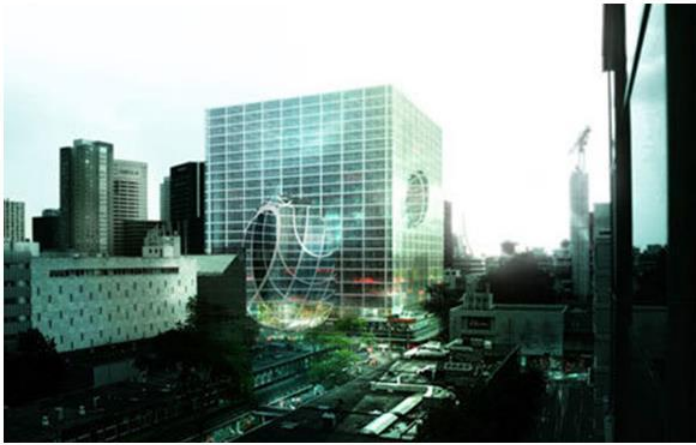


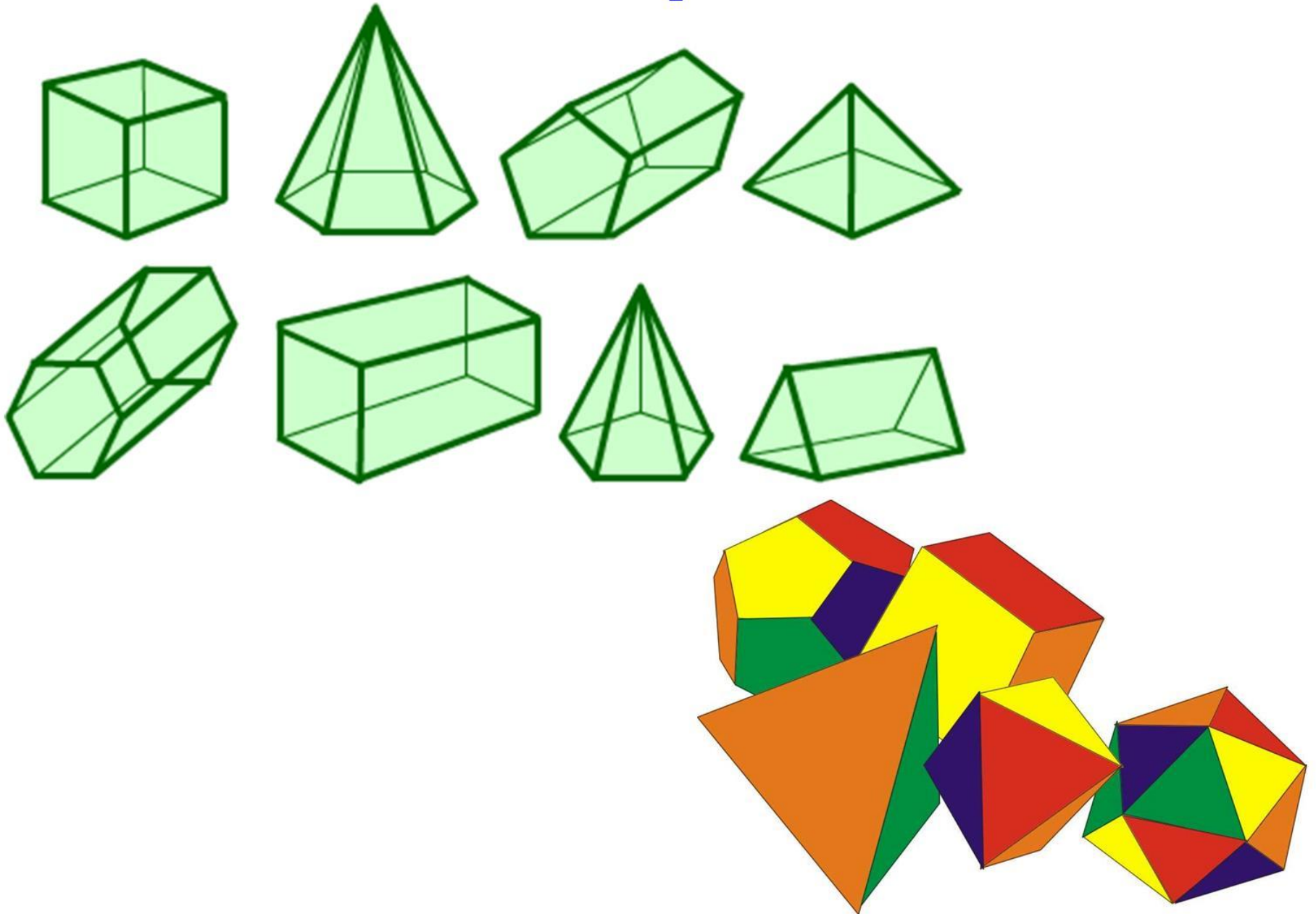
М,



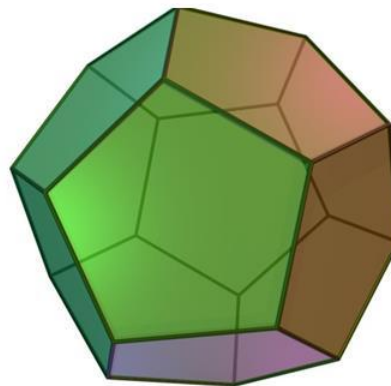
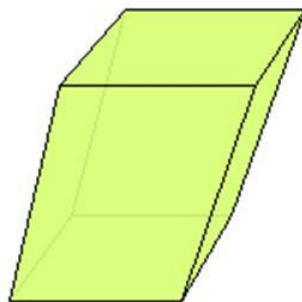
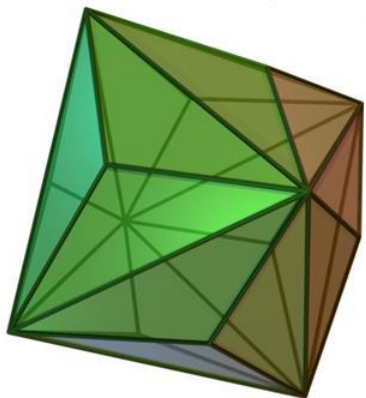
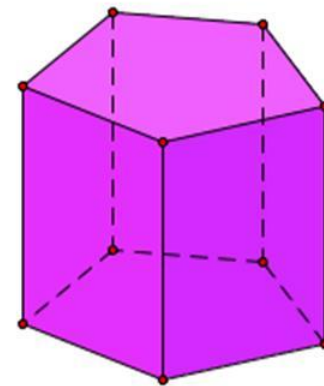
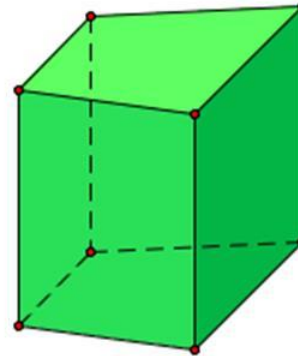
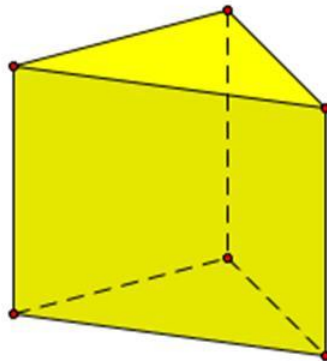
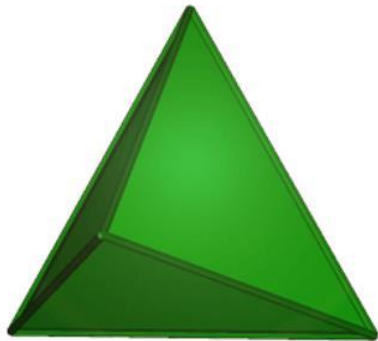
Ц Ц Ц Ц ←



Многогранники

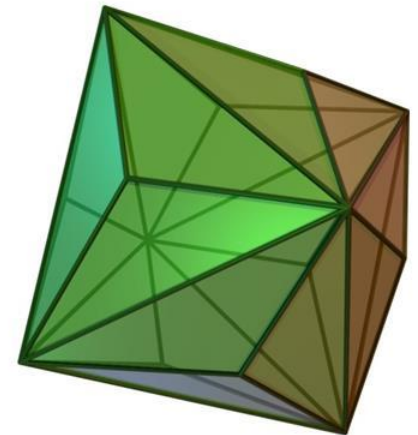
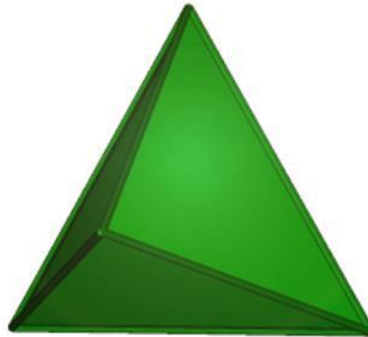
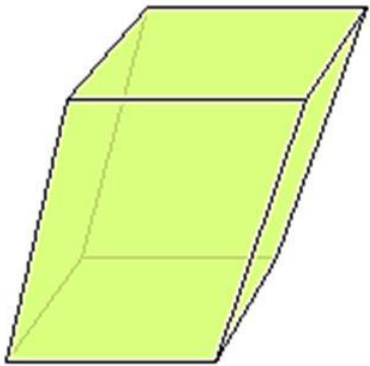


Многогранником называется
тело, поверхность которого
состоит из конечного числа
многоугольников.

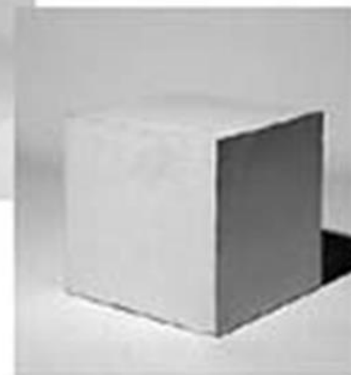
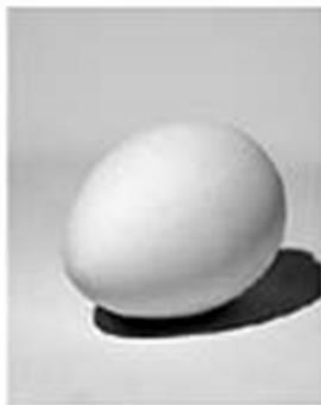


Поверхность любого многогранника состоит из многоугольников.

