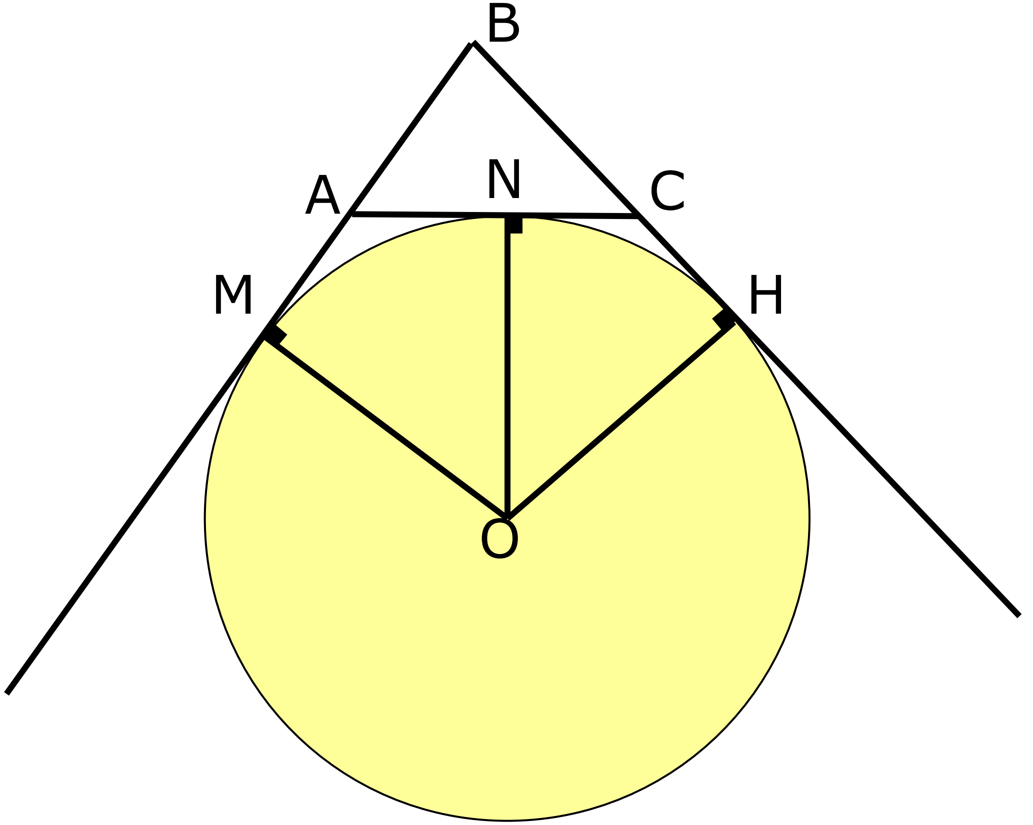
«Вневписанная окружность»

Выполнила Егорова Нюргустана Михайловна

Содержание

Глава 1. Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон



Центр вневписанной окружности в треугольник есть точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника, противолежащего той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис двух внешних углов треугольника (1)

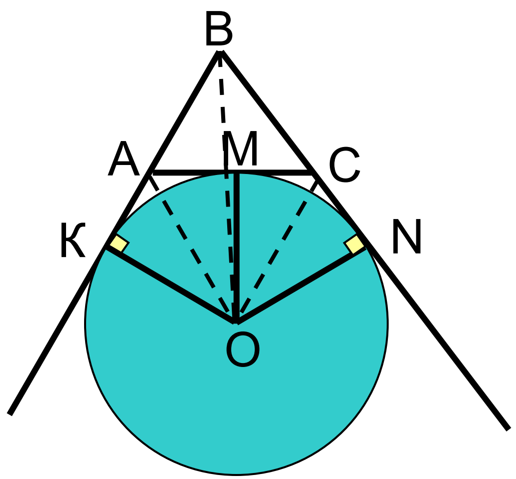
Дано:

$\triangle$ ABC

Окр. (O; r)

M, N, K – точки касания

Доказать (1)



Решение:

Т. к. окружность касается сторон угла CAK, то центр окружности O равноудален от сторон этого угла, следовательно, он лежит на биссектрисе угла CAK. Аналогично, точка O лежит на биссектрисе угла ACN. Т. к. окружность касается прямых BA и BC, то она вписана в угол ABC, а значит её центр лежит на биссектрисе угла ABC. Ч.т. д.

