ ABCD – параллелограмм

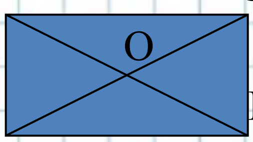
Площадь: $S = \frac{1}{2} a h_a;$ $S = ab \sin \alpha;$ $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$

Справочные сведения

Четырехугольники



Прямоугольник



Свойства

ABCD – прямоугольник $\Rightarrow$

AB   CD, BC   AD, AB = CD, BC = AD;

$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^0$;

AO = BO = CO = DO

(O – центр описанной окружности, OA = R).

Признаки

ABCD – параллелограмм, AC = BD $\Rightarrow$ ABCD – прямоугольник.

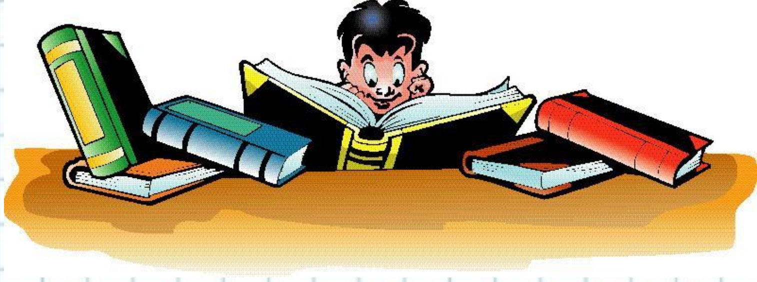
ABCD – параллелограмм, $\angle A = 90^0$ $\Rightarrow$ ABCD – прямоугольник.

Площадь

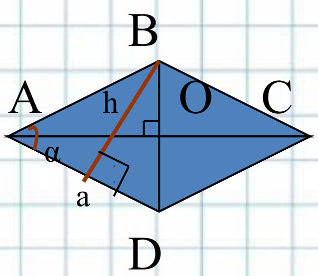
$$S = ab \qquad S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

Справочные сведения

Четырехугольники



Ромб



Свойства

ABCD – ромб $\Rightarrow$ AB CD, BC AD, AB = CD = BC = AD;

$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$; $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180^0$,

$AC \perp BD$, AO = OC, BO = OD;

$\angle BAO = \angle DAO, \angle ABO = \angle CBO, \angle BCO = \angle DCO, \angle ADO = \angle CDO$

Признаки

AB = CD, BC = AD $\Rightarrow$ ABCD – ромб

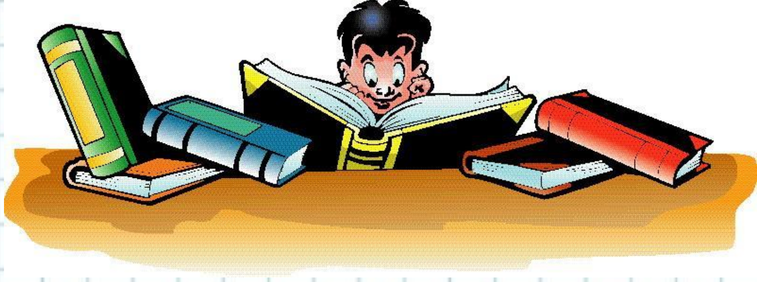
ABCD – параллелограмм, AC $\perp$ BD $\Rightarrow$ ABCD – прямоугольник.

ABCD – параллелограмм, $\angle BAO = \angle DAO \Rightarrow$ ABCD – ромб

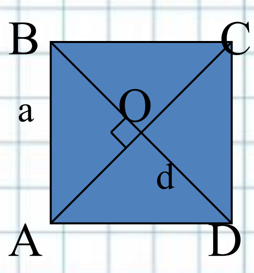
Площадь

$$S = ah_a, \qquad S = a^2 \sin\alpha, \qquad S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Справочные сведения
Четырехугольники



Квадрат



Свойства

ABCD – квадрат $\Rightarrow$ AB CD, BC AD, AB = CD = BC = AD;

$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^0$; $AC \perp BD$, AO = BO = CO = DO;

$\angle BAO = \angle ABO = \angle CBO = \angle BCO = \angle DCO = \angle CDO = \angle ADO = \angle DAO = 45^0$

Признаки

ABCD – прямоугольник, AB = CD = BC = AD $\Rightarrow$ ABCD – квадрат;

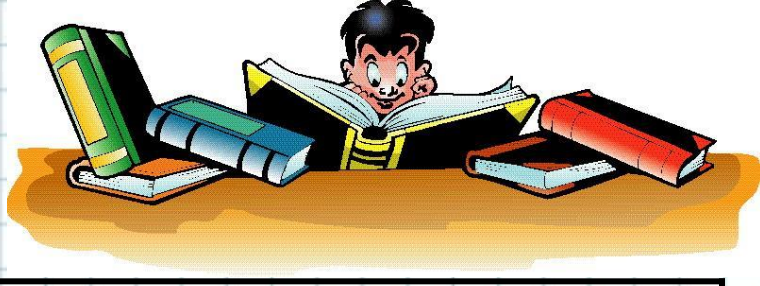
ABCD – ромб, $\angle A = 90^0$ $\Rightarrow$ ABCD – квадрат.

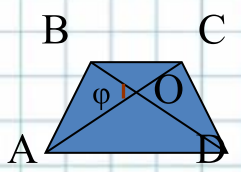
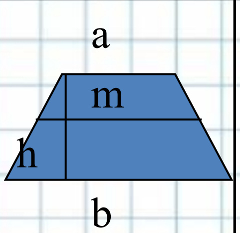
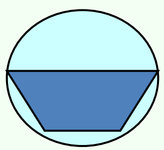
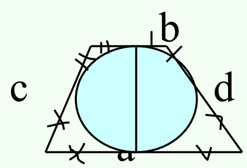
Площадь

$$S = a^2 \qquad S = \frac{d^2}{2}$$

Справочные сведения

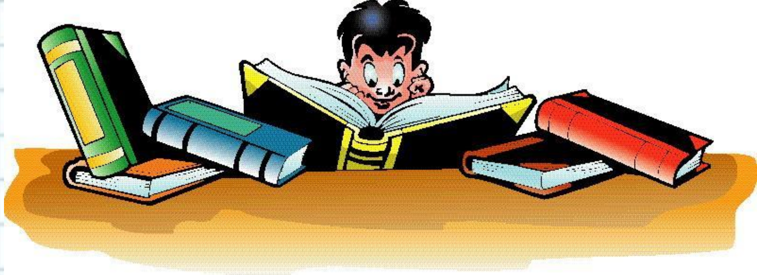
Четырехугольники

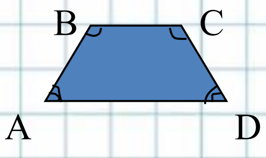
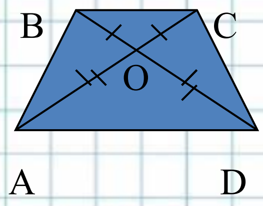
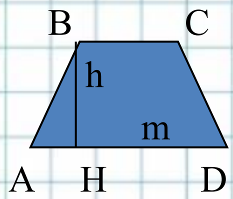
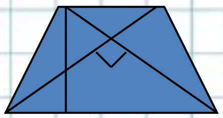


Произвольная трапеция	
	Треугольники AOD и COB подобны. Треугольники AOB и DOC равновелики (их площади равны) **Площадь трапеции:** $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$
	**Средняя линия трапеции:** $m = \frac{a+b}{2}$ **Площадь трапеции:** $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h$
 	**Вписанная в окружность трапеция** – равнобедренная. **В описанной около окружности трапеции:** высота равна диаметру: h = 2 r; сумма оснований равна сумме боковых сторон: a + b = c + d; полусумма боковых сторон равна средней линии: c + d = m; (боковая сторона равнобедренной трапеции равна средней линии).