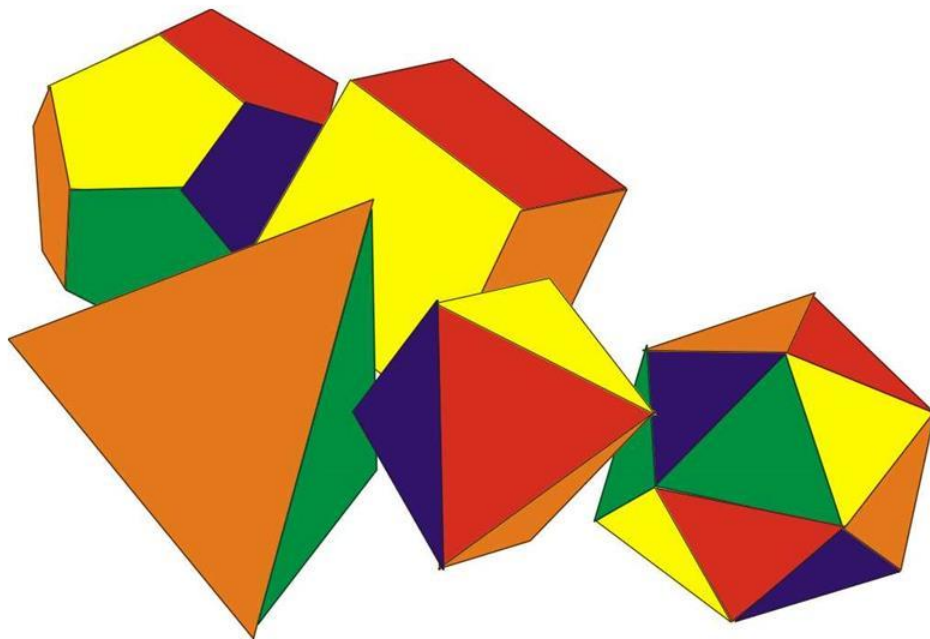
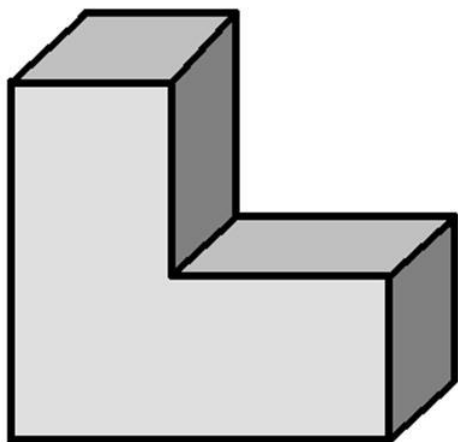
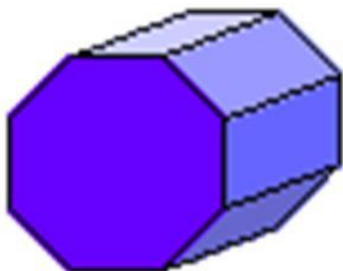
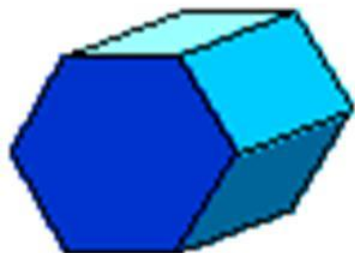
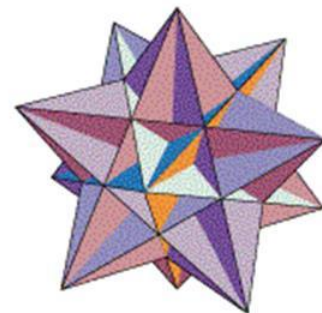
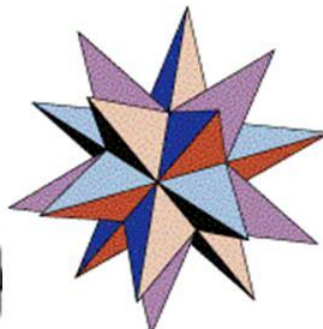
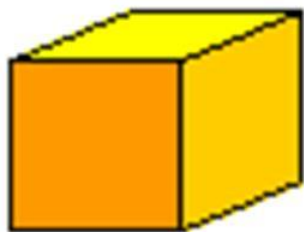
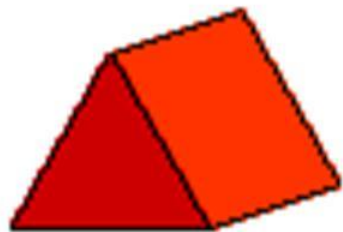
Каждый из многоугольников называют **гранью многогранника**,
вершины этих многоугольников – **вершинами многогранника**,
а стороны – **ребрами**.



Укажите геометрические тела,
являющиеся **многогранниками**

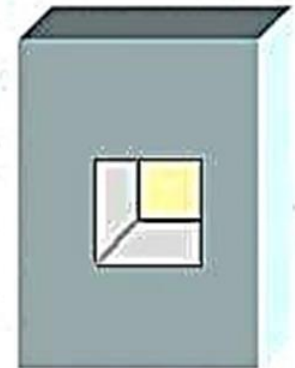
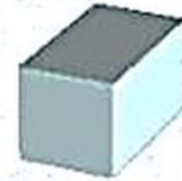
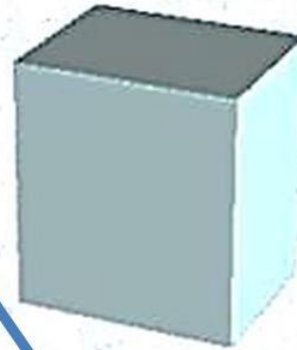
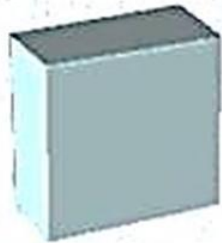


Виды многогранников

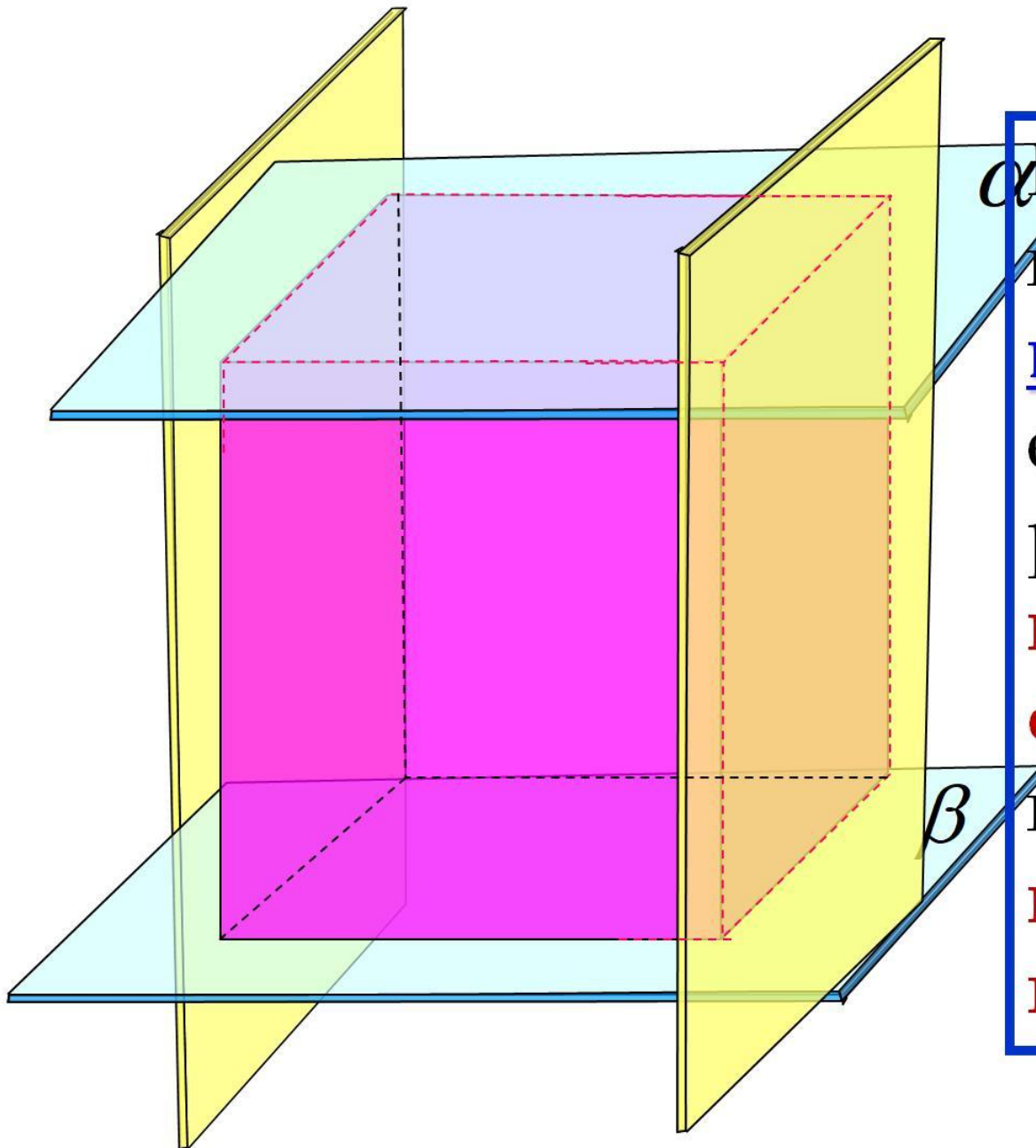


Многогранник

*Выпуклый
многогранник.*

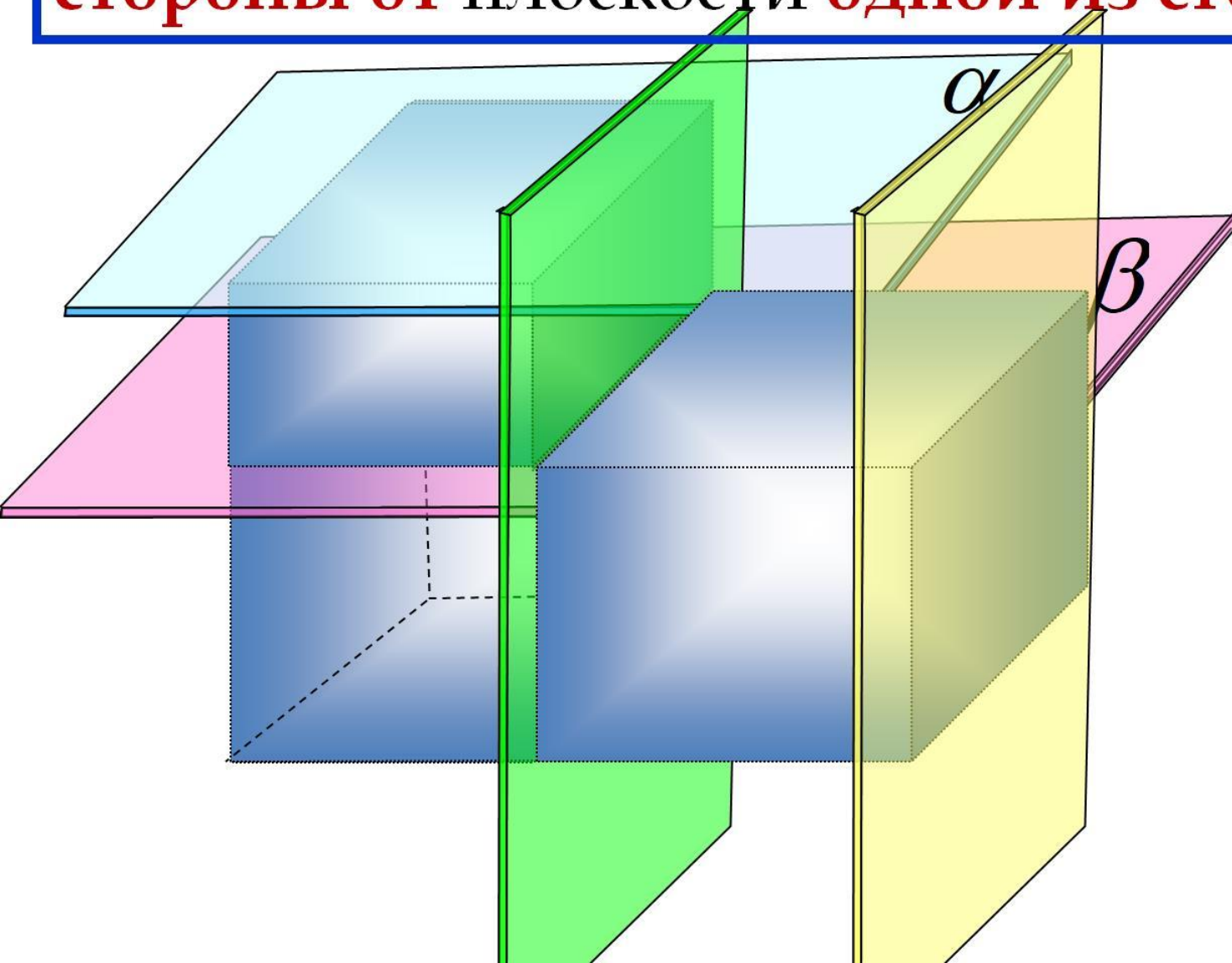


*Невыпуклый
многогранник.*



Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Невыпуклый многогранник -
многогранник, расположенный по разные
стороны от плоскости одной из его граней.

