Урок

Геометрия – 9 класс

- Важнейшим из преобразований подобия является гомотетия. Напомним, что гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициентом k называется такое преобразование, которое каждой точке X сопоставляет такую точку X′, что выполняется равенство

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}.$$

Для теории значение гомотетии состоит в том, что, как мы покажем, любое подобие является композицией гомотетии и движения. Поэтому, изучив свойства гомотетии и зная свойства движений, мы, сопоставив их, найдем свойства подобия.

Рассмотрим важнейшие свойства гомотетии.

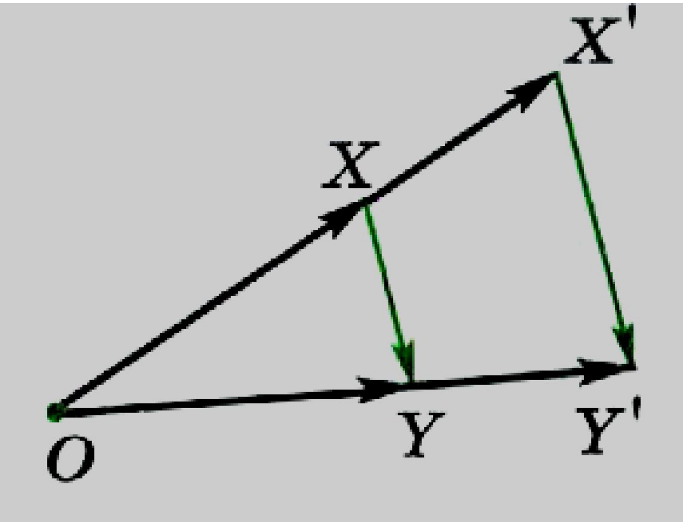
Свойство 1.

При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k.

Подробнее: если точки X и Y при гомотетии с коэффициентом k перешли в точки X′ и Y′, то

$$\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}.$$

• Д о к а з а т е л ь с т в о:



Пусть точка О - центр гомотетии.

Тогда $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ **и** $\overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}$

Поэтому $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OY} - k\overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k\overrightarrow{XY}$

Из равенства $\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}$ **следует равенство**

$$|X'Y'|=|k|\,|XY|,$$

т. е. *гомотетия с коэффициентом k является подобием*

с коэффициентом $|k|$.

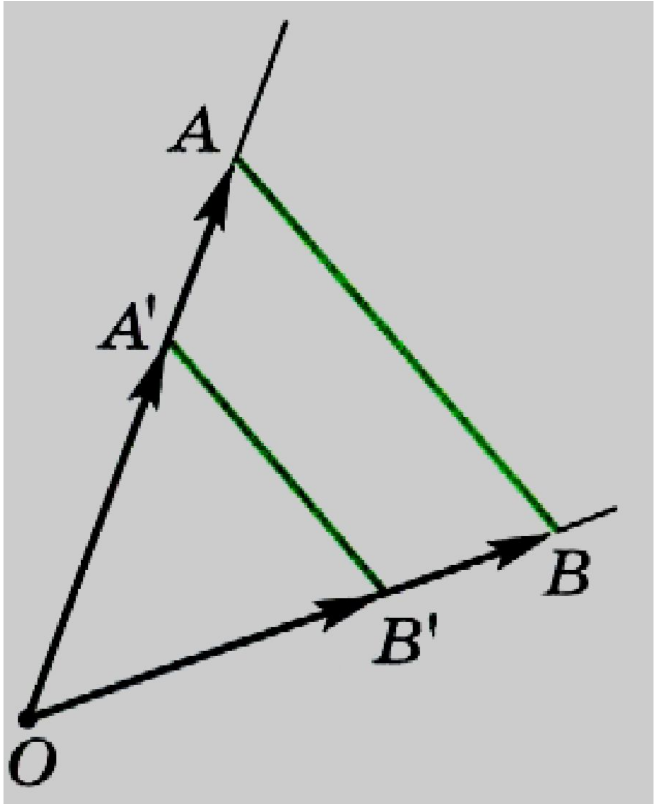
З а м е ч а н и е.