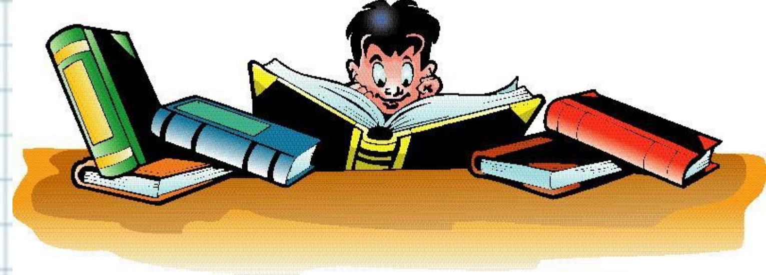
Справочные сведения

Четырехугольники

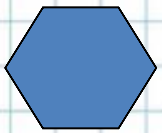
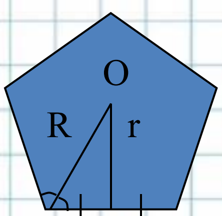
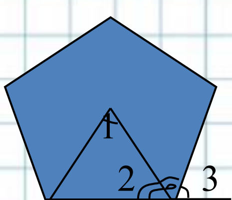


Равнобедренная трапеция	
	Углы при оснований равны: $\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$
	Диагонали равны: AC = BD; отрезки диагоналей равны: AO = DO, BO = CO; углы, образованные основанием и диагоналями, равны: $\angle CAD = \angle ADB, \angle DBC = \angle ACB$
	Основание высоты, проведённой к большему основанию, делит основание на отрезки, равные $\frac{a-b}{2}$ и $\frac{a+b}{2}$ (если BH – высота, то DH = m, где m – средняя линия).
	Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота, проведённая к основанию, равна средней линии: h = m. В этом случае площадь трапеции можно найти по формуле: $S = h^2 = m^2$

Справочные сведения

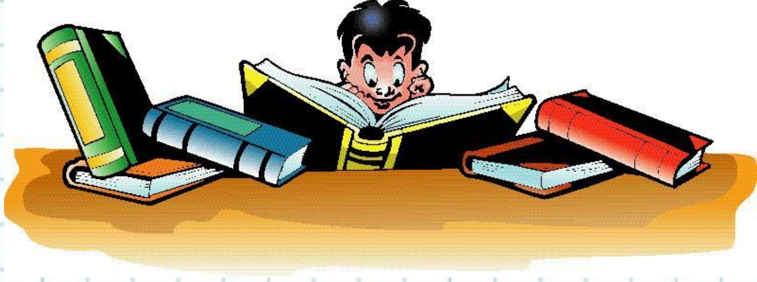


Правильные многоугольники

Сумма углов многоугольника	
	В выпуклом многоугольнике сумма углов равна $180^0 \cdot (m-2)$, где n – число сторон (вершин) многоугольника.
Свойства правильного многоугольника	
	Все стороны равны, все углы равны, O – центр вписанной и описанной окружностей, R – радиус описанной окружности, лежит на биссектрисе угла, r – радиус вписанной окружности, лежит на серединном перпендикуляре к стороне.
	**Центральный угол:** $\angle 1 = 360^0 : n,$ **Внутренний угол:** $\angle 2 = \dfrac{180^0 \cdot (n-2)}{n},$ **Внешний угол равен центральному углу:** $\angle 3 = 360^0 : n.$ $S_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

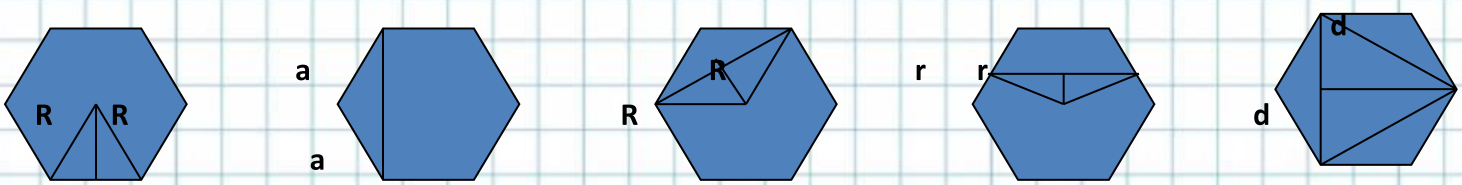
Справочные сведения

Правильные многоугольники



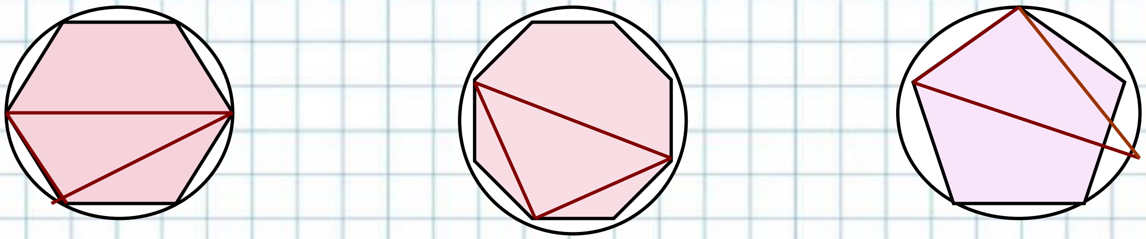
Примеры равнобедренных треугольников,

боковыми сторонами которых являются две стороны многоугольника, два радиуса или равные диагонали:



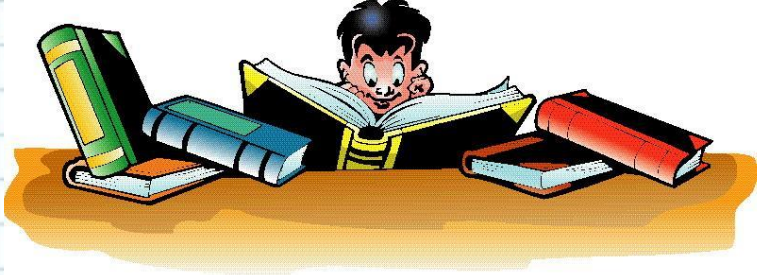
Примеры прямоугольных треугольников

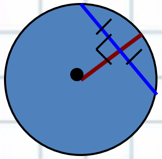
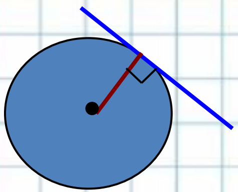
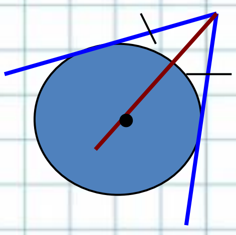
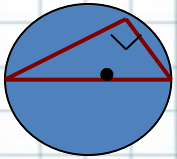
(вписанный угол опирается на диаметр)