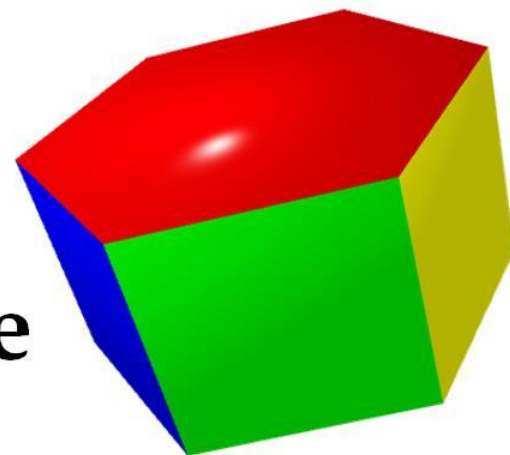
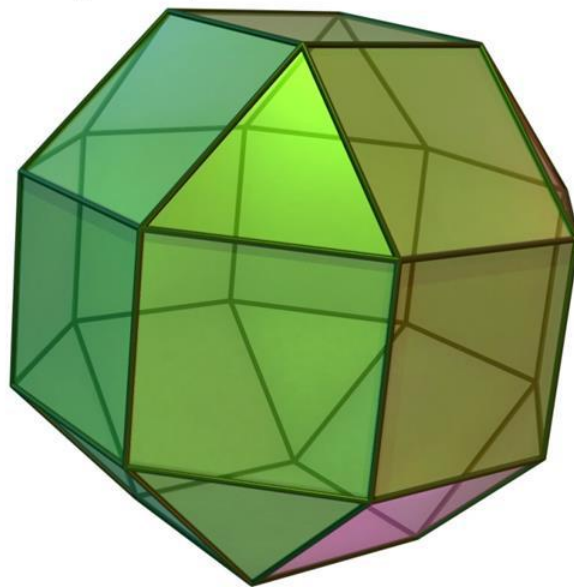
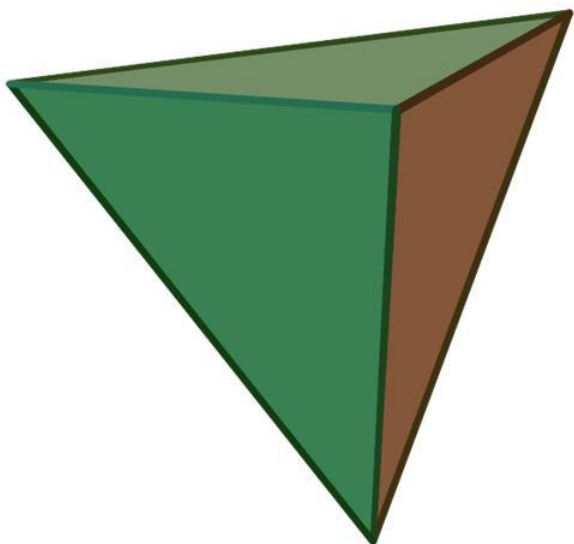


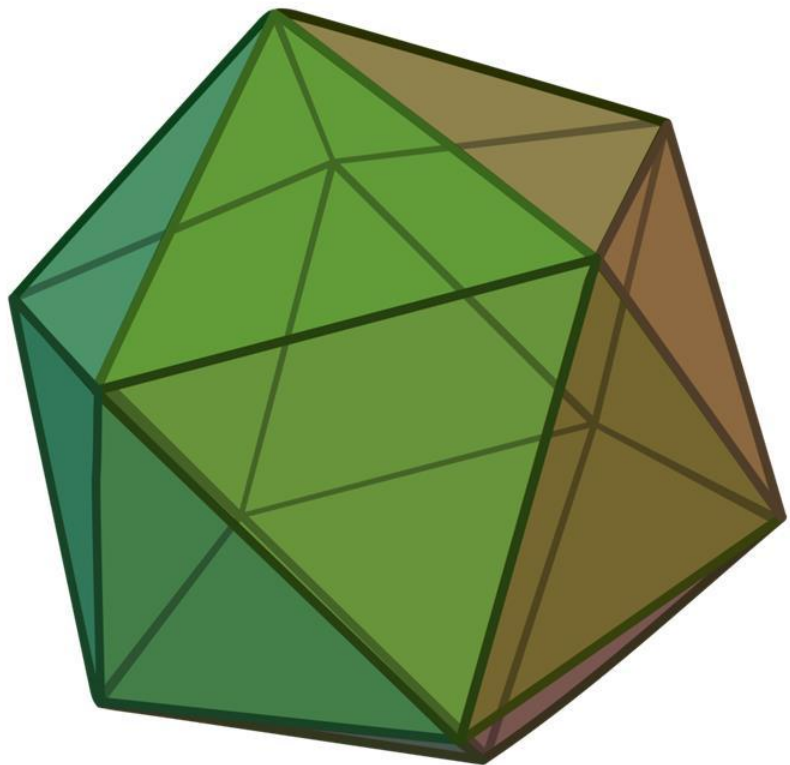
многогранники

правильные

неправильные

полуправильные





Правильным

называется
многогранник, у
которого **все грани**
являются **правильными**
многоугольниками, и
все многогранные **углы**
при вершинах **равны**.

Пример правильного
многогранника (икосаэдр), его
гранями являются *правильные*
(равносторонние) *треугольники*.

Немного истории

Все типы правильных многогранников были известны в Древней Греции – именно им посвящена завершающая, XIII книга **«Начал» Евклида.**



Многогранники

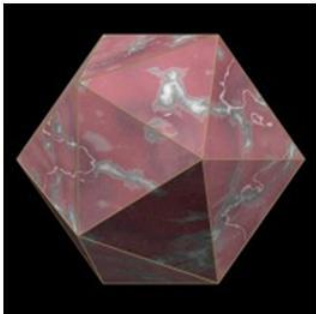
выпуклые

невыпуклые

Тела
Платона

Тела
Архимеда

Тела
Кеплера-
Пуассона





Правильные многогранники называют также «Платоновыми телами» - они занимали видное место в идеалистической картине мира древнегреческого философа Платона.

Платоновы тела

тетраэдр

икосаэдр

куб

октаэдр

додекаэдр

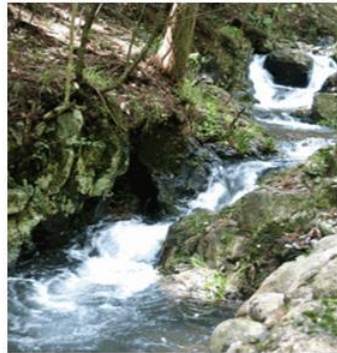
огонь

вода

земля

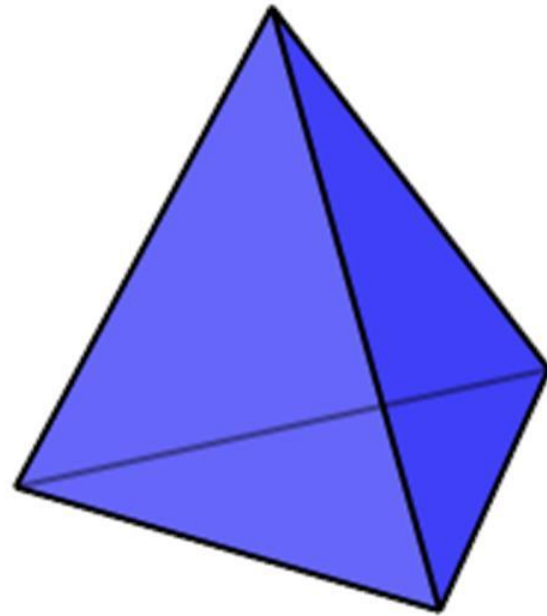
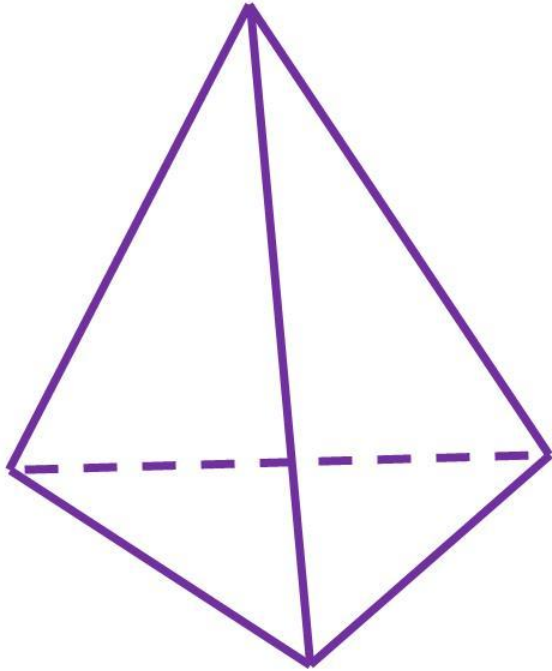
воздух

«всё сущее»



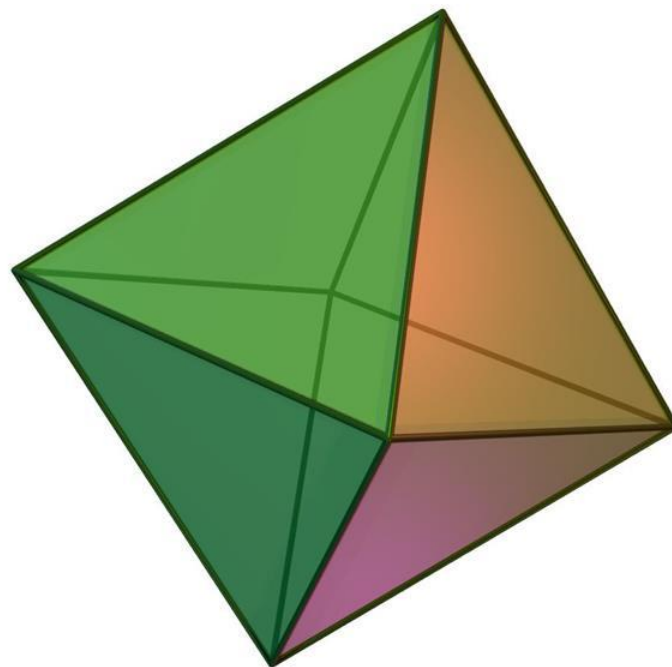
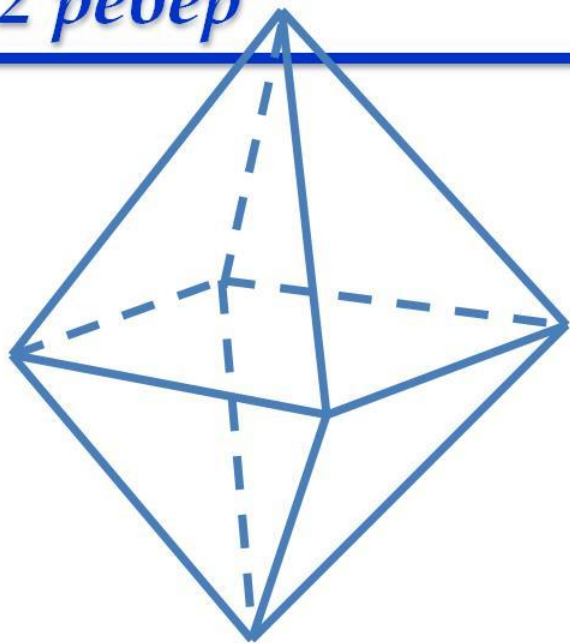
Тетраэдр

Правильный многогранник, у которого грани правильные треугольники и **в каждой вершине** сходится **по три ребра** и **по три грани**. *У тетраэдра: 4 грани, четыре вершины и 6 ребер.*