- Доказав свойство 1, мы пока лишь установили, что гомотетией упорядоченная пара точек (X, Y) переводится в такую упорядоченную пару точек (X' ,Y'),что $\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}$.

А то, что каждая внутренняя точка отрезка XY перейдет при гомотетии во внутреннюю точку отрезка X'Y', мы установим, доказав свойство 2.

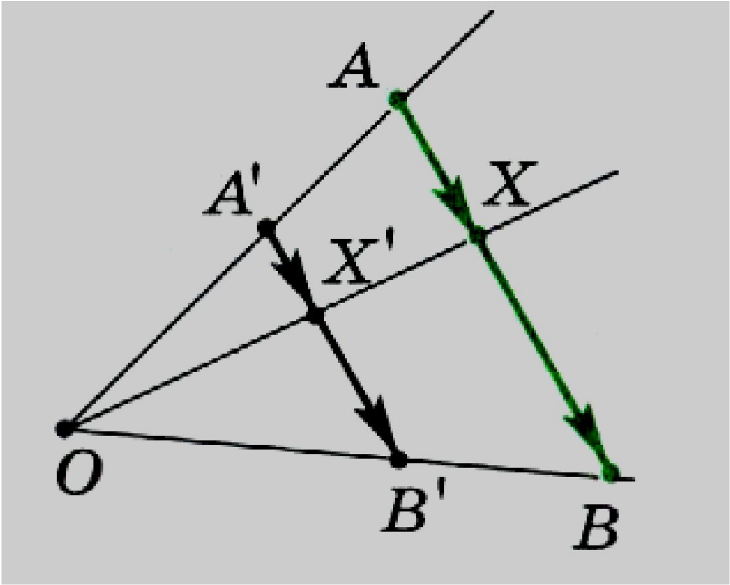
С в о й с т в о 2.

Гомотетия каждый отрезок переводит в отрезок; гомотетичные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.



Д о к а з а т е л ь с т в о:

Покажем, что если точки A и B переходят при гомотетии соответственно в точки A_1 и B_1, то любая внутренняя точка отрезка AB перейдет в некоторую точку отрезка A_1B_1 и, наоборот, любая точка отрезка A_1B_1 является образом некоторой точки отрезка AB.



Точка X лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда найдется такое число t из промежутка [0,1], что $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$.

При этом, когда число t возрастает от 0 до 1, точка X пробегает отрезок AB от A до B.

- Умножим обе части равенства $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ на число *k*, получим:

$$k\overrightarrow{AX} = k(t\overrightarrow{AB})$$

По свойству 1

$\overrightarrow{A'X'} = k\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AX}$. Из этих равенств и равенства $k\overrightarrow{AX} = k(t\overrightarrow{AB})$ следует, что $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$.

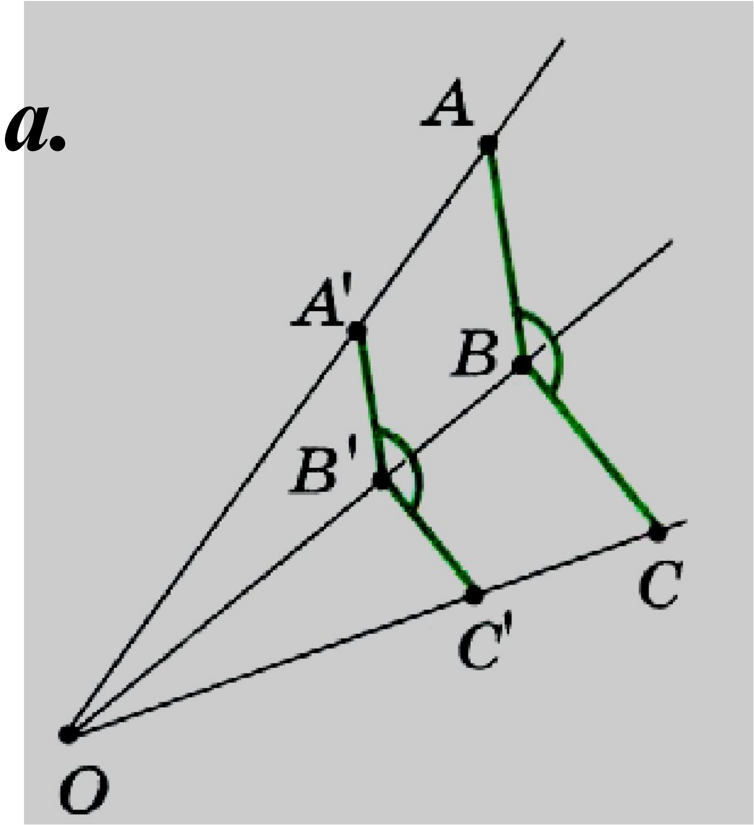
А это означает, что точка X′ пробегает отрезок A′B′ от A′ до B′, когда параметр t возрастает от 0 до 1.