Расстояние от вершины угла треугольника до точек касания вневписанной окружности со сторонами этого угла равны полупериметру данного треугольника

$AB_1 = AC_1 = p$

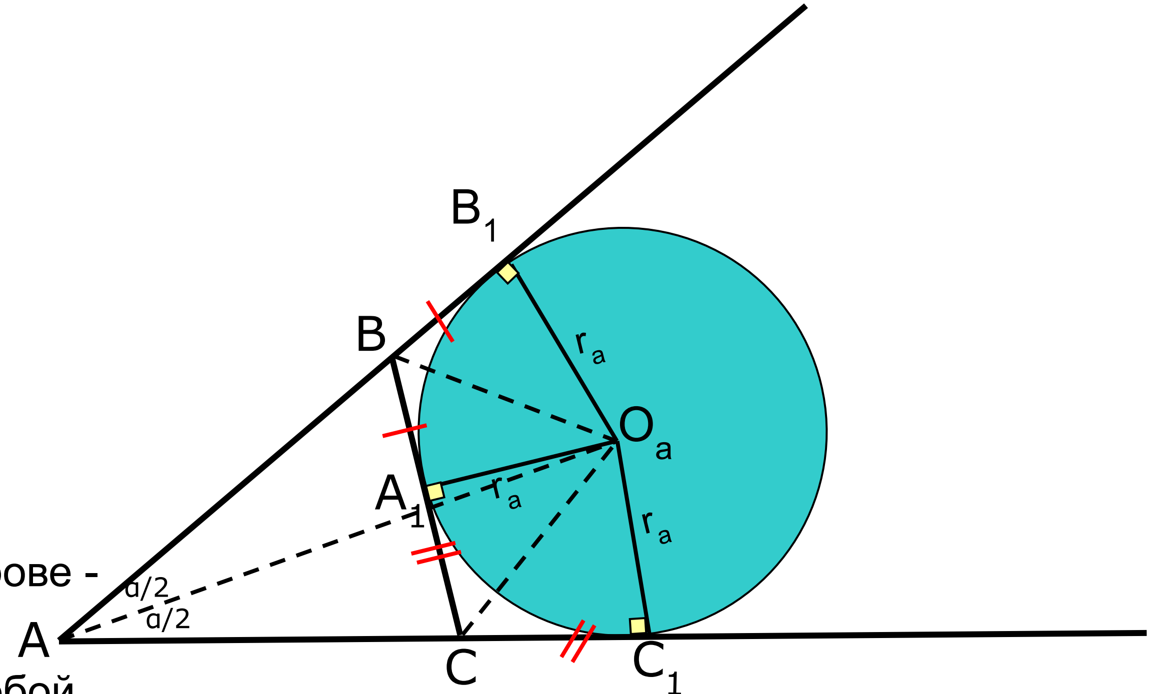
Дано:

$\triangle ABC$

Вневписанная окр. $(O_a;\ r_a)$

Доказать, что

$AB_1 = AC_1 = p$



Доказательство:

Т.к. O_a - центр вневписанной окружности. Касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны между собой, поэтому $BB_1 = BA_1$, $CA_1 = CC_1$, $AB_1 = AC_1$.

Значит,

$2p = (AC + CA_1) + (AB + BA_1) = (AC + CC_1) + (AB + BB_1) = AC_1 + AB_1 = 2AC_1 = 2AB_1$

т.е. $AB_1 = AC_1 = p$.

Глава 2. § 1. Радиус вневписанной окружности. Касающейся сторон данного внутреннего угла треугольника, равен произведению полупериметра треугольника на тангенс половины этого угла, т. е.