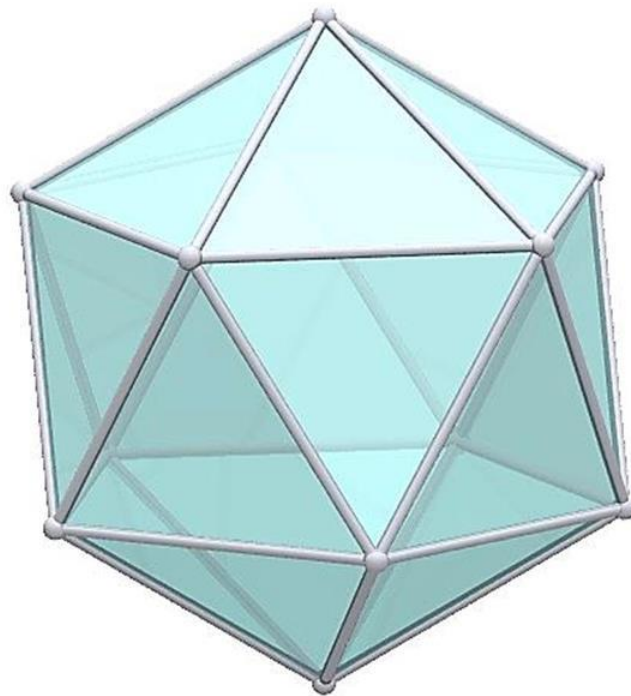
Октаэдр

Правильный многогранник, у которого грани- правильные треугольники и **в каждой** вершине сходится **по четыре ребра** и **по четыре грани**. *У октаэдра: 8 граней, 6 вершин и 12 ребер*



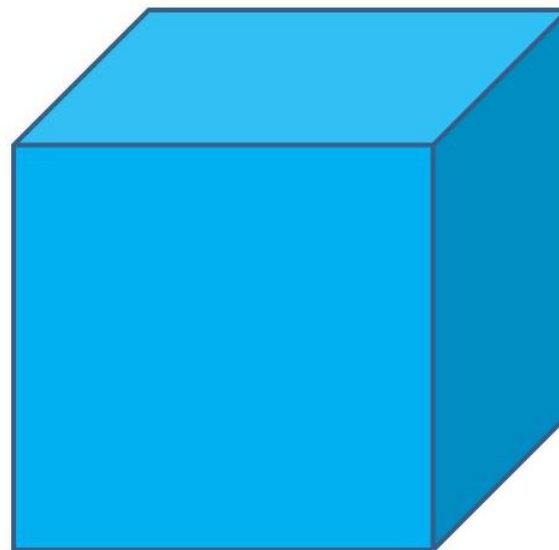
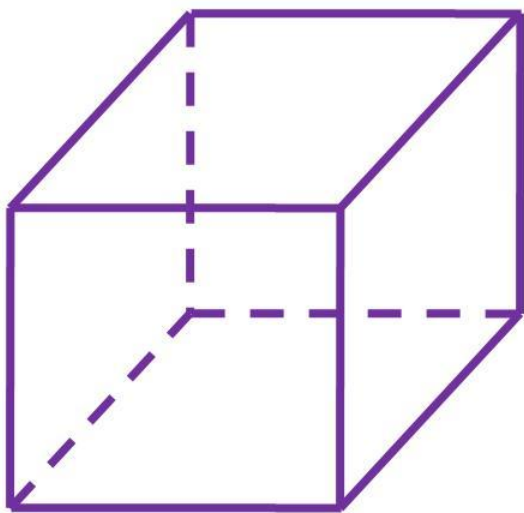
Икосаэдр

Правильный многогранник, у которого грани правильные треугольники. У икосаэдра: 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.



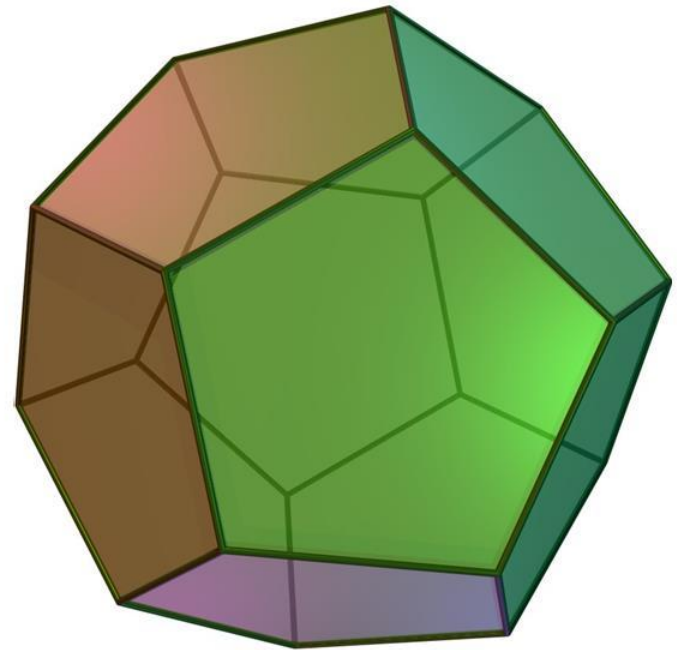
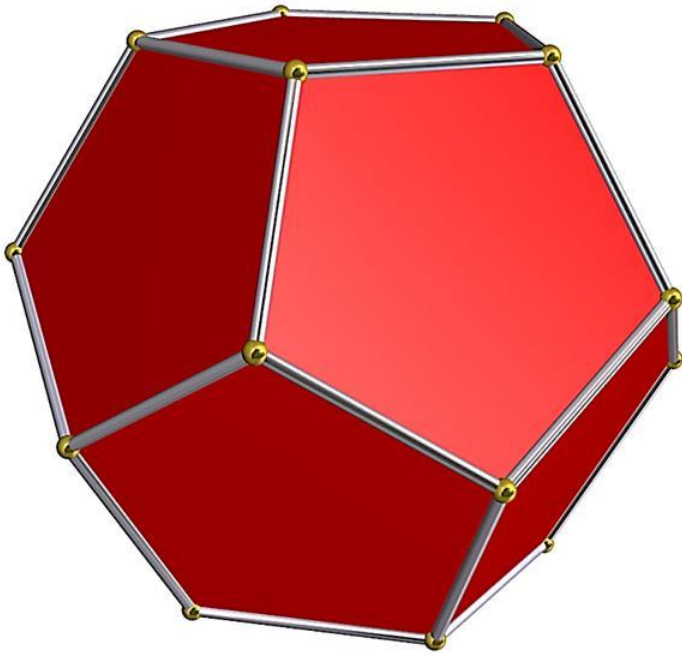
Куб

Правильный многогранник, у которого грани - квадраты и **в каждой вершине** сходится **по три ребра и три грани**. У него: *6 граней, 8 вершин и 12 ребер.*



Додекаэдр

Правильный многогранник, у которого грани правильные пятиугольники и **в каждой вершине** сходится **по три ребра** и **три грани**. *У додекаэдра: 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.*

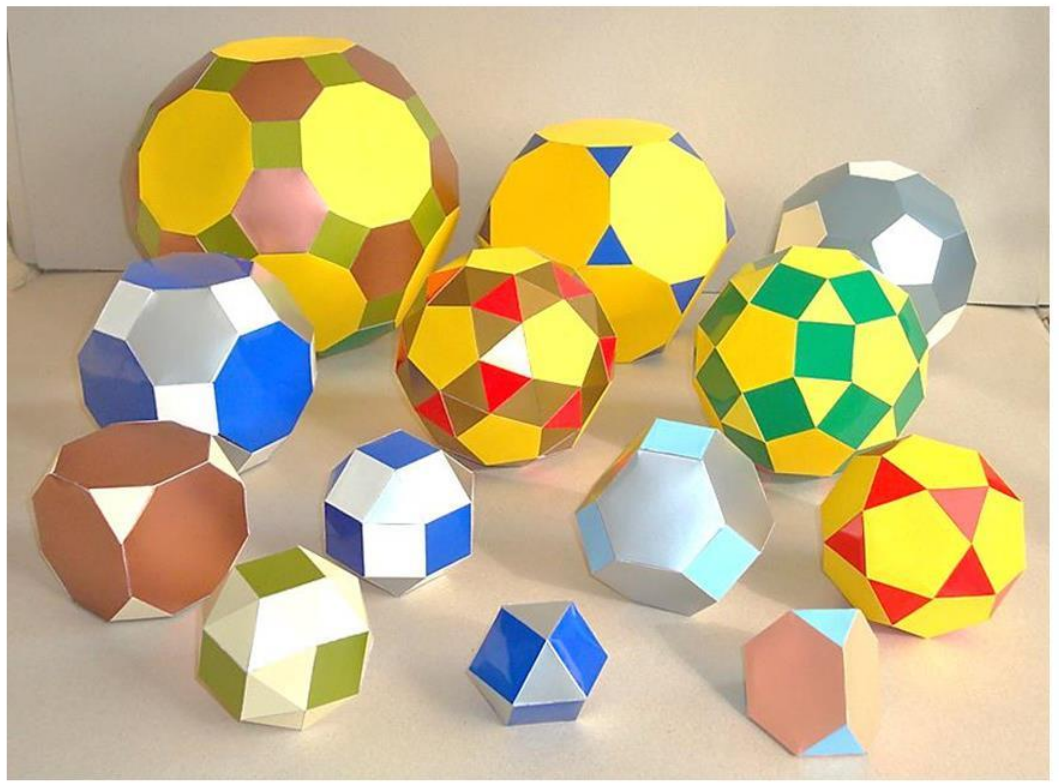


Вывод:

Существует *лишь пять выпуклых правильных многогранников* - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.

Названия пришли из Древней Греции, и в них указывается число граней («эдра» - грань)

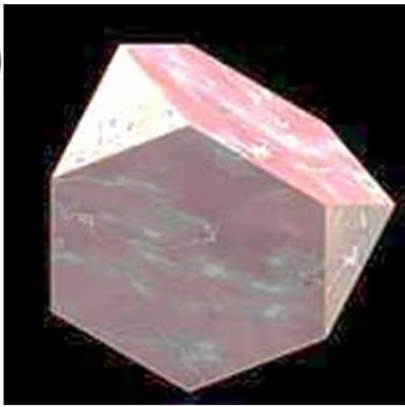
- «тетра» - 4
- «гекса» - 6
- «окта» - 8
- «икоса» - 20
- «додека» - 12



Существует семейство тел, родственных Платоновым - это полуправильные выпуклые многогранники, или Архимедовы тела. У них все многогранные углы равны, все грани - правильные многоугольники, но нескольких различных типов.

Усеченные Архимедовы тела

(а)



(а) усеченный тетраэдр,

(б) усеченный куб,



(б)

(в)



(в) усеченный октаэдр,

(г) усеченный додекаэдр,



(г)

(д)



(д) усеченный икосаэдр

Другая группа **Архимедовых тел -**
квазиправильные многогранники.