Свойство 3.

Гомотетия сохраняет величину угла.

Скажем об этом подробнее: **для любых точек A, B, C и их образов A′, B′, C′ при гомотетии выполняется равенство:**

$$\angle ABC = \angle A'B'C'.$$



Доказательство:

Положим $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a}' = \overrightarrow{B'A'}$, $\vec{c}\,' = \overrightarrow{B'C'}$.

Тогда $\angle ABC = \angle \vec{a}\,\vec{c}$, $\angle A'B'C' = \angle \vec{a}\,'\,\vec{c}\,'$.

По свойству 1 $\vec{a}' = k\vec{a}'$ и $\vec{c}' = k\vec{c}'$.

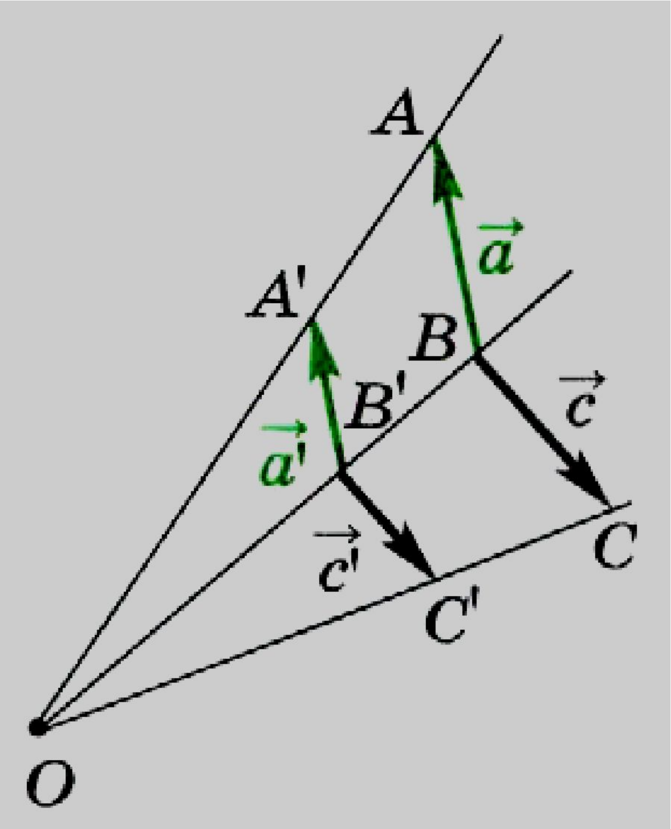
Из этих двух равенств следует, что $|\vec{a}'| = |k||\vec{a}|$ и $|\vec{c}'| = |k||\vec{c}$

Кроме того, $\vec{a}\,' \cdot \vec{c}\,' = (k\vec{a}) \cdot (k\vec{c}) = k^2(\vec{a}\,' \cdot \vec{c}\,')$. Но тогда

$$\cos \angle \vec{a}\,'\,\vec{c}\,' = \frac{\vec{a}\,\vec{c}}{|\vec{a}'||\vec{c}'|} = \frac{k^2(\vec{a}\cdot\vec{c}\,)}{k^2|\vec{a}||\vec{c}|} = \cos \angle \vec{a}\,\vec{c}$$

Из равенства косинусов углов $\cos \angle \vec{a}\,'\,\vec{c}\,' = \cos \angle \vec{a}\,\vec{c}$

следует равенство углов $\angle ABC = \angle A'B'C'$.