Справочные сведения

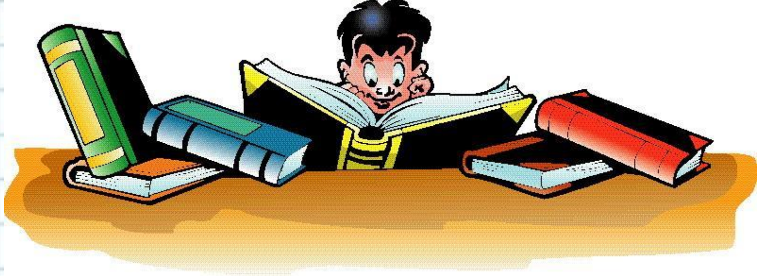
Окружность

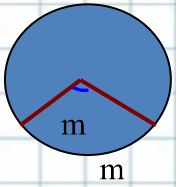
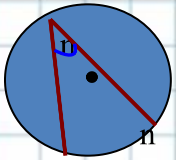
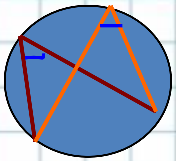
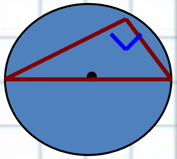


Окружность и её элементы	
	Радиус, проходящий через середину хорды, перпендикулярен этой хорде. Радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
	Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.
	Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны. Центр окружности лежит на биссектрисе угла, образованного касательными, проведёнными из одной точки.
	Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90^0

Справочные сведения

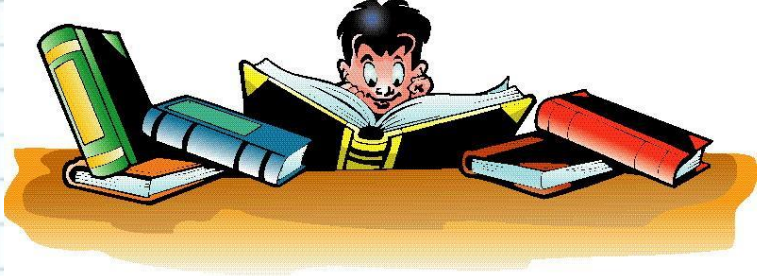
Окружность

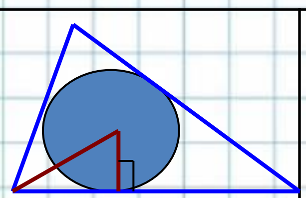
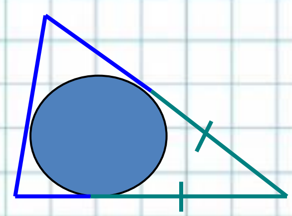
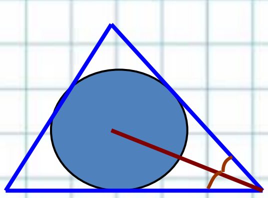


Окружность и её элементы	
	Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается.
	Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
	Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.
	Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Справочные сведения

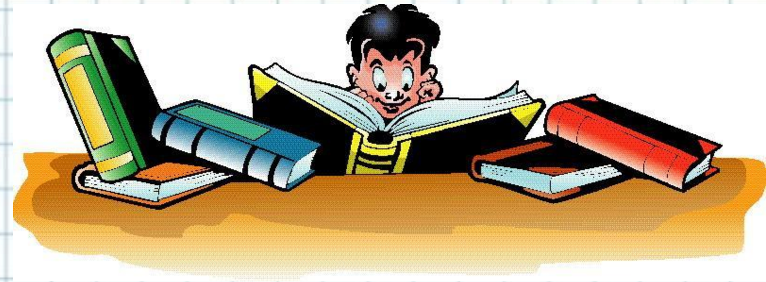
Окружность

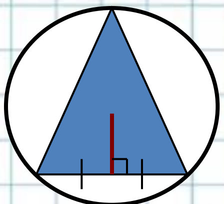
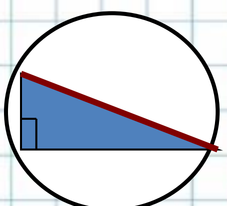
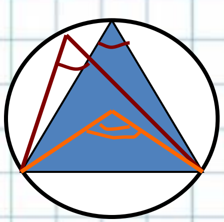


Окружность, вписанная в треугольник	
	Отрезок, соединяющий центр окружности и точку её касания со стороной, перпендикулярен этой стороне.
	Отрезки двух соседних сторон от общей вершины до точек касания равны между собой.
	Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, образованного двумя сторонами.

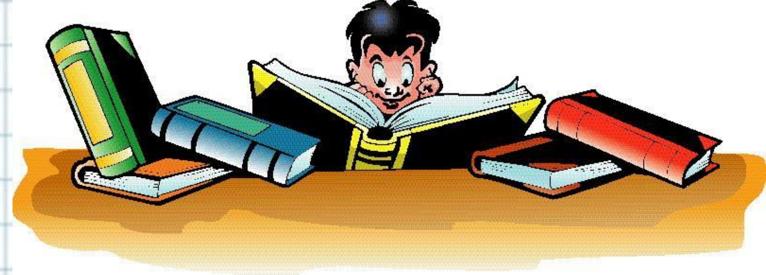
Справочные сведения

Окружность

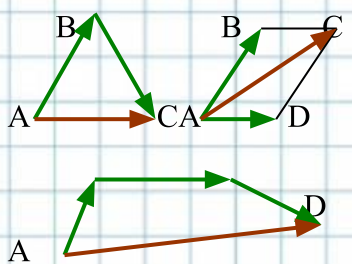
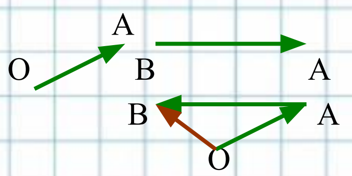
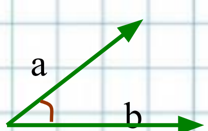


Окружность, описанная около треугольника	
	Центр описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой из сторон треугольника.
	Если прямоугольный треугольник вписан в окружность, то его гипотенуза является диаметром окружности.
	Угол вписанного в окружность треугольника в 2 раза меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу, и равен любому другому вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу.

