

# УПРАЖНЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ НА ГОТОВЫХ ЧЕРТЕЖАХ

IX КЛАСС



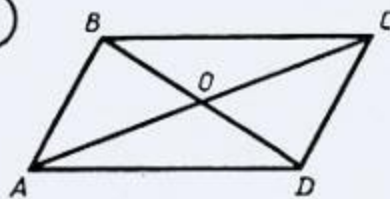
.

# Содержание

1. Векторы на плоскости
2. Решение треугольников
3. Площадь треугольника
4. Площадь четырехугольника
5. Правильные многоугольники
6. Прямая, отрезок, полупрямая
7. Углы
8. Равенство треугольников
9. Параллелограмм
10. Вписанные и описанные окружности
11. Векторы

# ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1



$ABCD$  – параллелограмм  
Укажите равные векторы

2

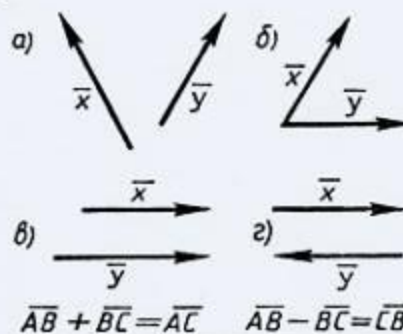
Дано: точки  $A(-5, 2)$  и  $B(2, 6)$ .

- а) Найдите координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{BA}$ .
- б) Найдите  $|\vec{AB}|$ .
- в) Отложите вектор, равный  $\vec{AB}$ : а) от точки  $C(-2, 7)$ , б) от точки  $O(0, 0)$

## Сложение векторов

Найдите  $\vec{x} + \vec{y}$  и  $\vec{x} - \vec{y}$ .

3



4

Дано:

- а)  $\vec{x}(-1, 4)$ ,  $\vec{y}(5, -7)$ ;
- б)  $\vec{x}(0, 4)$ ,  $\vec{y}(5, -5)$ ;
- в)  $\vec{x}(4, 0)$ ,  $\vec{y}(0, 7)$ .

Отложите данные и полученные векторы от начала координат

## Умножение вектора на число

5



Дано: векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Постройте:  $2\vec{a}$ ,  $-3\vec{b}$ ,  $-\frac{1}{2}\vec{b}$ .

$\frac{1}{2}\vec{a}$ ,  $\frac{2}{3}\vec{b}$ ,  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

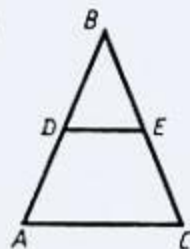
6

Дано: векторы  $\vec{a}(-2, 5)$  и  $\vec{b}(1, -4)$ .

Найдите:  $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ ,  $|3\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|5\vec{b} - \vec{a}|$

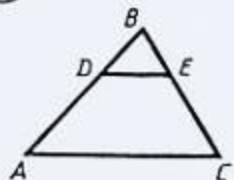
# ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

1



Дано:  $DE$  — средняя линия.  
Докажите: а)  $DE \parallel AC$ ,  
б)  $DE = \frac{1}{2} AC$

2



Дано:  $BD = \frac{1}{3} AB$ ,  $BE = \frac{1}{3} BC$   
Докажите:  $DE \parallel AC$ ,  
 $DE = \frac{1}{3} AC$

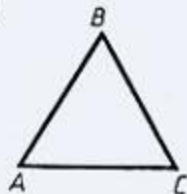
3

а) Докажите, что векторы  $\vec{a}(2, 4)$  и  $\vec{b}(-1, -2)$  коллинеарны.  
б) Найдите  $m$ , если известно, что  $\vec{a}(2, 5)$  и  $\vec{b}(m, 9)$  коллинеарны. Запишите соотношение между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в виде  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .  
в) Даны точки  $A(-2, 2)$ ,  $B(5, 6)$ ,  $C(10, 5)$ ,  $D(3, 1)$ .

Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм

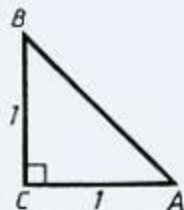
## Скалярное произведение векторов

4



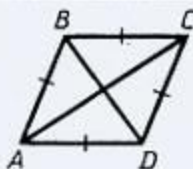
Дано:  $AB = BC = AC = 2$ .  
Найдите:  
а)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  
б)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

5



Найдите:  
а)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  
б)  $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$ ,  
в)  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

7



Докажите, что  $AC \perp BD$

6

а) Найдите угол между  $\vec{a}(1, 3)$  и  $\vec{b}(-1, 5)$ .  
б) Даны точки  $A(2, 2)$ ,  $B(4, 6)$ ,  $C(0, 8)$ ,  $D(-2, 4)$ .  
Докажите, что  $ABCD$  — прямоугольник.  
в) Даны точки  $A(-2, 2)$ ,  $B(-8, -1)$ ,  $C(-8, -5)$ .