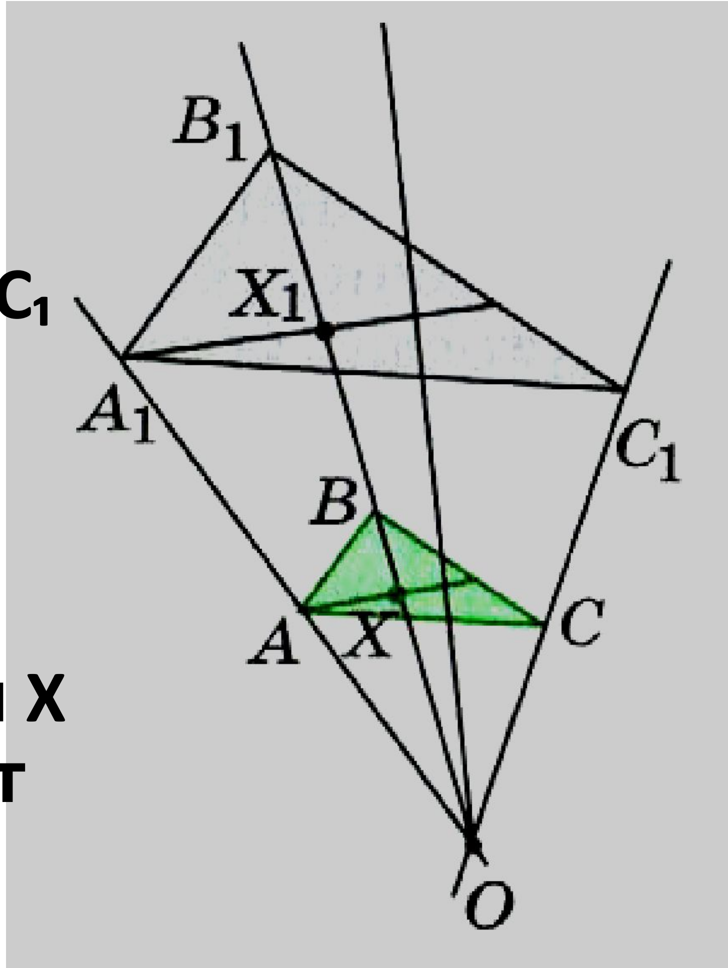
С в о й с т в о 4.

Гомотетия каждый треугольник переводит в треугольник. Стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.

Доказательство:

Пусть гомотетия вершины Δ ABC переводит в точки A_1, B_1 и C_1 .

Стороны ΔABC перейдут в отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 (по свойству 2). Углы между этими отрезками равны углам ΔABC, поэтому точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой и являются вершинами $\Delta A_1B_1C_1$. ΔABC заполняется отрезками AX, идущими из вершины A в точки X стороны BC. Эти отрезки гомотетия переводит в отрезки A_1X_1, концы которых заполняют отрезок B_1C_1 (по свойству 2). Отрезки A_1X_1 заполняют $\Delta A_1B_1C_1$, т. е. в этот треугольник перейдет при гомотетии ΔABC.



Из свойства 1 следует, что

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$

Поэтому $|A'B'|=|k||AB|$, $|A'C'|=|k||AC|$ и $|B'C'|=|k||BC|$.

Следовательно, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Все утверждения свойства 4 доказаны

Замечание.

Поскольку гомотетия является подобием, то в свойстве 4 речь идет о свойствах подобных треугольников. Если подобные треугольники изучались ранее в 8 классе до общего понятия о подобных фигурах, то этими свойствами определялось подобие треугольников: подобными назывались треугольники, у которых стороны пропорциональны (а равенство углов затем доказывалось), или же подобными назывались треугольники, у которых стороны пропорциональны, а соответственные углы равны. О признаках подобия треугольников мы скажем в п.10.4.