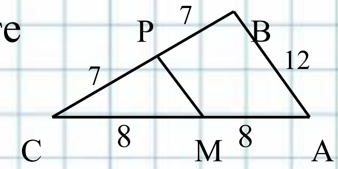
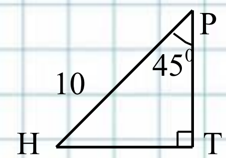
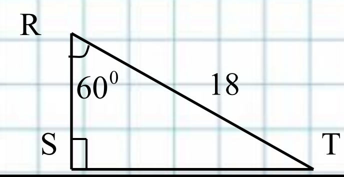
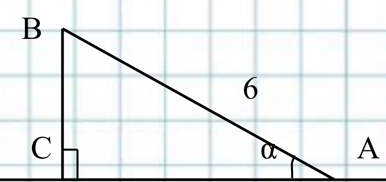
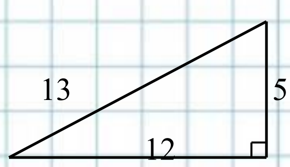
Справочные сведения



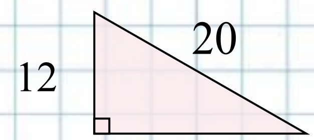
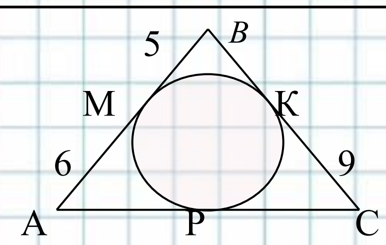
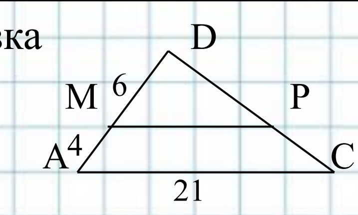
Векторы

Сложение и вычитание векторов	
	Правило треугольника: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; Правило параллелограмма: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ Сумма нескольких векторов: $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
	Вычитание векторов: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}$
Скалярное произведение векторов:	
	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\vec{a}\vec{b})$; В координатах: $\vec{a}\{x_1;y_1\},\vec{b}\{x_2;y_2\}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

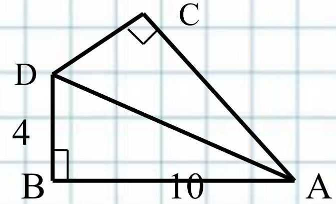
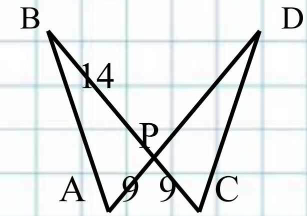
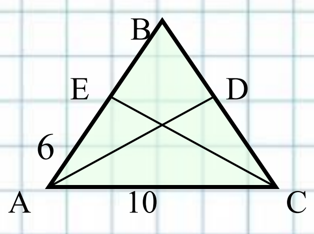
Треугольники

Решение заданий первой части	
1. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр треугольника MPC. 1) 22 2) 21 3) 42 4)23 	2)
2. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет HT. 1) $5\sqrt{3}$ 2) 5 3) $5\sqrt{2}$ 4) $10\sqrt{2}$ 	3)
3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет ST. 1) 9 2) $6\sqrt{3}$ 3) $9\sqrt{3}$ 4) $9\sqrt{2}$ 	3)
4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет BC. 1) 6 sinα 2) 6 tgα 3) $\dfrac{6}{\sin\alpha}$ 4) $\dfrac{6}{tg\alpha}$ 	1)
5. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь треугольника. 1) 156 2) 78 3) 60 4) 30 	4)

Треугольники

Решение заданий первой части	
6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь прямоугольного треугольника. 1) 16 2) 192 3) 120 4) 96  	4)
7. В треугольник АВС вписана окружность, касающаяся его сторон в точках М, К, и Р. Используя данные, указанные на рисунке, найдите сторону АС. 1) 18 2) 14 3) 15 4) 11  	3)
8. Треугольник АСР – равнобедренный с основанием СР, равным 10, и боковой стороной, равной 12. Найдите периметр треугольника РКМ, где КМ – средняя линия, параллельная стороне АС.	17
9. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка МР, если известно, что МР || АС.  	12,6

Треугольники

Решение заданий первой части		
10. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр четырёхугольника ABDC, если известно, что угол BAD равен углу CAD.		28
11. Отрезки AB и CD пересекаются в точке P, причём угол BAP равен углу DCP. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка AD.		23
12. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC. AD и CE – высоты к боковым сторонам. Найдите AD, если AE = 6, AC = 10.		8

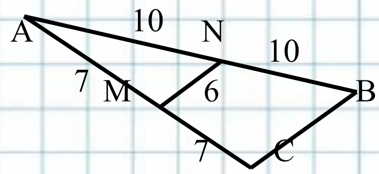
Треугольники

<table>
<tr><th colspan="3">Задания первой части (для самостоятельного решения)</th></tr>
<tr><td>

1. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр треугольника ABC.

1) 42 2) 23 3) 46 4) 30

</td><td>

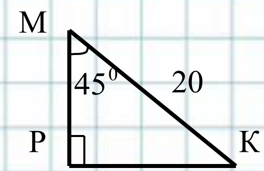


</td><td>3)</td></tr>
<tr><td>

2. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет PK.

1) $10\sqrt{2}$ 2) 10 3) $10\sqrt{3}$ 4) $20\sqrt{2}$

</td><td>

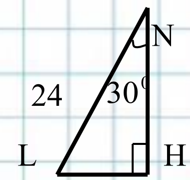


</td><td>1)</td></tr>
<tr><td>

3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет HN.

1) 12 2) $12\sqrt{3}$ 3) $8\sqrt{3}$ 4) $12\sqrt{2}$

</td><td>

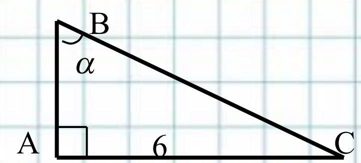


</td><td>2)</td></tr>
<tr><td>

4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите гипотенузу BC.

1) 6 sinα 2) 6 tgα 3) $\frac{6}{\sin\alpha}$ 4) $\frac{6}{tg\alpha}$

</td><td>

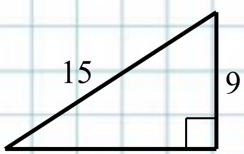


</td><td>3)</td></tr>
<tr><td>

5. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь треугольника.

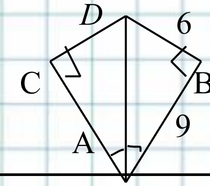
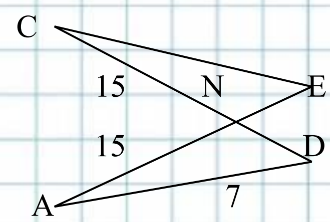
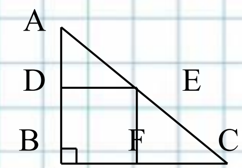
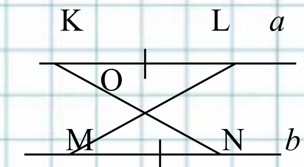
1) 135 2) 67,5 3) 54 4) 108

</td><td>

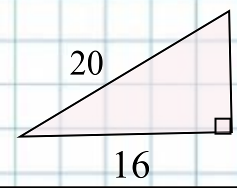
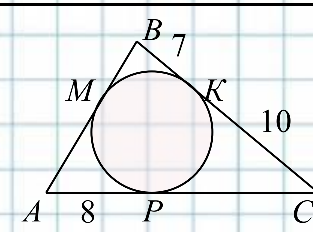
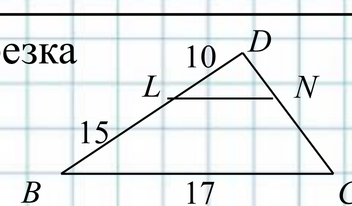