Найдите косинусы углов  $\triangle ABC$

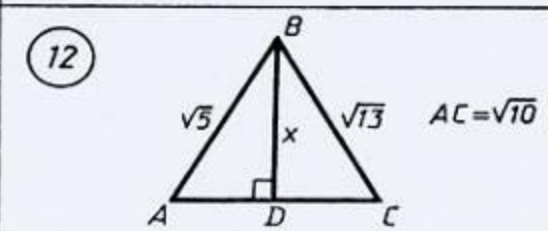
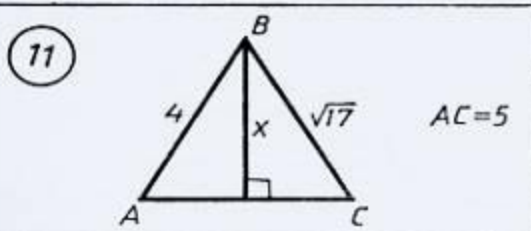
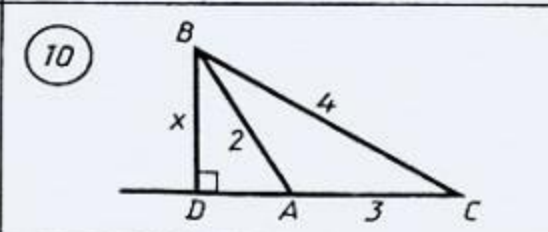
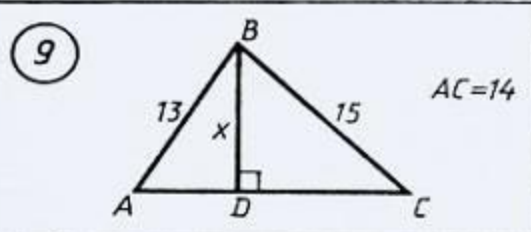
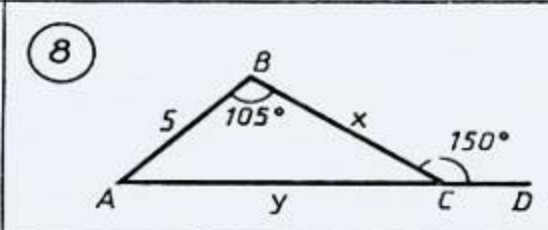
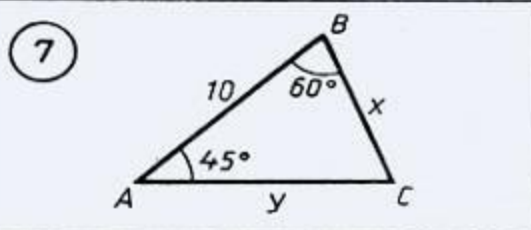
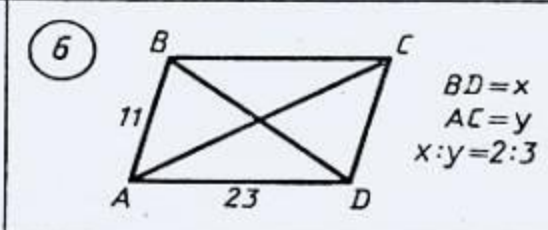
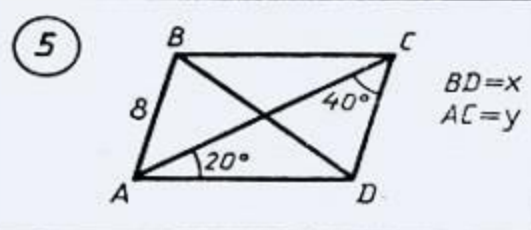
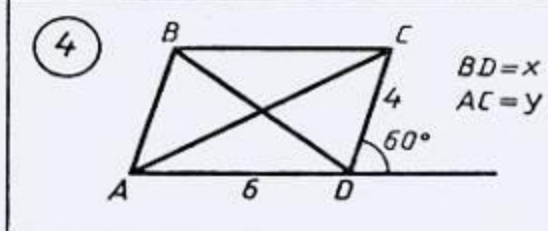
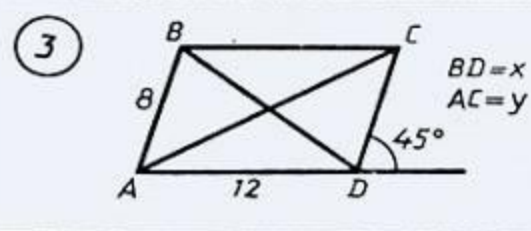
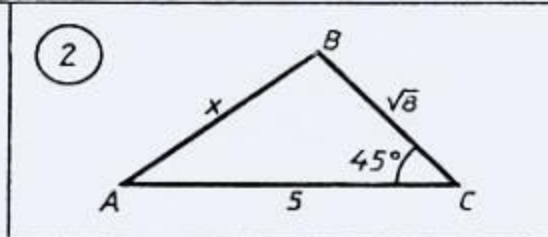
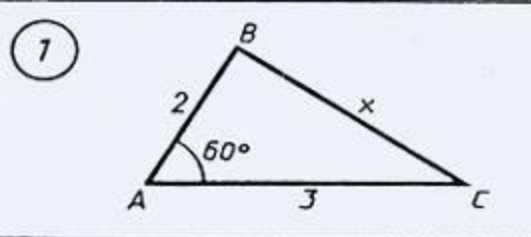
8

Даны точки  $A(-3, 4)$ ,  $B(0, 8)$ ,  $C(5, 8)$ ,  $D(2, 4)$ .  
Докажите, что  $ABCD$  — ромб