Частица «квази» подчеркивает, что грани этих многогранников - правильные многоугольники всего двух типов, причем *каждая грань одного типа окружена многоугольниками другого типа.*

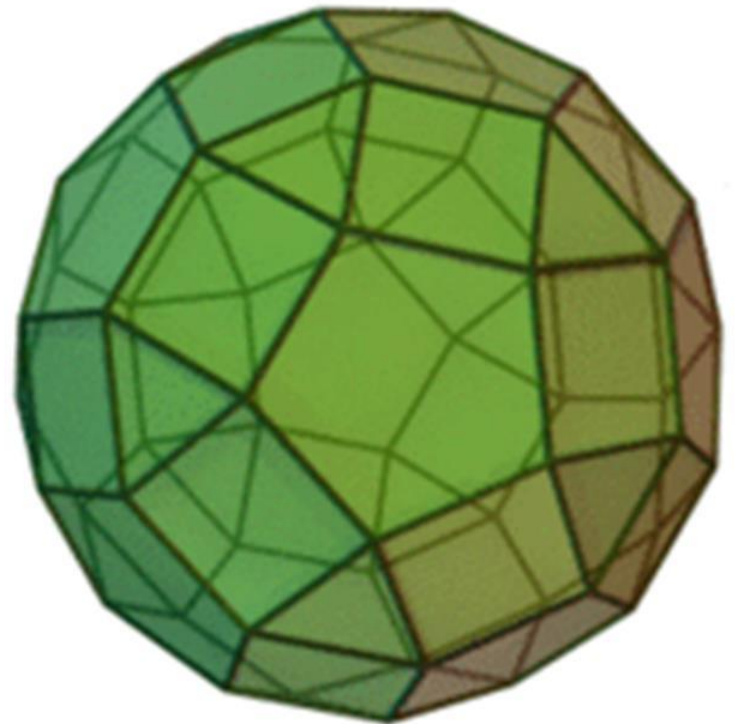
Эти два тела носят название

ромбокубооктаэдр и *икосододекаэдр*



Два последующих Архимедовых тела
называются

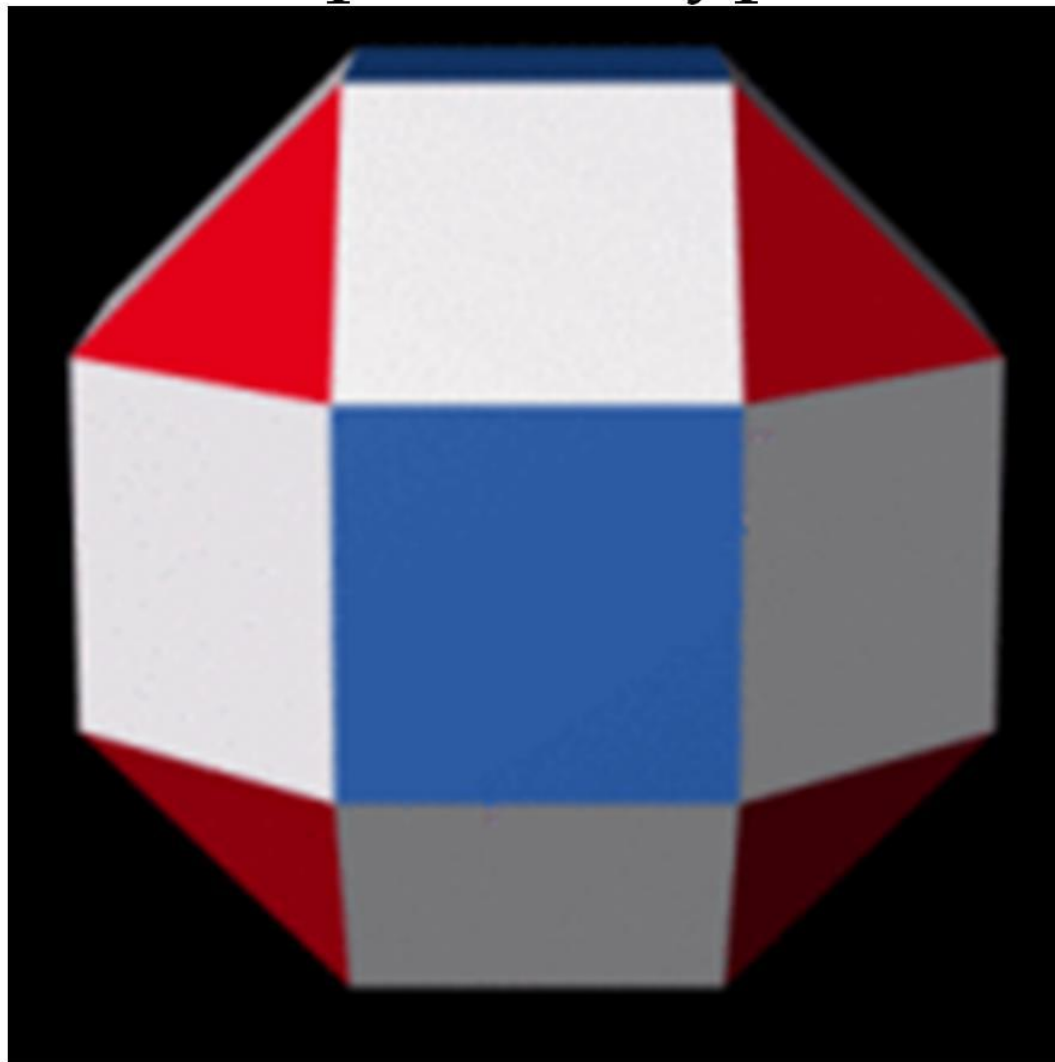
ромбокубооктаэдром и *ромбоикосододекаэдром*



Наконец, существуют две так называемые «курносые» модификации – одна для куба (*курносый куб*), другая – для додекаэдра (*курносый додекаэдр*)



Преобразование ромбокубооктаэдра в
«ЛЕВЫЙ» и «ПРАВЫЙ» курносые кубы.



Тела Кеплера - Пуассона



Аналоги платоновых тел.

Это невыпуклые однородные многогранники,

все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми.





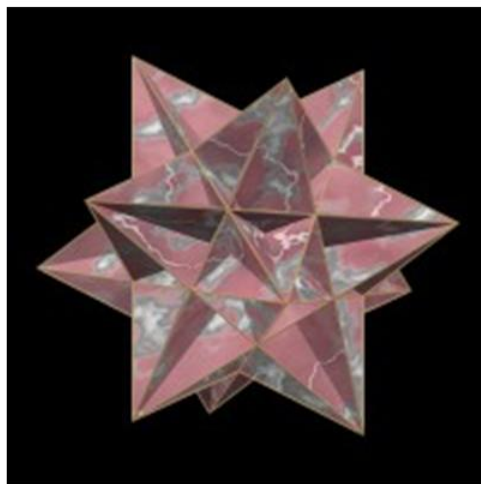
Малый звездчатый

додекаэдр



Большой звездчатый

додекаэдр



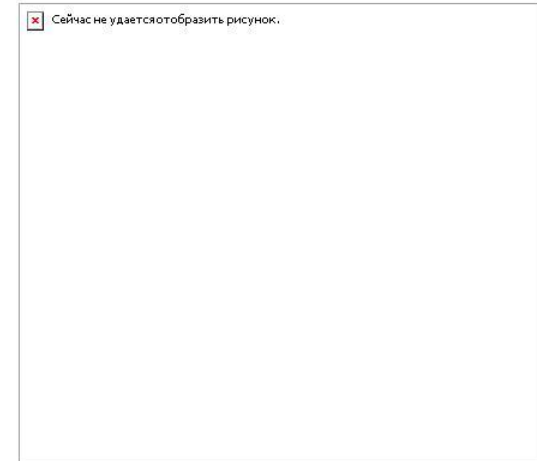
Большой икосаэдр

Многогранники в природе

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов.



Кристалл сульфата меди II



Кристалл алюмокалиевых квасцов

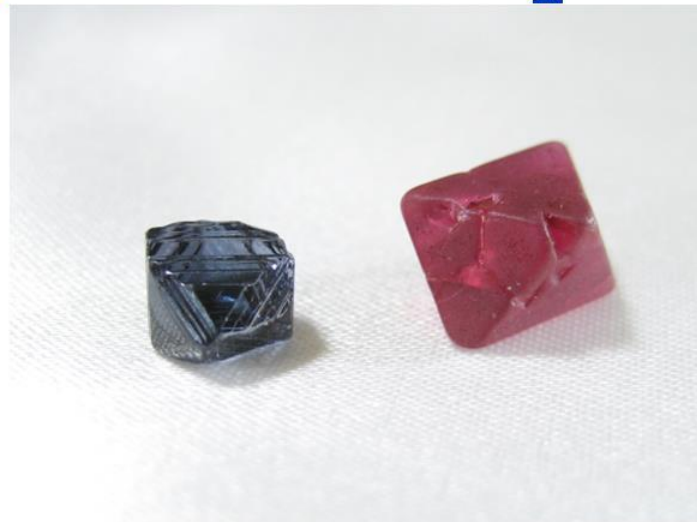


Кристалл сульфата никеля II

Кристаллы в форме октаэдра



Квасцы



Шпинель



Флюорит



Алмаз



Кристаллы в форме призм

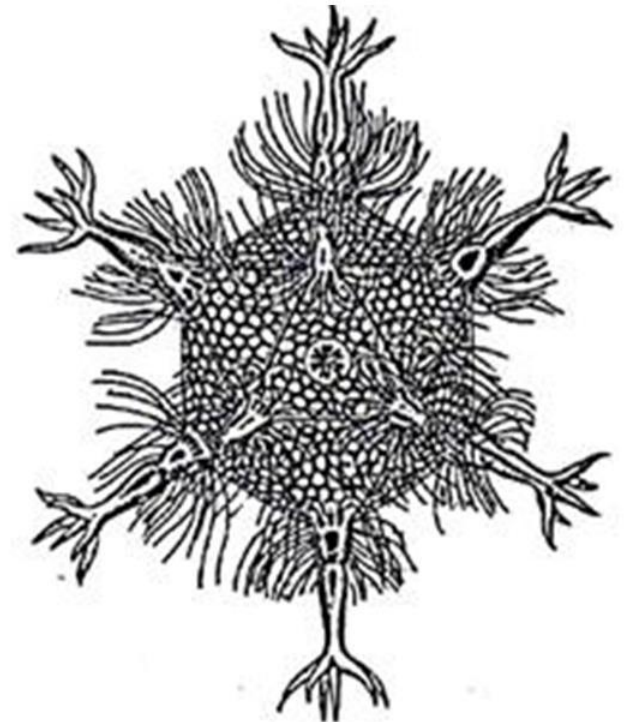
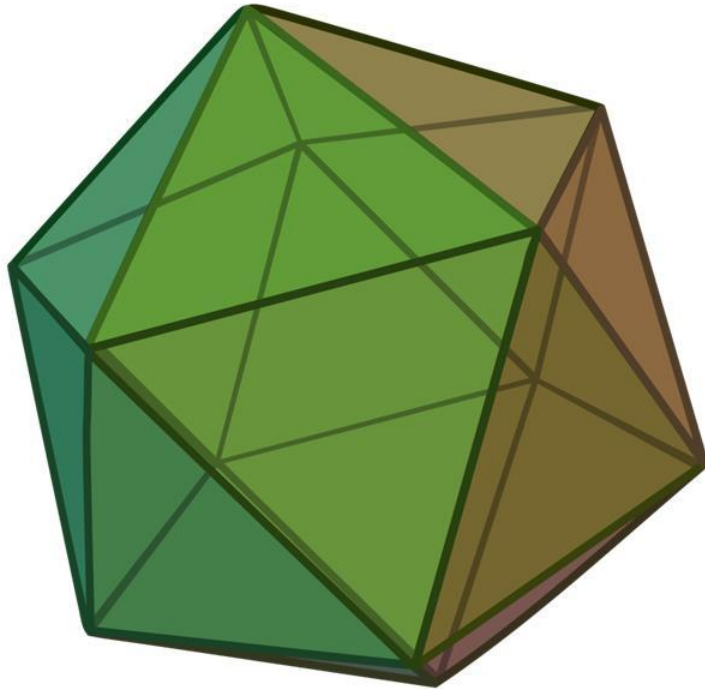