</td><td>3)</td></tr>
</table>

Треугольники

Задания первой части (для самостоятельного решения)		
6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр четырёхугольника ABDC, если известно, что угол BAD равен углу CAD.		30
7. Отрезки AE и CD пересекаются в точке N, причём угол NAD равен углу NCE. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка AE.		22
8. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат BDEF так, что его стороны BD и BF лежат на катетах BA и BC, а вершина E – на гипотенузе. AB = 14. Найдите FC.		7
9. На параллельных прямых *a* и *b* отложены равные отрезки KL и MN. Отрезки KN и ML пересекаются в точке O. KO = 7. Найдите длину отрезка KN.		14
10. Найдите синус угла C треугольника ACD, если известно, что AC = 15, AD = 12. синус угла D равен 0,75.		0,6
11. Найдите сторону LN треугольника KLN, если известно, что $\cos K = \frac{7}{9}$, KL = 5, KN = 9.		6

Треугольники

Задания первой части (для самостоятельного решения)	
12. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь прямоугольного треугольника. 1) 160 2) 192 3) 12 4) 96  	4)
13. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках M, K, и P. Используя данные, указанные на рисунке, найдите сторону AB. 1) 15 2) 17 3) 20 4) 18  	1)
14. Треугольник CDE – равнобедренный с основанием DE, равным 22, и боковой стороной, равной 16. Найдите периметр треугольника EMP, где MP – средняя линия, параллельная стороне CD.	27
15. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка LN, если известно, что LN || BC.  	6,8

Треугольники

Решение заданий второй части

Задачи на вычисления в равнобедренном треугольнике, как правило, помимо свойств, относящих-
ся к равнобедренному треугольнику, используют свойства прямоугольного треугольника, т. к.
медиана, проведённая к основанию, делит равнобедренный треугольник на два прямоугольных.

1. Найдите основание равнобедренного треугольника, если оно в 3 раза меньше боковой стороны, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна $3\sqrt{11}$.

Решение: **1 способ**

1) Обозначим AC = x, тогда BC = 3x, MC = 1,5x.

$$\Delta AMC: \; AM^2 = MC^2 + AC^2 - 2 \cdot MC \cdot AC \cdot cosC$$

2) ΔAMC: по теореме косинусов

$$\Delta BCH: \cos C = \frac{CH}{BC} = \frac{0,5x}{3x} = \frac{1}{6}.$$

3) Пусть BH – высота к основанию AC.

$$\left(3\sqrt{11}\right)^2 = x^2 + (1,5x)^2 - 2 \cdot x \cdot 1,5x \cdot \frac{1}{6}$$

4) Получаем:

$$99 = x^2 + 2,25x^2 - 0,5x^2$$

$$99 = 2,75x^2$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

- 6 не удовл. смыслу задачи

Отсюда AC = 6.

Ответ: **6.**

Треугольники

Решение заданий второй части

Найдите основание равнобедренного треугольника, если оно в 3 раза меньше боковой стороны, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна $3\sqrt{11}$.

2 способ: используется приём, позволяющий быстро решать задачи, где речь идёт о медиане.

Медиана AM продлевается за точку M и на её продолжении откладывается отрезок MD, равный медиане.

Рассматривается **параллелограмм** ABDC и используется **формула, связывающая его стороны и диагонали**.

Решение:

1) Пусть AC – основание треугольника, AM – медиана.
Отложим на луче AM отрезок MD = AM
Тогда ACBD – параллелограмм, т. к.его диагонали пересекаются в середине.

$$2(AB^2 + AC^2) = BC^2 + AD^2$$

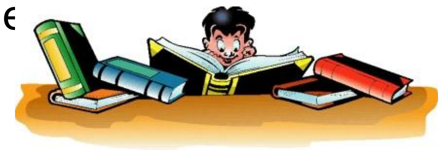
2) Обозначим AC = x, AB = BC = 3x, тогда по свойству сторон и диагоналей параллелограмма имеем

$$2\cdot(9x^2 + x^2) = 9x^2 + (6\sqrt{11})^2,$$

$$11x^2 = 36\cdot 11$$

или

$$x = 6$$

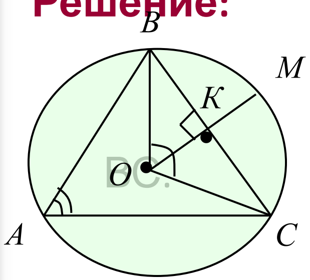


Треугольники

Решение заданий второй части

В окружность с радиусом 13 вписан равнобедренный треугольник. Известно, что синус угла при основании треугольника равен $\frac{12}{13}$. Радиус ОМ пересекает под прямым углом боковую сторону в точке К. Найдите длину отрезка ОК.

Решение:



1) Угол при основании равнобедренного треугольника может быть только острым, значит, центр О с вершиной А лежит по одну сторону от хорды ВС.

Тогда $\angle BOC$ - центральный, соответствующий углу А. Отсюда $\angle BOC = 2\angle A.$

$$\angle BOC = 2\angle A.$$

2) $\triangle$ ВОС – равнобедренный, ОК – высота, проведённая к основанию, тогда ОК – биссектриса угла О, отсюда имеем:

$$\triangle BOK: \angle K = 90^0, OB = 13, \sin\angle BOK = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{BK}{13}, BK = 12, OK = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

3)

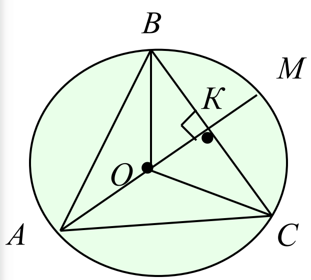
Ответ: **5.**

Треугольники

Решение заданий второй части

2. В окружность с радиусом 13 вписан равнобедренный треугольник. Известно, что синус угла при основании треугольника равен $\frac{12}{13}$. Радиус ОМ пересекает под прямым углом боковую сторону в точке К. Найдите длину отрезка ОК.

Решение:



1) $$BC = 2R \cdot \sin \angle A = 2 \cdot 13 \cdot \frac{12}{13} = 24.$$

2) $$OM \perp BC \Rightarrow BK = KC = 12.$$

3) Достроим радиус ОМ до диаметра РМ, тогда РМ =26.

Пусть МК = х. По свойству отрезков хорд получим

$$12^2 = x \cdot (26 - x)$$

$$x^2 - 26x + 144 = 0$$

$$x_1 = 8 или x_2 = 18.$$

$$MK = 8, (MK \neq 18, т.к. MK < R), OK = 13 - 8 = 5.$$

Ответ: **<u>5.</u>**

Треугольники

Решение заданий второй части

Свойство отрезков касательных чаще всего применяют в задачах, связанных с вычислением

элементов равнобедренных или прямоугольных треугольников. При решении задач бывает

полезно отметить на рисунке точки касания и отметить равные отрезки одинаковыми буквами

или чёрточками, используя при этом свойства рассматриваемого треугольника.