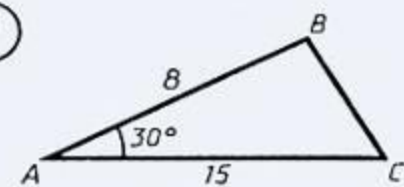
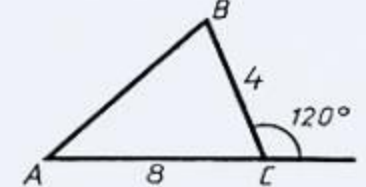
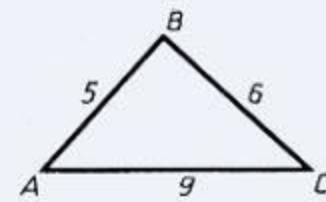
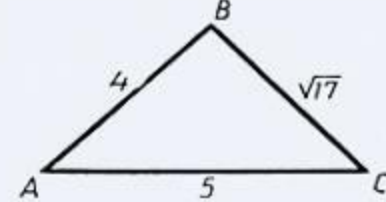
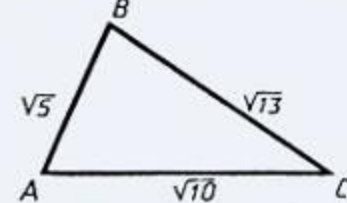
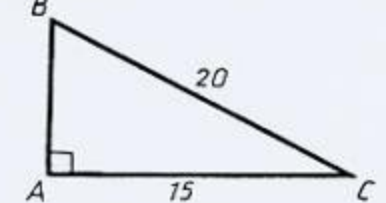
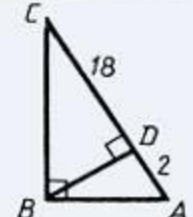
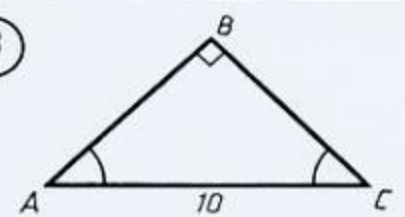
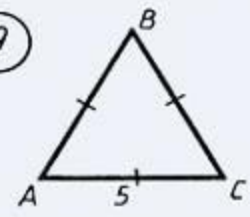
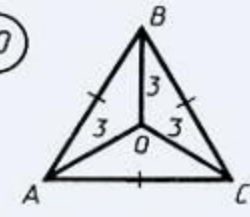
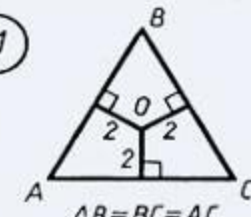
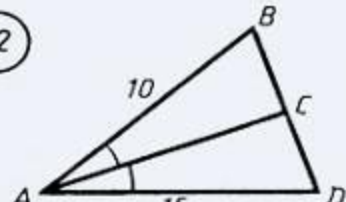
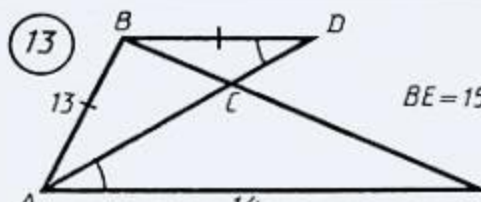
# РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм. Найдите значения  $x$  и  $y$ .



# ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Вычислите площадь  
треугольника  $ABC$ .

<p>1</p> 	<p>2</p> 	
<p>3</p> 	<p>4</p> 	
<p>5</p> 	<p>6</p> 	
<p>7</p> 	<p>8</p> 	
<p>9</p> 	<p>10</p> 	<p>11</p>  <p><math>AB=BC=AC</math></p>
<p>12</p>  <p><math>BD=20</math></p>	<p>13</p>  <p><math>BE=15</math></p>	

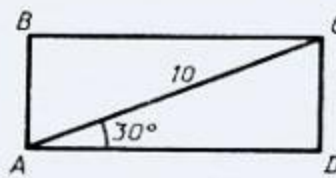


# ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

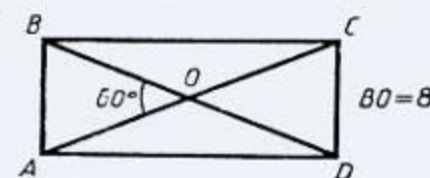
Найдите площадь  $ABCD$ .