С п р а в к а с л о в е с н и к а. Слово *гомотетия* произошло от двух греческих слов: homos - одинаковый и thetos - расположенный.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры гомотетичных фигур.
2. Из чего следует, что гомотетия является подобием?
3. Какие свойства гомотетии вам известны?
4. Откуда следует, что гомотетия каждую прямую переводит в параллельную или совпадающую с ней прямую? В каком случае эти прямые совпадают?

Задачи:

(дано, доказать, доказательство, рисунок-обязательно!)

Доказываем. **10.11.** Докажите, что композиция двух гомотетий с общим центром является гомотетией. Чему равен её коэффициент?

Решение. Пусть гомотетии g_1 и g_2 имеют общий центр O и коэффициенты k_1 и k_2 соответственно. Тогда если X — произвольная точка, $X_1 = g_1(X)$ и $X_2 = g_2(X_1)$, то

$$\overrightarrow{OX_1} = k_1\overrightarrow{OX} \text{ и } \overrightarrow{OX_2} = k_2\overrightarrow{OX_1}.$$

Подставляя во второе равенство выражение для $\overrightarrow{OX_1}$ из первого равенства, получаем, что $\overrightarrow{OX_2} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$ А это и значит, что композицией g_1 и g_2 является гомотетия с тем же центром и коэффициентом k_1k_2. Ясно, что в этом случае гомотетии g_1 и g_2 перестановочны.

10.12. Докажите, используя гомотетию, теорему о средней линии треугольника.

Решение. Пусть точка K — середина стороны AB треугольника ABC, а M — середина его стороны AC. Тогда $\overrightarrow{AK} = 0,5\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM} = 0,5\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = 0,5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0,5\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{KM} = 0,5\overrightarrow{BC}$.

Последнее векторное равенство означает, что средняя линия KM треугольника ABC параллельна его стороне BC и равна её половине.

Исследуем. **10.13.** Сколько центров гомотетии могут иметь два параллельных отрезка?

Решение. Если данные отрезки равны, то они — противоположные стороны параллелограмма, а центром их гомотетии является точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. В этом случае гомотетия — это центральная симметрия. Если данные отрезки не равны, то они являются основаниями трапеции. Тогда у них два центра гомотетии — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции и точка пересечения диагоналей трапеции.

10.14. Какие две прямые гомотетичны? Где может лежать их центр гомотетии? Каким может быть коэффициент гомотетии?

Решение. Гомотетичны любые две параллельные прямые a и b. Центром их гомотетии может быть любая точка O, не лежащая на a и b. Коэффициент их гомотетии равен отношению расстояний от точки O до прямых a и b, взятому со знаком «минус», если O лежит в полосе между a и b, и со знаком «плюс», если O лежит вне этой полосы. Таким образом, этот коэффициент может быть любым ненулевым числом.

10.15. Какие две плоскости гомотетичны? Где может лежать их центр гомотетии? Каким может быть коэффициент гомотетии?

Решение аналогично решению предыдущей задачи. Гомотетичны любые две параллельные плоскости. Центром их гомотетии может быть любая точка O, не лежащая на этих плоскостях. Коэффициент гомотетии равен отношению расстояний от точки O до плоскостей, взятый со знаком «минус», если точка O лежит в слое между плоскостями, и со знаком «плюс», если точка O лежит вне этого слоя. Таким образом, этот коэффициент может быть любым ненулевым числом.

10.16. Может ли какое-нибудь движение быть частным случаем гомотетии?

Ответ. Да, гомотетия с коэффициентом, равным 1, — это тождественное движение, а гомотетия с коэффициентом –1 является центральной симметрией.

10.17. Верно ли, что гомотетичны любые два: а) многоугольника с соответственно параллельными сторонами; б) прямоугольных параллелепипеда с соответственно параллельными рёбрами?

Ответ. Нет: а) квадрат и прямоугольник, отличный от квадрата, не гомотетичны; б) куб и прямоугольник, отличный от куба, не гомотетичны.