Рубин



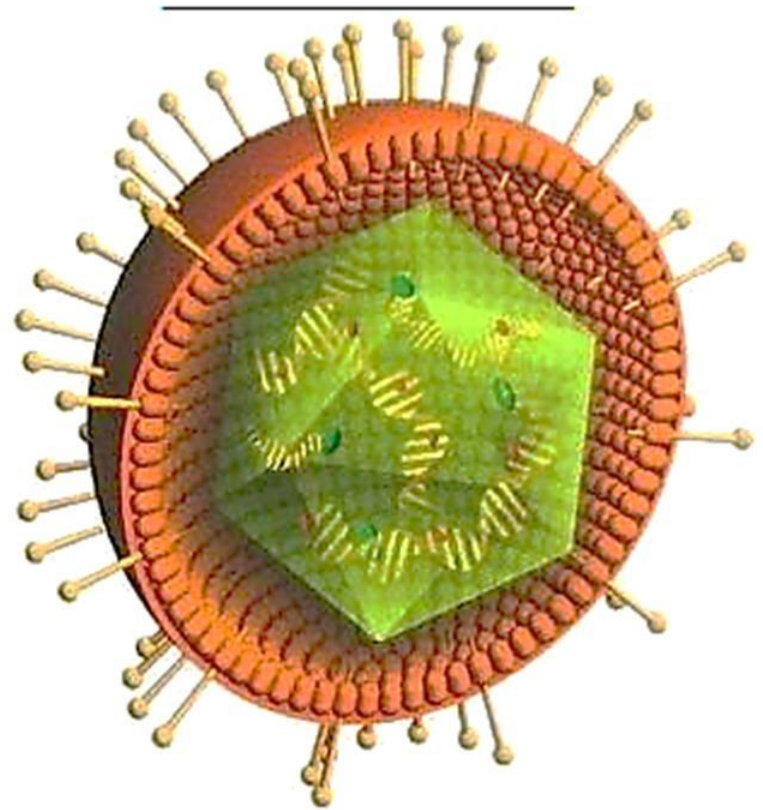
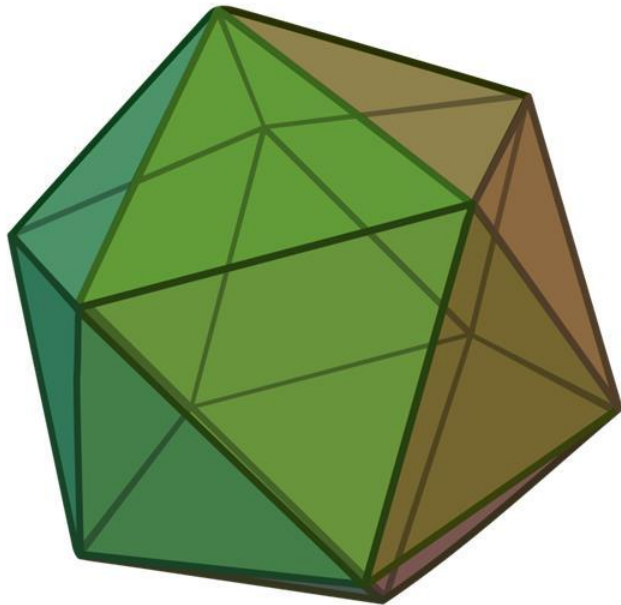
Горный хрусталь

Правильные многогранники встречаются в живой природе. Например, **скелет** одноклеточного организма **феодарии** по форме напоминает *икосаэдр*.



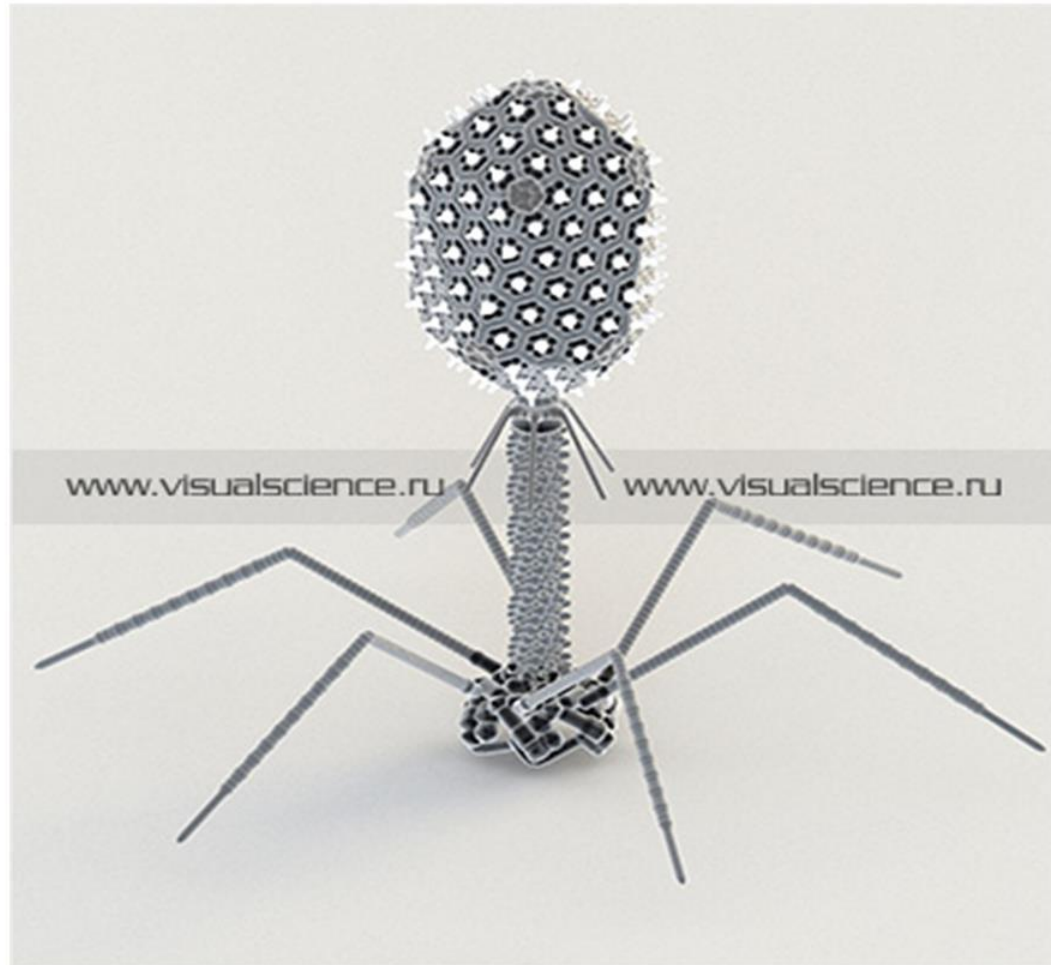
Икосаэдр

оказался в центре
внимания биологов в их
мнениях относительно
формы вирусов.



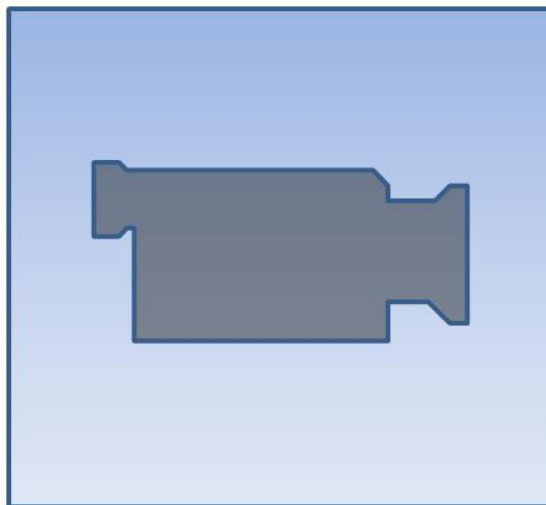
Строение вируса возбудителя краснухи

Вирусы-бактериофаги



Головка вируса-бактериофага также имеет форму икосаэдра

Обобщим знания о правильных многогранниках



Многогранники в архитектуре

Александрийский маяк



В 285 году до н.э. на острове Фарос был построен маяк. Он строился пять лет и получился в виде трехэтажной башни высотой 120 метров. В основании он был квадратом со стороной тридцать метров, первый 60-метровый этаж башни был сложен из каменных плит и поддерживал 40-метровую восьмигранную башню, облицованную белым мрамором. На третьем этаже, в круглой, обнесённой колоннами башне, вечно горел громадный костер, отражавшийся сложной системой зеркал.

Висячие сады Семирамиды



Дворец Навуходоносора был построен для его жены Семирамиды. Пять дворов следовали один за другим с востока на запад.

Висячие сады украшали северо-западную часть дворца. На арках из кирпичика были расположены террасы, напоминающие уступы гор, на которых были посажены деревья, кусты и цветы. Издали казалось, что эти сады как бы висят в воздухе.

Галикарнасский мавзолей



Лучшие архитекторы того времени построили мавзолей в виде почти квадратного здания, первый этаж которого был собственно усыпальницей. Во втором этаже, окруженном колоннадой, хранились жертвоприношения, крышей же мавзолея служила пирамида.

Египетские пирамиды



Башня Сююмбике



Башня Сююмбике находится в Казани и состоит из семи ярусов, нижние ярусы представляют из себя параллелепипеды а верхние - многогранники.

Мечеть Кул-Шариф



Одна из главных мусульманских мечетей республики Татарстан и Казани. Расположена на территории Казанского кремля. Архитектура этой мечети представляет собой сочетание различных многогранников.

Башни Азриэли



Комплекс из трёх небоскрёбов и большого торгового центра (160 магазинов) у их основания в центре Тель-Авива.

В свое время уроженец Израиля Давид Азриэли, живущий в Канаде и сделавший там огромное состояние, задумал построить комплекс из трех башен – квадратной, круглой и треугольной.

Спасская башня Кремля

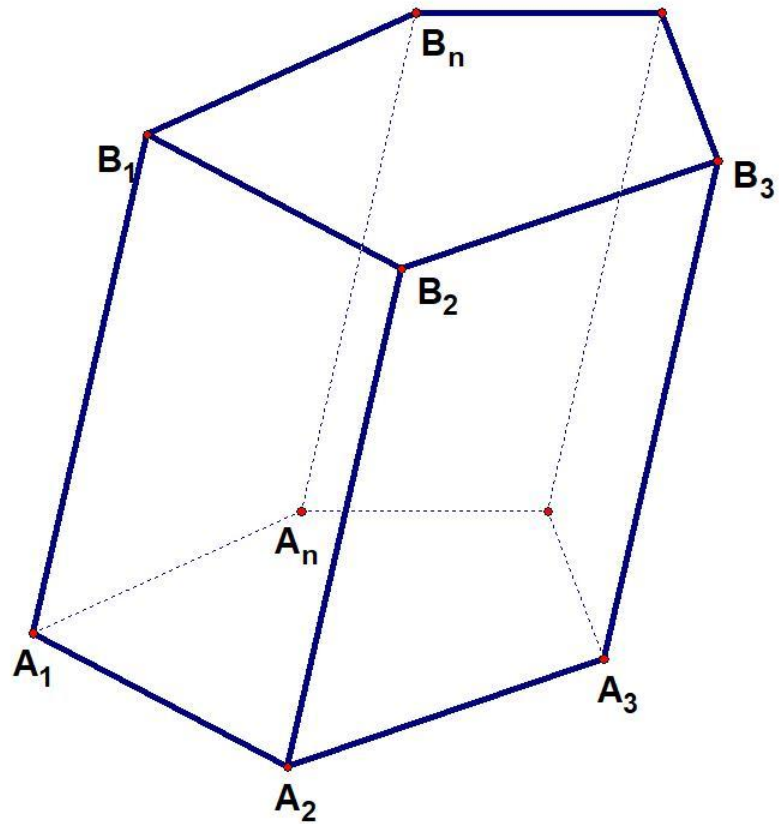


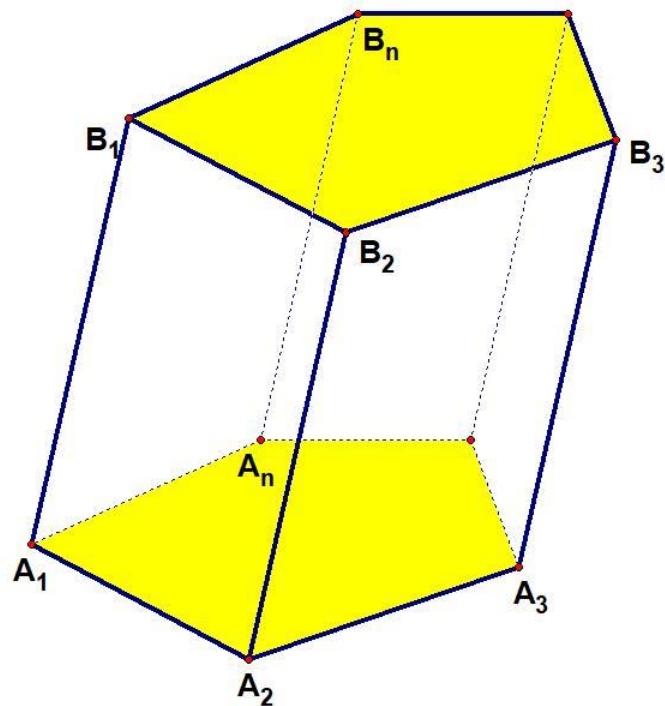
Возведена в XVI веке псковскими зодчими Иваном Ширяем и Постником Яковлевым. Башня неоднократно перестраивалась, во все века ей как главной кремлевской башне уделяли особое внимание.