$ABCD$  — прямоугольник

1

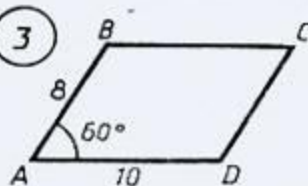


2

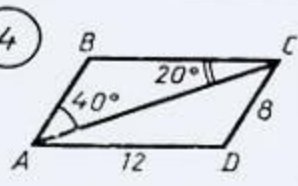


$ABCD$  — параллелограмм

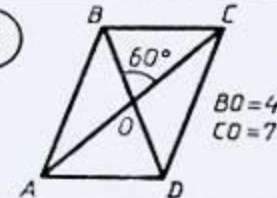
3



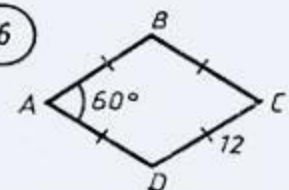
4



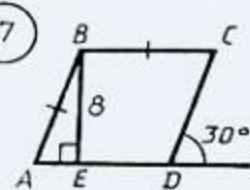
5



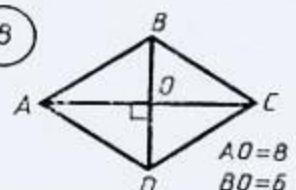
6



7

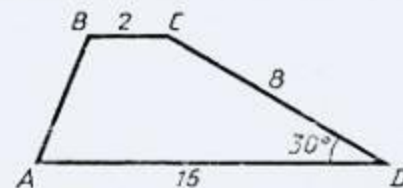


8

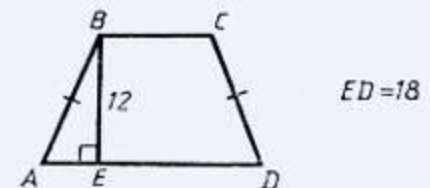


$ABCD$  — трапеция

9

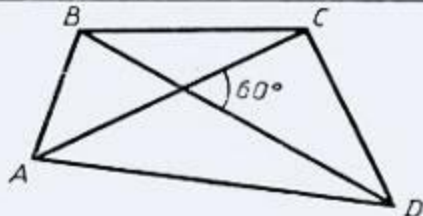


10



$ABCD$  — произвольный четырехугольник

11



$BD = 18$   
 $AC = 12$



# ПРАВЕЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Обозначения:  $a$  - сторона многоугольника,  $R(r)$  – радиус описанной (вписанной) окружности,  $S$  – площадь многоугольника.

На рисунках 1 найдите  $R, r, S$ .

На рисунках 2 и 3 -  $a$  и  $S$ .

На рисунках 4 найдите  $r/R$ .

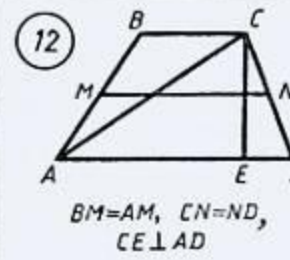
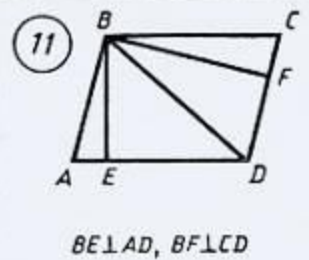
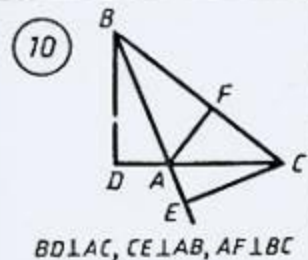
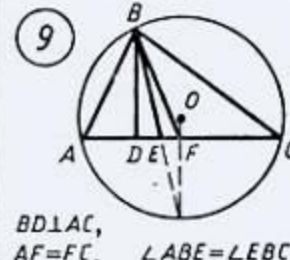
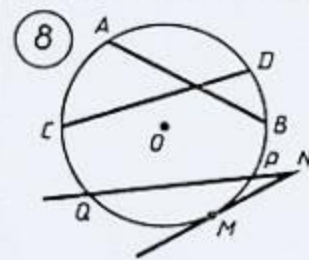
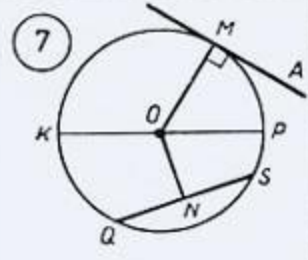
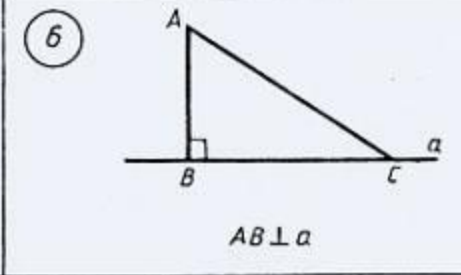
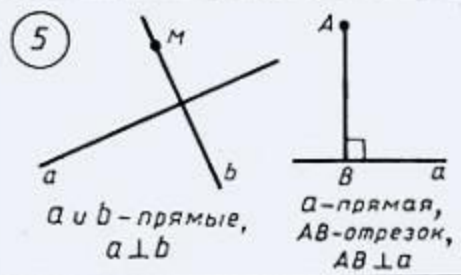
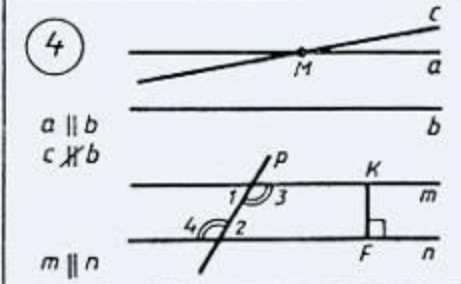
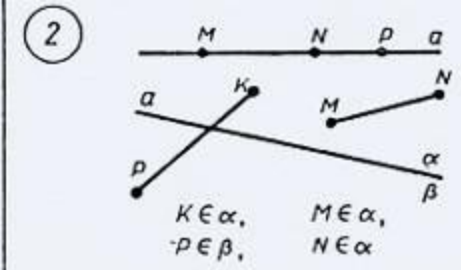
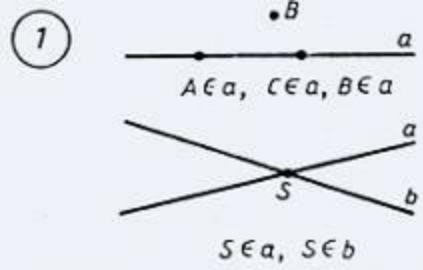
На рисунках 5 найдите  $R/r$ .