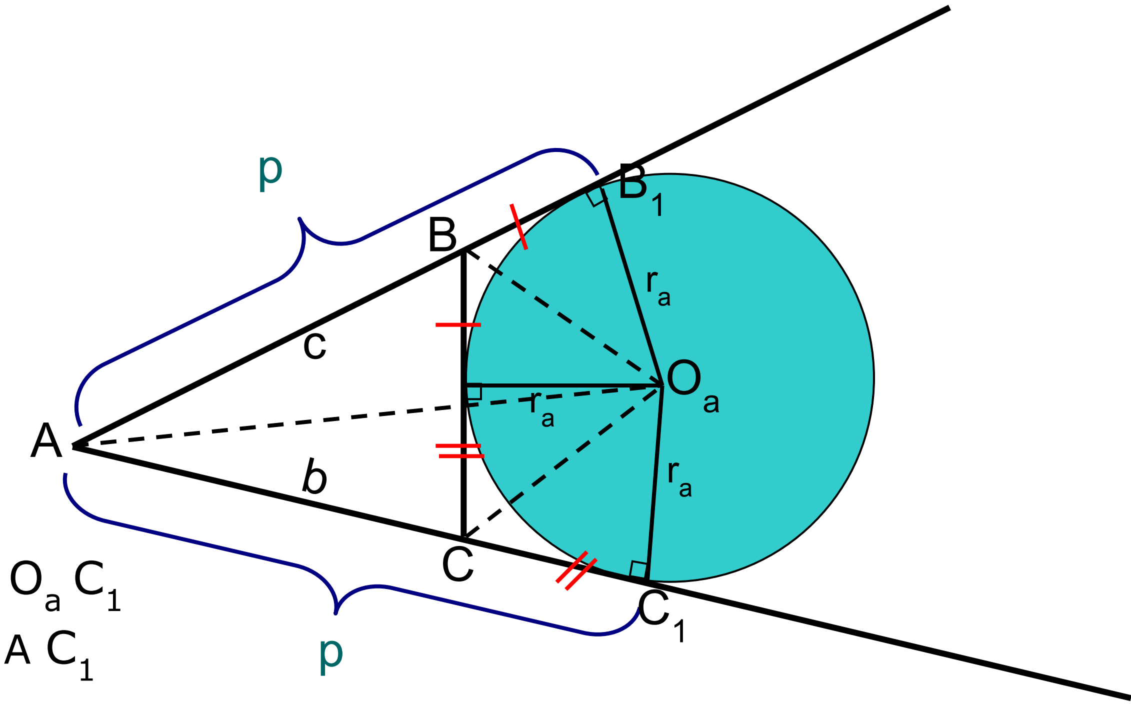
$$r_a = p\,tg\frac{\alpha}{2},\ r_b = p\,tg\frac{\beta}{2},\ r_c = p\,tg\frac{\gamma}{2} \quad (2)$$

Дано:

$\triangle ABC$

Вневписанная окр. $(O_a;\ r_a)$

Доказать (2)



Решение:

В прямоугольном треугольнике $A\,O_a\,C_1$ r_a и p – длины катетов, угол $O_a\,A\,C_1$ равен $\frac{\alpha}{2}$, поэтому $r_a = p\,tg\frac{\alpha}{2}$.

§ 2. Радиус вневписанной окружности, касающейся данной стороны треугольника, равен отношению площади треугольника к разности полупериметра и этой стороны. т.е.

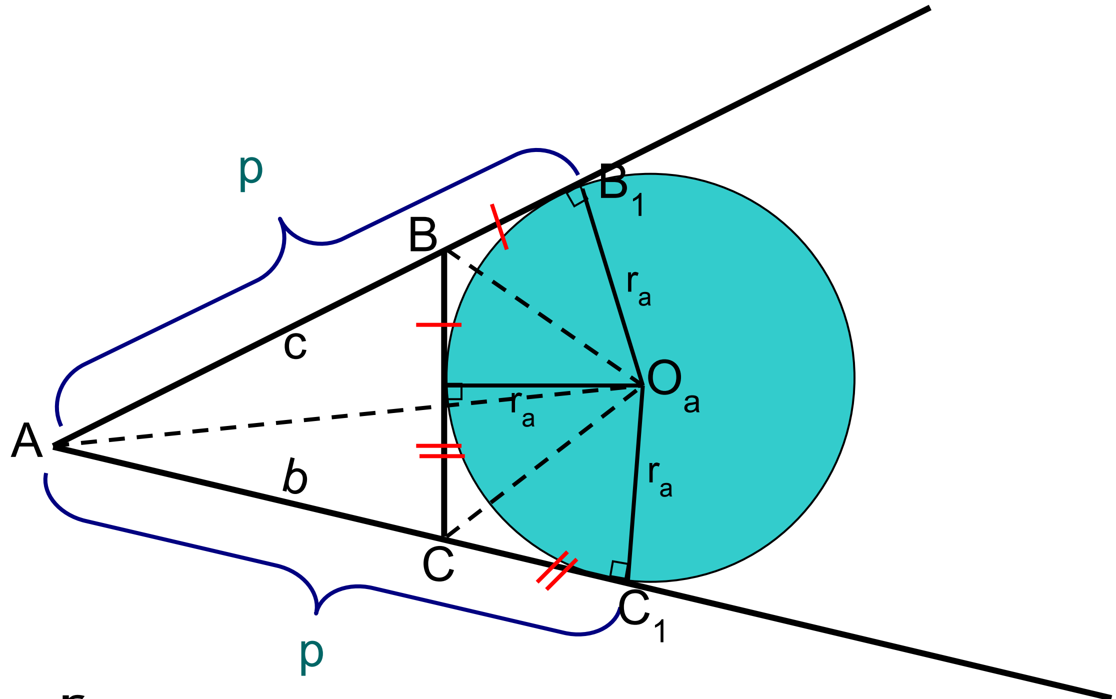
$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c} \qquad (3)$$