Окружность с центром О, вписана в равнобедренный треугольник АВС с основанием АС.

Она касается стороны ВС в точке М, причём отрезок ВМ составляет 0,4 боковой стороны.

Найдите высоту, проведённую к боковой стороне, если АС = 30.

Решение:

1) Обозначим буквой Н точку касания вписанной окружности с основанием.

Так как ▵АВС – равнобедренный, то центр О лежит на высоте к основанию,

т. е. ВН – высота и Н – середина основания.

2) Если считать ВМ = *2х* и СМ = *3х,* то АВ = ВС = *5х.*

По свойству отрезков касательных имеем СН = *3х, 3х = 15,* АВ = 25.

3) По теореме Пифагора

$$BH^2 = 25^2 - 15^2$$

$$BH^2 = 20^2$$

$$BH = 20$$

Треугольники

Решение заданий второй части

В задачах на площадь треугольника иногда используется отношение площадей треугольников. ***Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения сходственных сторон (или квадрату коэффициента подобия).***

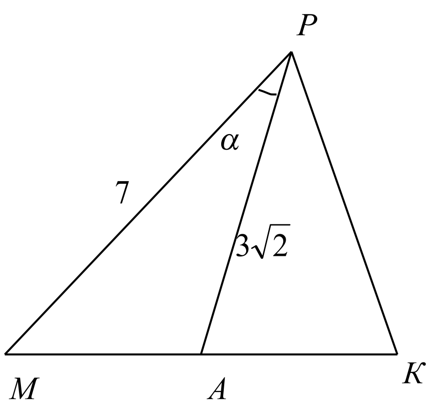
Из формулы площади треугольника можно вывести ещё два **следствия**:

- если треугольники имеют общее основание (или равные основания), то их площади относятся, как высоты, проведённые к этим основаниям;
- если треугольники имеют общую высоту (или равные высоты), то их площади относятся, как основания.

Треугольники

Решение заданий второй части

Площадь треугольника МРК равна 21. Известно, что сторона МР = 7, медиана РА =$3\sqrt{2}$, а в треугольнике АРМ сторона АМ – наименьшая. Найдите сторону МК.



Решение:

1)

$$S_{MAP} = \frac{1}{2} S_{MPK} = 10{,}5.$$

2)

$$S_{MAP} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot AP \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{10{,}5 \cdot 2}{7 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Т. к. МА – наименьшая сторона в треугольнике АРМ, то α не может быть тупым, α = 45^0 .

3) В треугольнике МАР по теореме косинусов:

$$AM^2 = 49 + 18 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$$

$$AM = 5$$

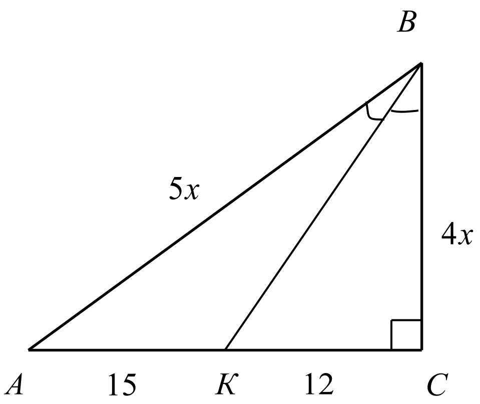
$$MK = 10.$$

Ответ: 10.

Треугольники

Решение заданий второй части

В прямоугольном треугольнике АВС с прямым углом С биссектриса ВК делит катет АС на отрезки АК = 15 и КС = 12. Найдите площадь треугольника АВК.



Решение:

1) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$

Тогда АВ = 5х, ВС = 4х, $AC = \sqrt{25x^2 - 16x^2} = 3x,$

$$3x = 27$$

$$x = 9$$

$$BC = 36.$$

2) $S_{ABK} : S_{BCK} = 5 : 4$ (т. к. эти треугольники имеют одну и ту же высоту ВС).

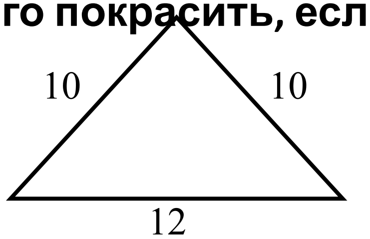
Значит, $S_{ABK} = \frac{5}{9} S_{ABC} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 36 = 270.$

Ответ: **<u>270.</u>**

Треугольники

Решение заданий второй части (с практическим содержанием)

Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник со сторонами 10 дм, 10 дм и 12 дм. Сколько килограммов краски потребуется, чтобы его покрасить, если на $1 дм^2$ **поверхности расходуется 0,015 кг краски?**



Решение:

1) По формуле Герона $S_{\Delta}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ получаем:

$$p=(10+10+12):2=16(дм)$$

$$S_{\Delta}=\sqrt{16\cdot(16-10)\cdot(16-10)\cdot(16-12)}=\sqrt{16\cdot6\cdot6\cdot4}=4\cdot6\cdot2=48(дм^2)$$

2) Расход краски равен 48 · 0,015 = 0,72 (кг)