$n$ -угольник	Треугольник	Четырехугольник	Шестиугольник
<p>1</p>			
<p>2</p>			
<p>3</p>			
<p>4</p>			
<p>5</p>			

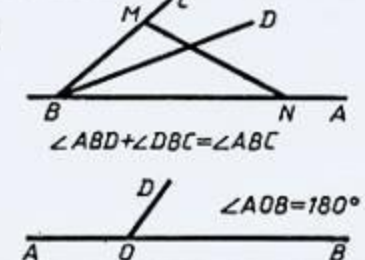




# ПРЯМАЯ, ОТРЕЗОК, ПОЛУПРЯМАЯ

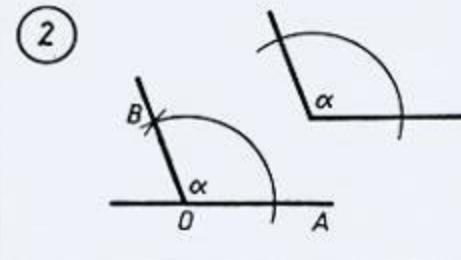


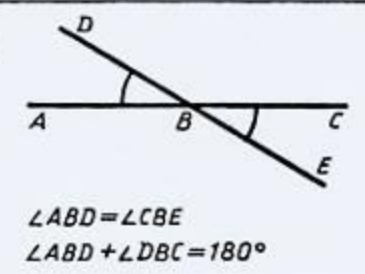
# УГЛЫ

1 

$$\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$$

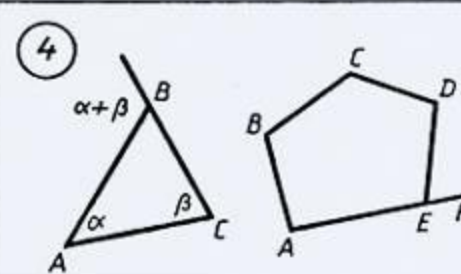
$$\angle AOB = 180^\circ$$

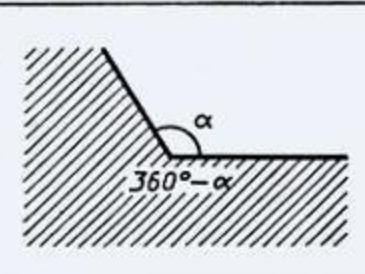
2 

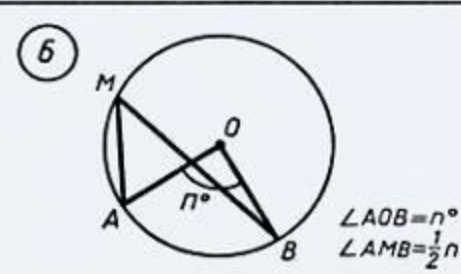
3 

$$\angle ABD = \angle CBE$$

$$\angle ABD + \angle DBC = 180^\circ$$

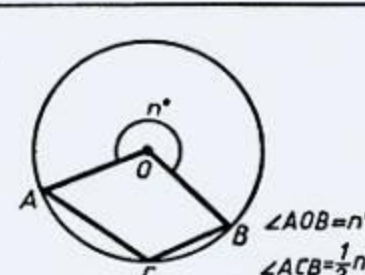
4 

5 

6 

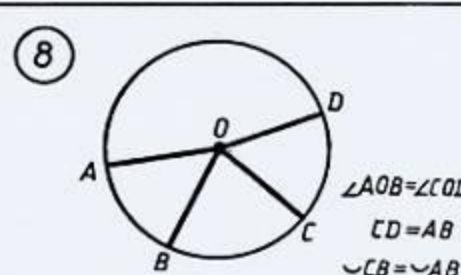
$$\angle AOB = n^\circ$$

$$\angle AMB = \frac{1}{2}n^\circ$$

7 

$$\angle AOB = n^\circ$$

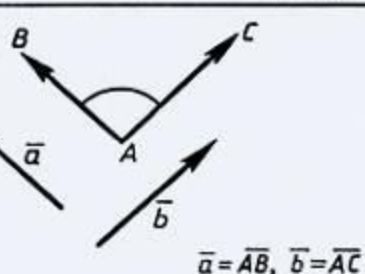
$$\angle ACB = \frac{1}{2}n^\circ$$

8 

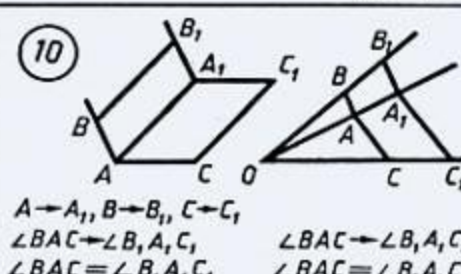
$$\angle AOB = \angle COD$$

$$CD = AB$$