Дано:

$\triangle$ ABC

Вневписанная окр. $(O_a; r_a)$

Доказать (3)



Решение:

Имеем

$$S = S_{ABC} = S_{AOaC} + S_{BOaC} - S_{BOaC} = \frac{r_a}{2} \times (b + c - a) = r_a \times (p - a), \text{ т.е.}$$

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

Глава 3. § 1 Сумма радиусов вневписанных окружностей равна сумме радиуса вписанной окружности и удвоенного диаметра описанной окружности, т. е.

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

Доказательство:

Выразим все радиусы через стороны, площадь и полупериметр треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

Значит,

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} =$$

$$= S\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= S\frac{abc}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R$$

§ 2. Сумма величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вписанной окружности, т. е.

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

Доказательство:

Используем выражения радиусов через стороны и площадь треугольника:

r = $\frac{S}{p}$, R = $\frac{abc}{4S}$, r_a = $\frac{S}{p-a}$, r_b = $\frac{S}{p-b}$, r_c = $\frac{S}{p-c}$

Значит,

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

§ 3. Сумма всех попарных произведений радиусов вневписанных окружностей равна квадрату полупериметра треугольника, т. е.

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами ранее доказанных радиусов через стороны и площадь треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

Подставим

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{S^2}{(p-c)(p-a)} =$$

$$= S^2 \frac{(p-c)+(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2 \frac{3p-2p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2 \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Из формулы Герона следует

$(p – a)(p – b)(p – c) = \frac{S^2}{p}$, поэтому

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = S^2 \frac{p^2}{S^2} = p^2$$

§ 4. Произведение всех трех радиусов вневписанных окружностей равно произведению радиуса вписанной окружности на квадрат полупериметра треугольника, т.е.

$$r_a r_b r_c = rp^2$$

Доказательство:

Из ранее доказанных формул для радиусов и формулы Герона

$r_a = \dfrac{S}{p-a}$, $r_b = \dfrac{S}{p-b}$, $r_c = \dfrac{S}{p-c}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Тогда

$$r_a r_b r_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^3 p}{S^2} = Sp = pr \times p = rp^2$$

Следствие 1. **Площадь треугольника равна отношению произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей к полупериметру треугольника, т.е.**

$$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

Доказательство:

Из $r_a r_b r_c = rp^2 = rp \times p = Sp.$

Следовательно $$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

Следствие 2. **Площадь треугольника равна квадратному корню из произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей и радиуса вписанной окружности, т.е.**

$$S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$$

Доказательство:

Из следствия 1, что $S = \dfrac{r_a r_b r_c}{p}$ и равенства S = pr,

получаем, перемножая их почленно,

$S^2 = \dfrac{r_a r_b r_c}{p} \times pr = r_a r_b r_c r$. Значит $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$

§ 5. Величина, обратная высоте треугольника, опущенной на его данную сторону, равна полусумме величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника, т.е.

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right),\quad \frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right),\quad \frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами $r_b=\dfrac{S}{p-b}$, $r_c=\dfrac{S}{p-c}$

Значит,

$$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{2p-b-c}{S}=\frac{a+b+c-b-c}{S}=$$

$$=\frac{a}{S}=\frac{a}{\frac{1}{2}ah_a}=\frac{2}{h_a}\quad,\quad \frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$$

3. Заключение.

Рассмотренные свойства позволили установить связь между радиусами вписанной и вневписанной окружностями, между радиусами вневписанной окружностью и площадью треугольника, между радиусами вневписанных окружностей и периметром треугольника. Данный материал выходит за рамки школьной программы и будет полезен учащимся увлеченным математикой.