Четыре яруса башни представляют из себя куб, многогранники и пирамиду.

призма

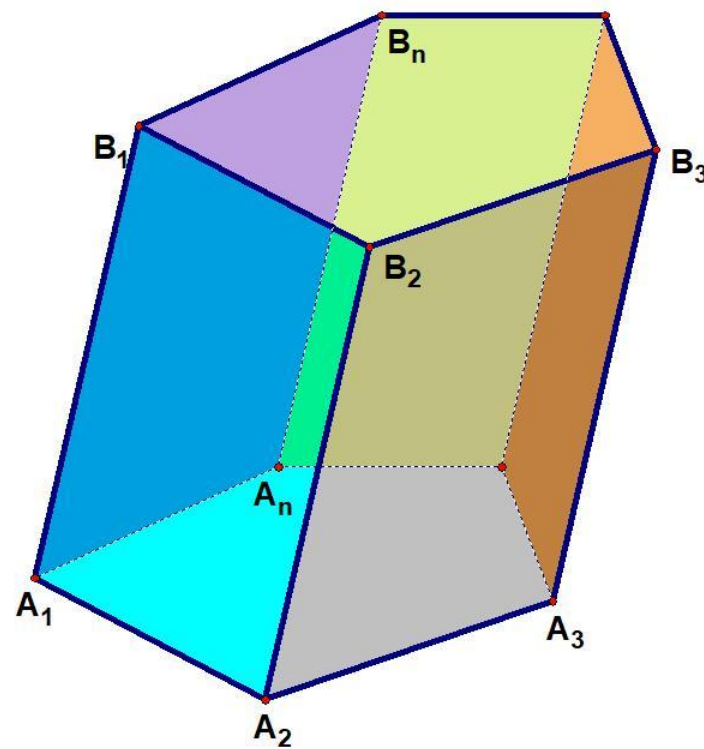
Многогранник, состоящий из двух многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников





Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ называются **основаниями** призмы,

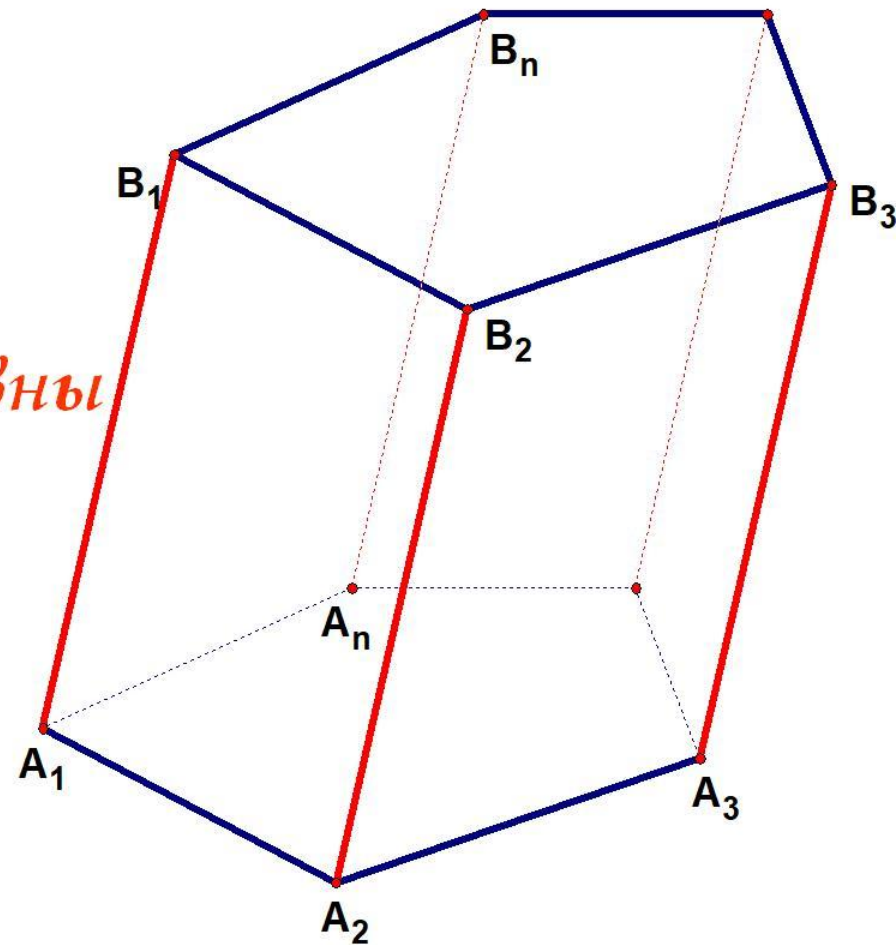
а параллелограммы – **боковыми гранями** призмы



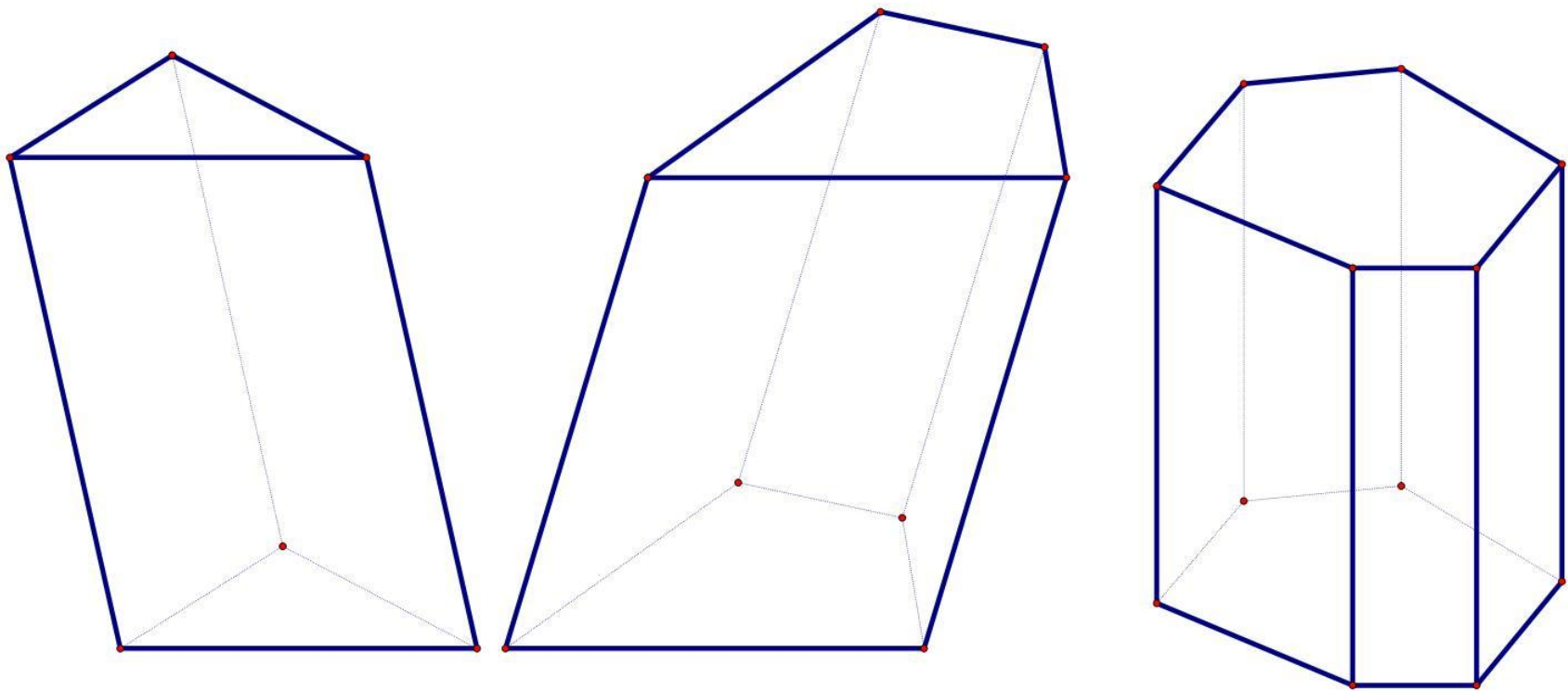
Боковые ребра призмы

Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$
называются **боковыми**
ребрами призмы

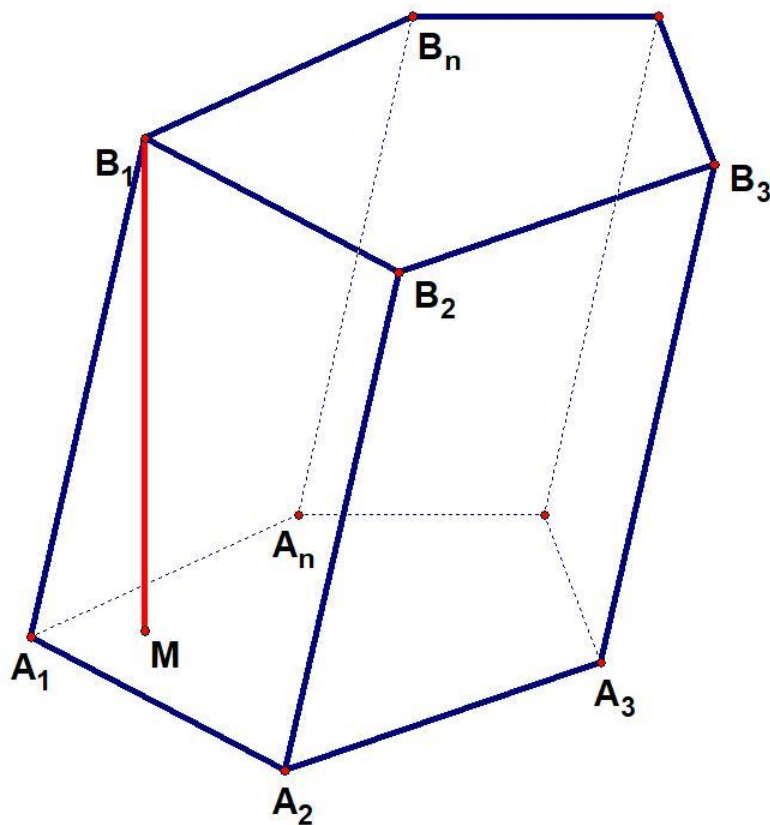
Боковые ребра призмы **равны**
и параллельны



Призму с основаниями $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ обозначают $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$ и называют *n-угольной призмой*