$$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AB}$$

9 

$$\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AC}$$

10 

$$A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$$

$$\angle BAC \rightarrow \angle B_1 A_1 C_1$$

$$\angle BAC = \angle B_1 A_1 C_1$$

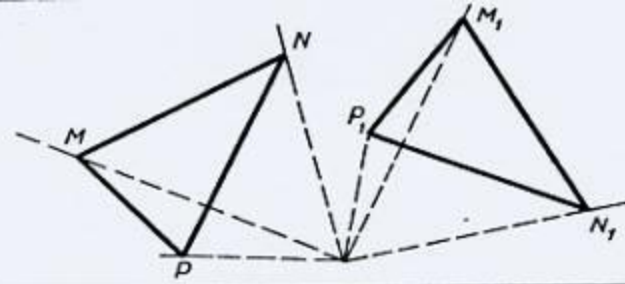
$$\angle BAC \rightarrow \angle B_1 A_1 C_1$$

$$\angle BAC = \angle B_1 A_1 C_1$$

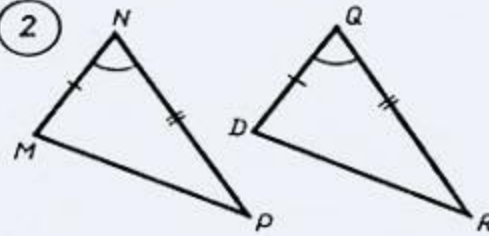


# РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

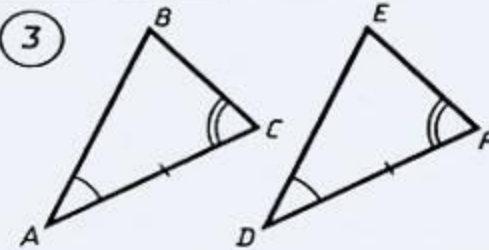
1



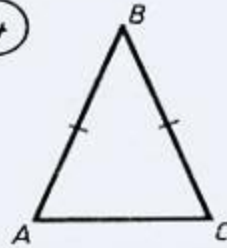
2



3

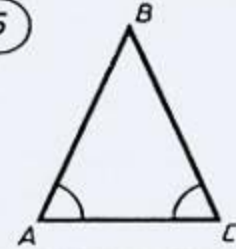


4



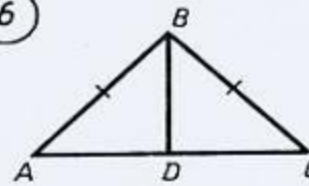
Если  $AB=BC$ ,  
то  $\angle A=\angle C$

5

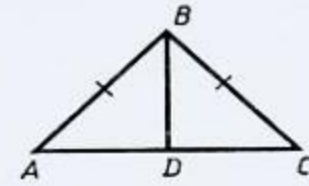


Если  $\angle A=\angle C$ ,  
то  $AB=BC$

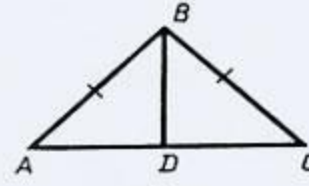
6



$AD=DC$

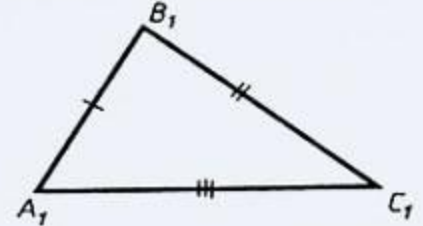
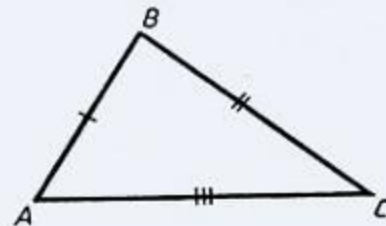