Ответ: **0, 72.**

Треугольники

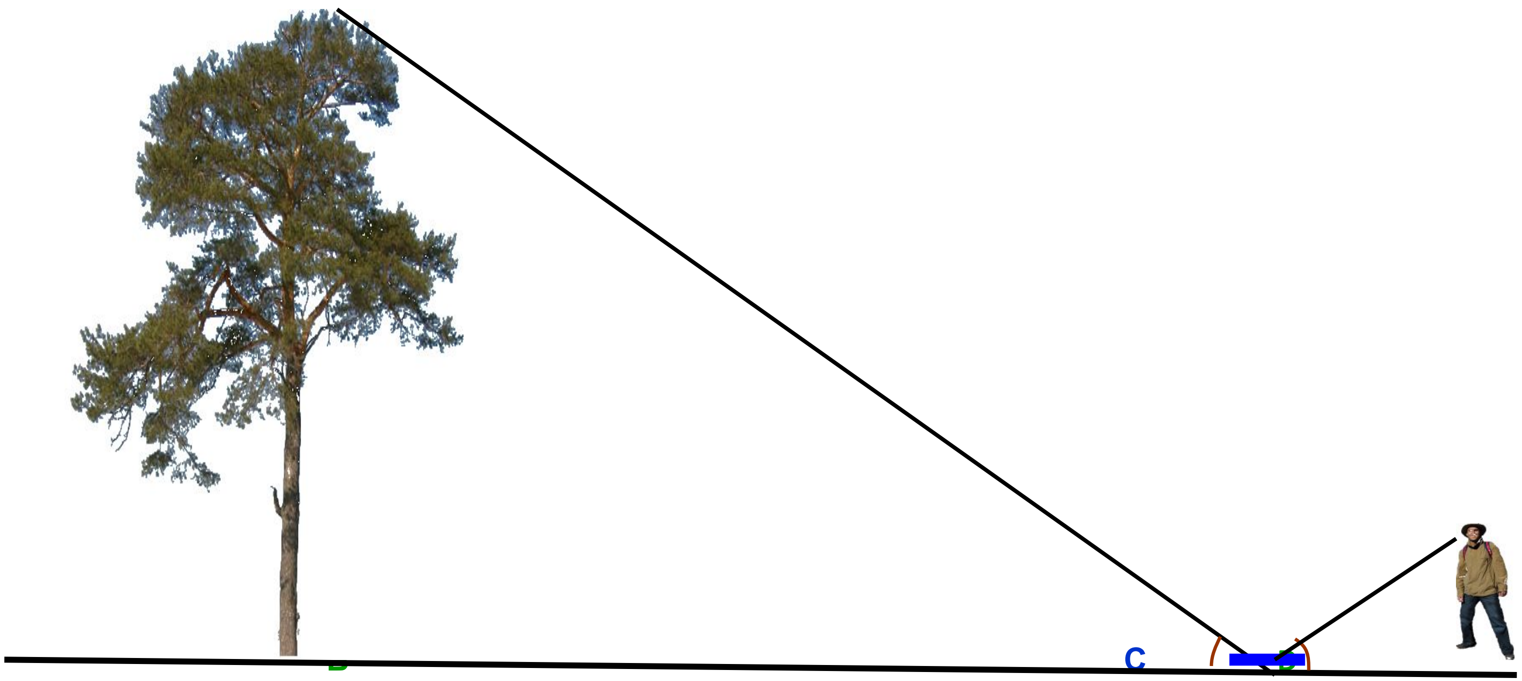
Решение заданий второй части

Для измерения высоты дерева можно использовать способ основанный на равенстве угла падения и

угла отражения света. Для этого на некотором расстоянии от измеряемого дерева, на ровной земле, в

точке С кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D, стоя в которой

наблюдатель видит в зеркале верхушку А дерева.



Треугольники

Решение заданий второй части
(с практическим содержанием)

Как поступать, если к измеряемому объекту невозможно подойти вплотную?

А) Задача решается двукратным применением описанного выше способа – помещение **зеркала**

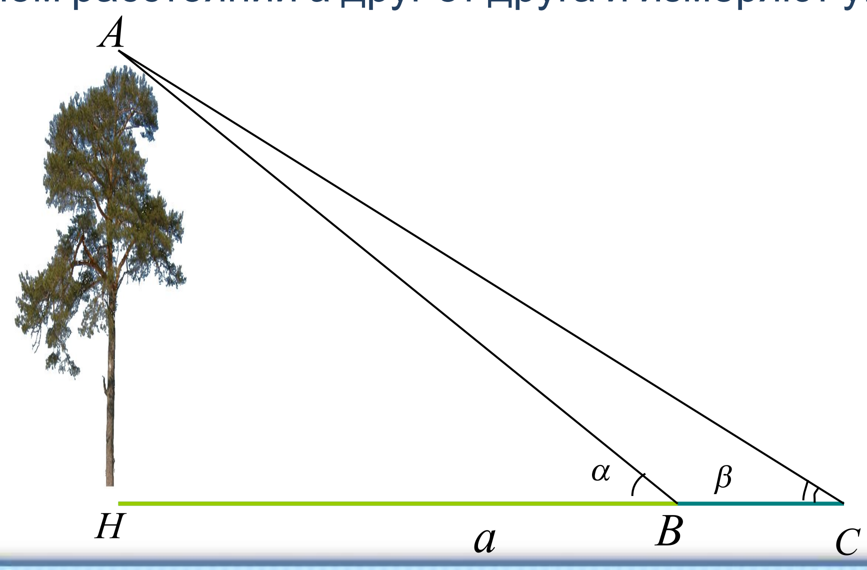
высота равна возвышению глаза наблюдателя, умноженному на отношение расстояния между

положениями зеркала к разности расстояний наблюдателя от зеркала.

Б) На прямой, проходящей через основание Н предмета, отмечают точки В и С на определён-

ном расстоянии *а* друг от друга и измеряют углы АВН и АСВ: $\angle ABH = \alpha, \angle ACB = \beta.$

По теореме синусов: $AH = \dfrac{a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$

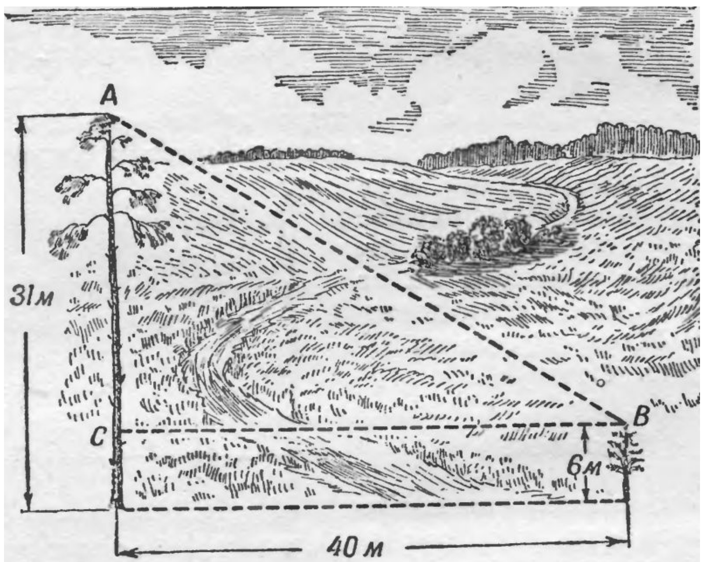


Способ рассматривается в учебнике п.100,
«Измерительные работы».
Задача № 1036, 1038.

Треугольники

Решение заданий второй части (с практическим содержанием)

В 40 м одна от другой стоят две сосны. Высота одной 31 м, другой, молодой – всего 6 м. Можете ли вы определить как велико расстояние между их макушками?



Решение:

По теореме Пифагора расстояние АВ между верхушками сосен равно

$$AB = \sqrt{40^2 + (31-6)^2} = \sqrt{40^2 + 25^2} = 47(м).$$

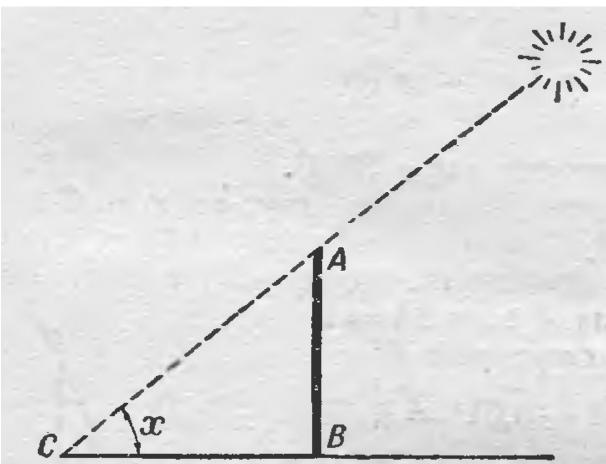
Ответ: <u>47 м.</u>

Треугольники

Решение заданий второй части
(с практическим содержанием)

Тень ВС от отвесного шеста АВ высотою 4,2 м имеет 6,5 длины. Какова в этот момент высота Солнца над горизонтом, т. е. как велик угол С?