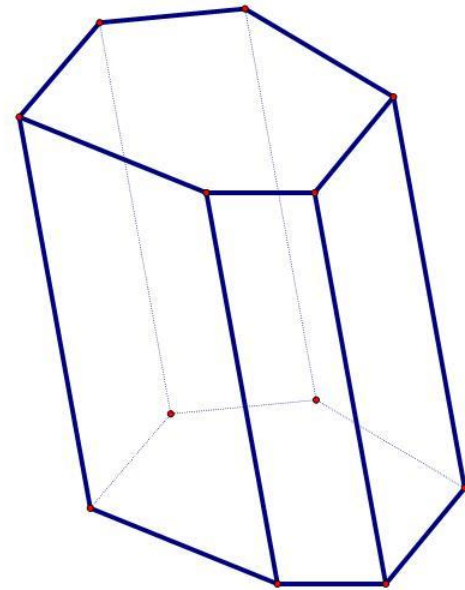
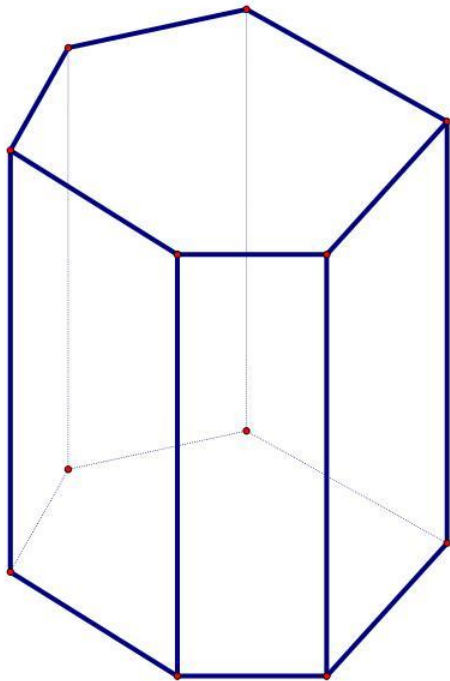
Высота призмы



Перпендикуляр,
проведенный из какой-
нибудь точки одного
основания к плоскости
другого основания,
называется **высотой**
призмы

$$B_1M \perp (A_1A_2A_3)$$

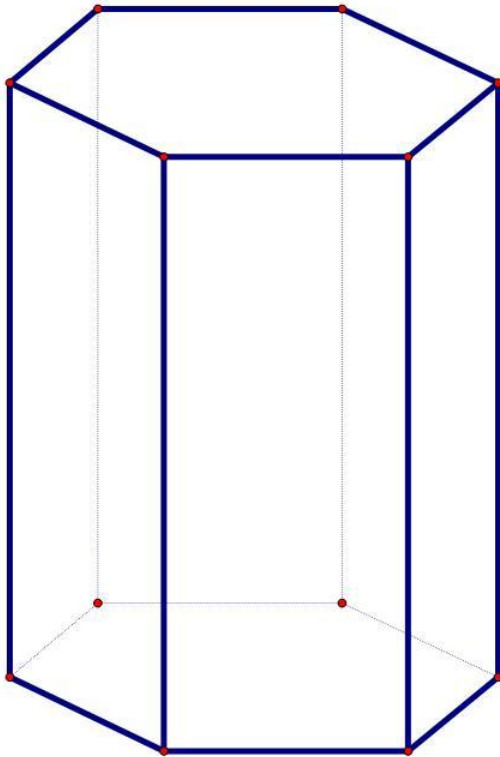
Прямая и наклонная призмы



Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае – **наклонной**.

Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

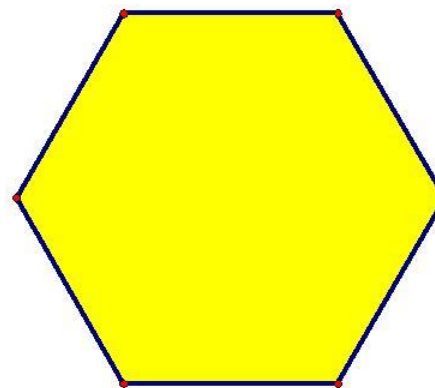
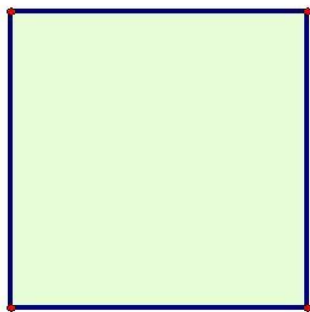
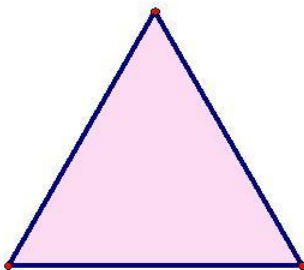
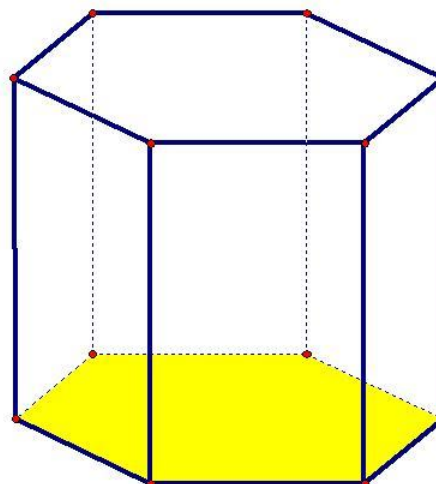
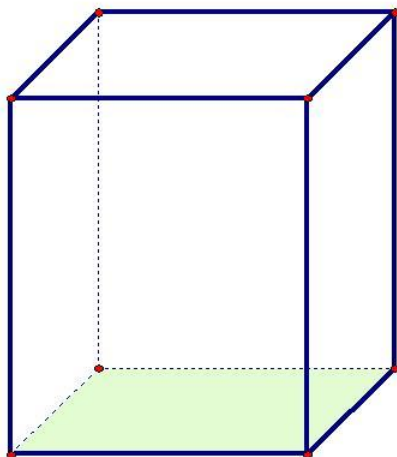
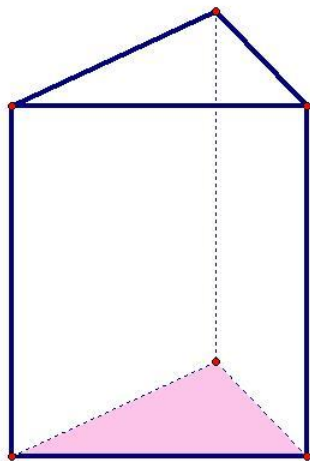
Правильная призма



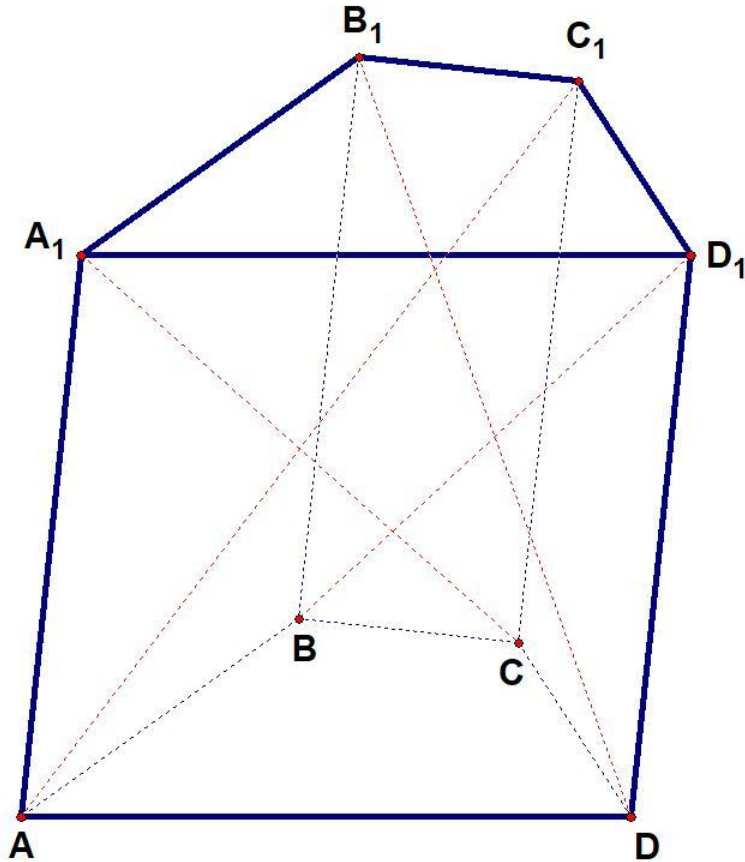
Прямая призма называется **правильной**, если её основания - правильные многоугольники.

У правильной призмы все боковые грани - равные прямоугольники

Правильные призмы



Диагонали призмы

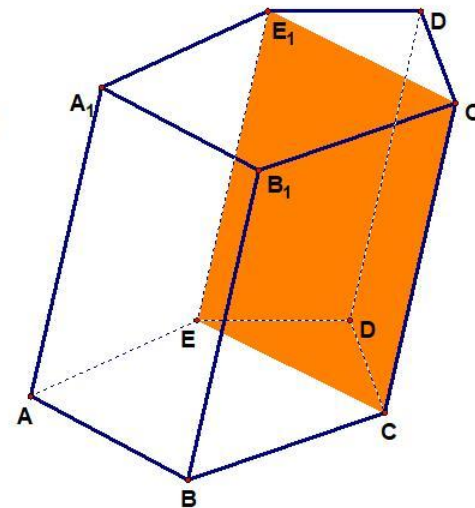
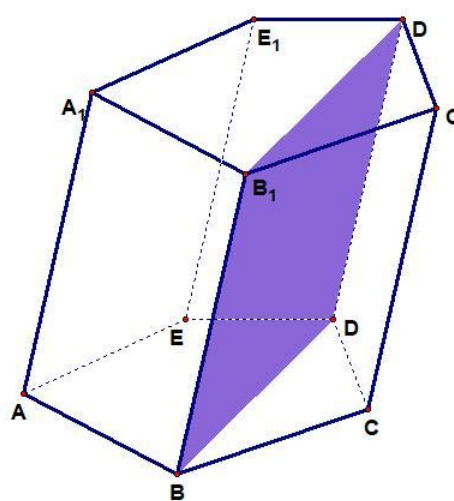
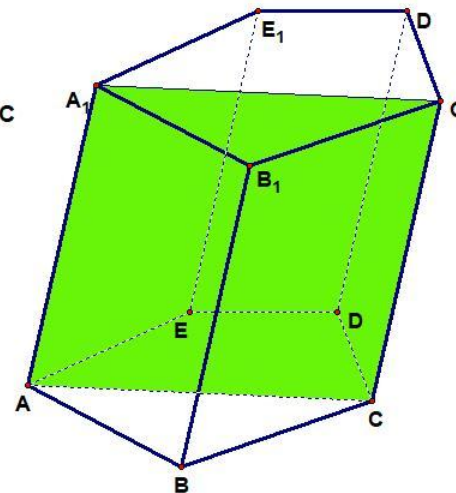
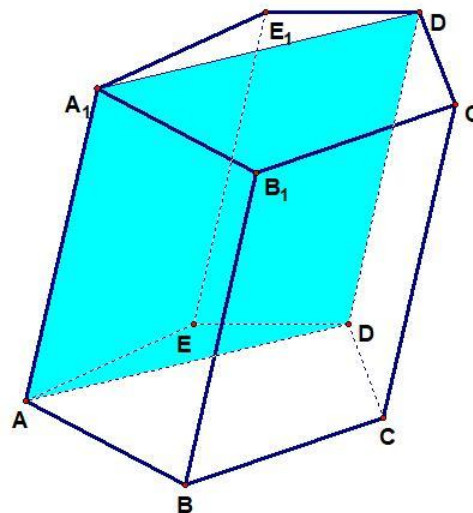


Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины, **не принадлежащие одной грани**

Диагональные сечения призмы

Сечения призмы плоскостями, проходящими через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, называются **диагональными сечениями**

Диагональные сечения призмы являются **параллелограммами**



Площадь поверхности призмы

Площадью **полной поверхности** призмы называется сумма площадей всех её граней ($S_{\text{полн}}$)

Площадью **боковой поверхности** призмы называется сумма площадей её боковых граней ($S_{\text{бок}}$)

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

Теорема о площади боковой поверхности прямой призмы

Площадь *боковой поверхности* прямой призмы равна произведению *периметра основания* на *высоту* призмы

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H$$