$\angle ABD=\angle CBD$

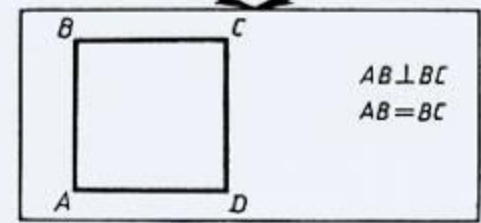
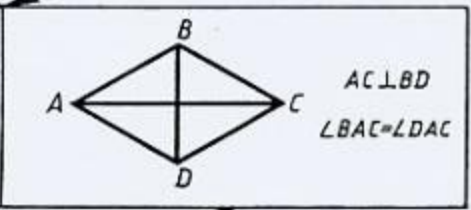
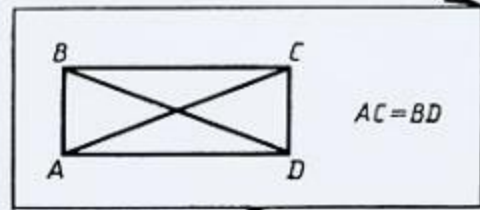
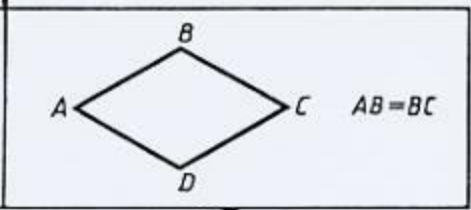
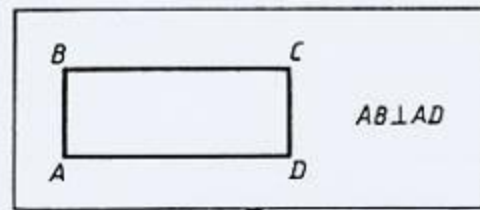
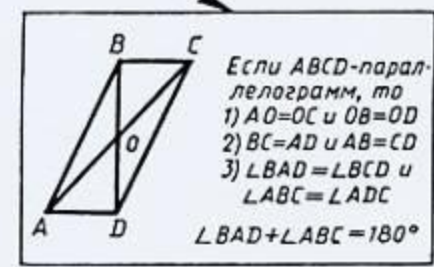
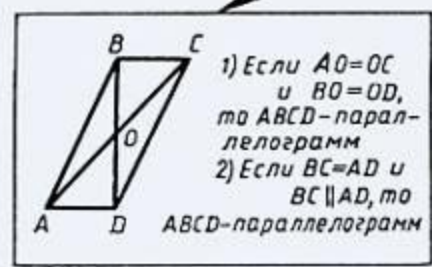
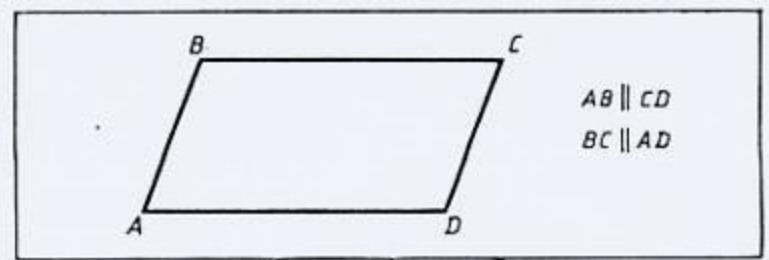