Решение:



$$\sin C = \frac{AB}{AC}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74(м)$$

$$\sin C = \frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$$

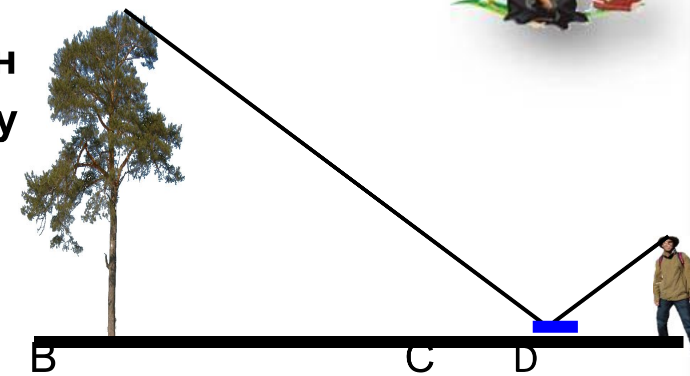
$$\angle C \approx 33^0$$

Ответ: $\angle C \approx 33^0$

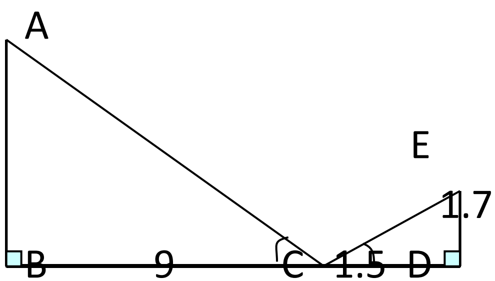
Треугольники

Решение заданий второй части

Определите высоту (в метрах) дерева, изображённого на рисунке, если рост человека 1,7м, а в результате измерений получено: BC = 9м, CD = 1,5м.



Решение:



$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC = 90^0 \\ \angle EDC = 90^0 \\ \angle ACB = \angle ECD(\textit{свойство})\end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \textit{подобен} \Delta EDC(\textit{призн.}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{1{,}7} = \frac{9}{1{,}5} \Rightarrow$$

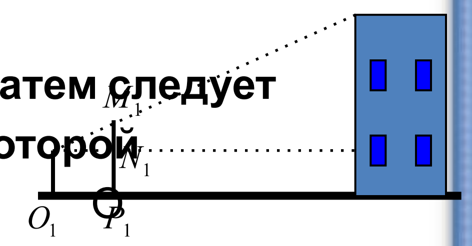
$$\Rightarrow AB = \frac{9 \cdot 1{,}7}{1{,}5} = \frac{3 \cdot 17}{5} = 10{,}2(м)$$

Ответ: **<u>10,2 м.</u>**

Треугольники

Решение заданий второй части

Для измерения высоты дома нужно воткнуть в землю под прямым углом шест M_1P_1 выше роста OO_1 наблюдателя на расстоянии PP_1 от дома. Затем следует отойти от шеста назад по продолжению PP_1 до той точки О, с которой можно увидеть высшую точку М на одной линии с верхней точкой M_1 шеста. Далее, стоя на том же месте, необходимо отметить на шесте и на доме 2 точки N_1 и N, лежащие на горизонтальной прямой. Определите высоту МР дома, если рост человека $OO_1 = 1,7 м, M_1N_1 = 1 м, O_1P = 18 м, O_1P_1 = 3 м.$



Решение:

$$O_1ONP и O_1ON_1P_1 - прямоугольники \Rightarrow ON = O_1P = 18 м, ON_1 = O_1P_1 = 3 м, NP = OO_1 = 1,7 м.$$

1) ΔM_1N_1O подобен ΔMNO по первому признаку $\left(\angle M_1N_1O = \angle MNO = 90^0, \angle MON - общий\right).$

2) Отсюда следует пропорциональность сторон: $\frac{M_1N_1}{ON_1} = \frac{MN}{ON} \Rightarrow MN = \frac{M_1N_1 \cdot ON}{ON_1} = \frac{1 \cdot 18}{3} = 6 м.$

MP = MN + NP = 6 + 1,7 = 7,7 (м).

Ответ: 7,7 м.

Треугольники

Решение заданий второй части

Для того, чтобы измерить высоту CD = h холма, необходимо с помощью угломерных

инструментов измерить угол α, под которым видна вершина C холма из точки A, затем

$\sqrt{3} = 1{,}73,$

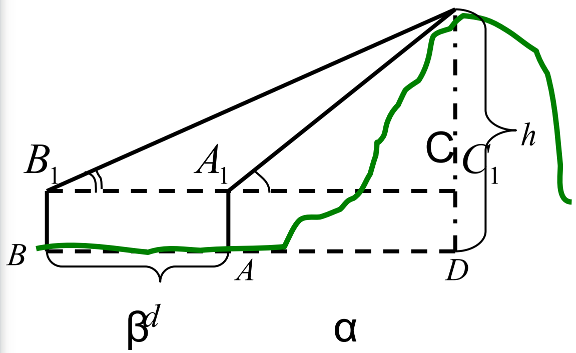
$AA_1 = BB_1$

отойти на расстояние AB = d, находясь в плоскости ACD, и измерить угол β, под которым

$\alpha = 60^0, \beta = 30^0, d = 100м, AA_1 = 1{,}8м$

видна вершина C. - рост наблюдателя. Найдите высоту холма, если

.



$C_1D = A_1A = 1{,}8м, A_1B_1 = AB = D = 100м$

Решение:

$AA_1B_1B и AA_1C_1D.$

1) $\angle B_1A_1C = 180^0 - \alpha = 180^0 - 60^0 = 120^0.$

$\angle B_1CA_1 = 180^0 - (\beta + 120^0) = 180^0 - (30^0 + 120^0) = 30^0 \Rightarrow$

как стороны прямоугольников

$\Rightarrow \Delta B_1A_1C - равнобедренный \Rightarrow A_1C = A_1B_1 = 100м$

2)

3)

$\Delta CC_1A_1 : CC_1 = A_1C \cdot \sin\alpha = 100 \cdot \sin 60^0 = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} = 50 \cdot 1{,}73 = 86{,}5(м).$

$h = CD = CC_1 + C_1D = 86{,}5 + 1{,}8 = 88{,}3(м).$

4) В прямоугольном

5)

Ответ: 88,3м

Задания с развёрнутым свободным ответом

Используются во второй чсати работы для проверки состояния более сложных предметных умений – анализировать ситуацию, разрабатывать способ решения, проводить математически грамотные рассуждения.

Характеризуя высокий уровень подготовки по предмету, как правило, выделяют следующие его *качества:*

- умение выполнять чертёж, соответствующий ситуации, представленной в условии задачи;
- прочное владение системой знаний, указанных в школьной программе;
- умение обосновывать сделанные выводы ссылкой на теоремы и определения;
- умение строить логически верную цепочку доказательных рассуждений, шагов решения , которые помогают прийти к требуемому выводу;
- умение синтезировать информацию из различных разделов курса геометрии для решения поставленной проблемы;
- умение математически грамотно записать решение задачи.

Спасибо за внимание