$BD \perp AC$

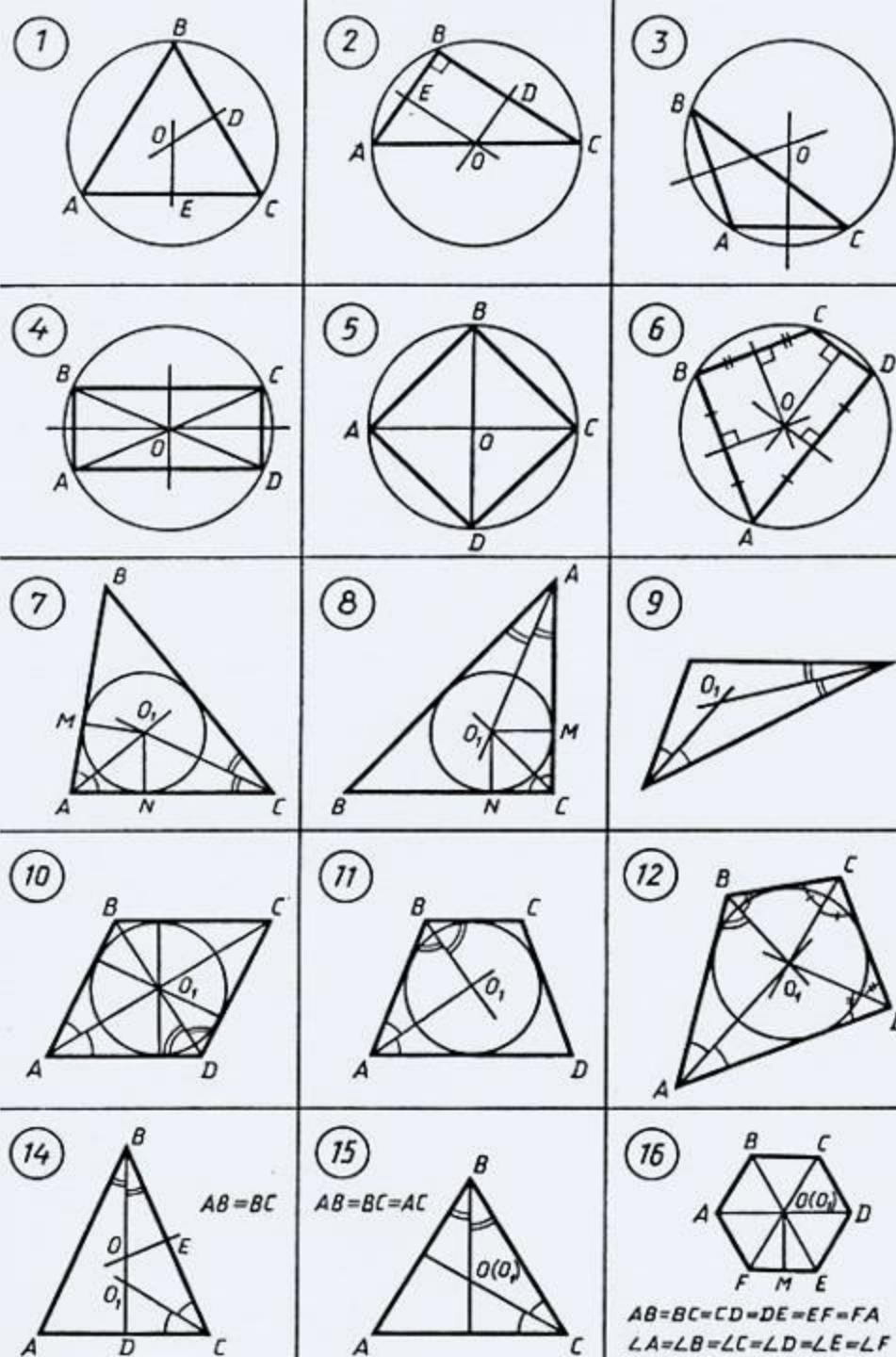
7



# ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

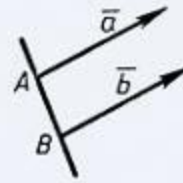


# ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

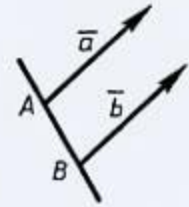


# ВЕКТОРЫ

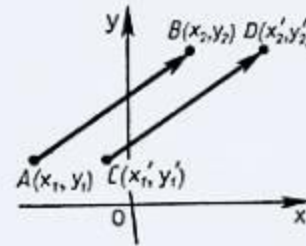
1 Если  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  и  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$ .



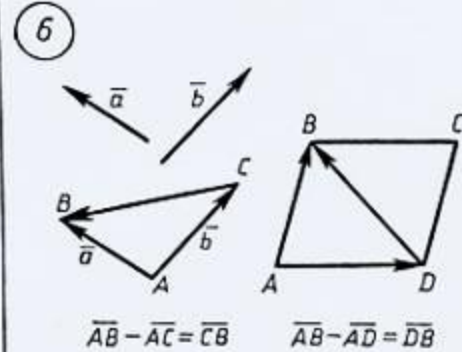
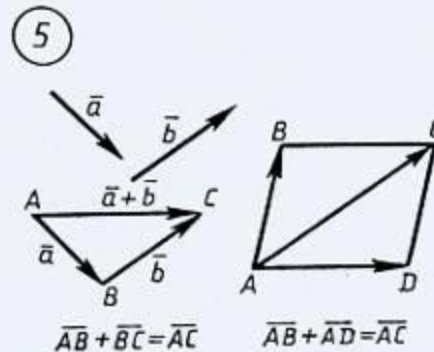
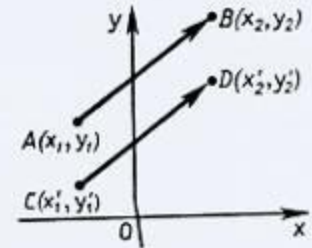
2 Если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  и  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ .



3 Если  $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$  и  $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$ , то  $\vec{AB} = \vec{CD}$ .



4 Если  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , то  $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$  и  $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$ .



7  $\vec{a}(a_1, a_2) + \vec{b}(b_1, b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$   
 $\vec{a}(a_1, a_2) - \vec{b}(b_1, b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$   
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$   
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

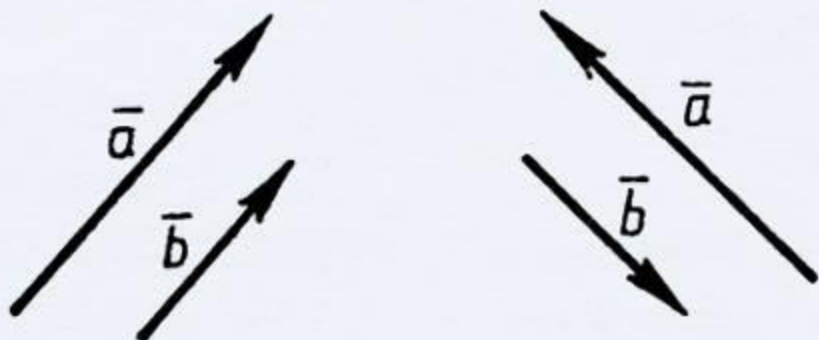
8  $\lambda \vec{a}(a_1, a_2) = \vec{c}(\lambda a_1, \lambda a_2)$   
 $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$   
 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$



# ВЕКТОРЫ (продолжение)

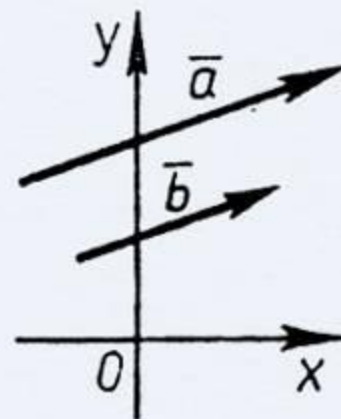
9

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \ (\lambda > 0) \quad \vec{a} = \lambda \vec{b} \ (\lambda < 0)$$
$$|\vec{a}| = \lambda |\vec{b}| \quad |\vec{a}| = -\lambda |\vec{b}|$$



10

$$\vec{a} (a_1, a_2), \vec{b} (b_1, b_2)$$
$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$



11

$$\vec{a} (a_1, a_2) \cdot \vec{b} (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

12

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

