

Простейшие задачи в координатах

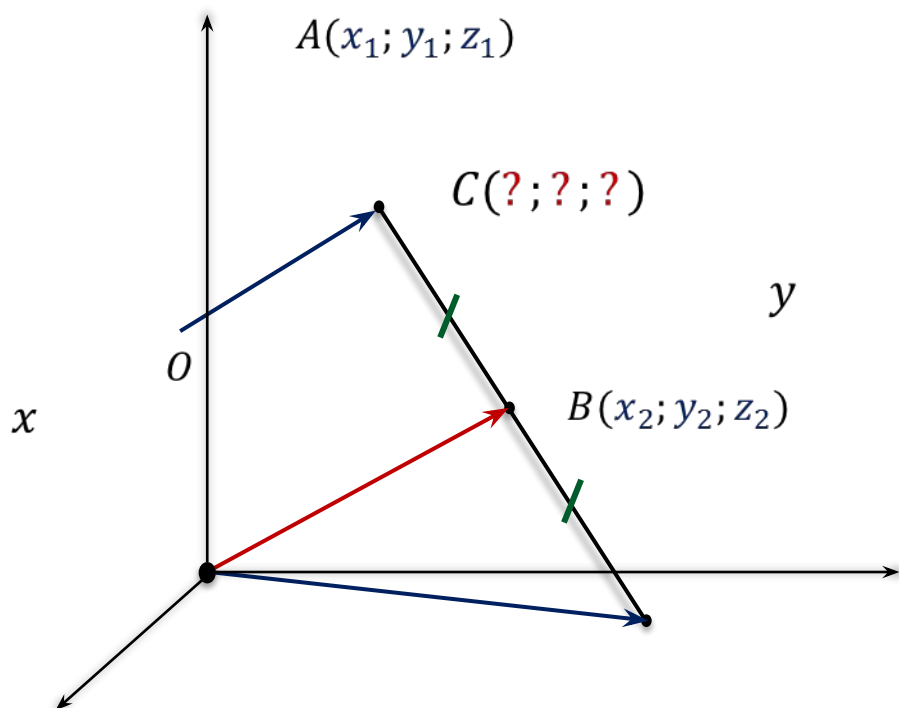
Сегодня на уроке:

- ✓ Вычисление координат середины отрезка.
- ✓ Вычисление длины отрезка по его координатам.
- ✓ Вычисление расстояния между двумя точками.

1. Определение координат середины отрезка

z

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$



\vec{OA} — радиус-вектор точки A

\vec{OB} — радиус-вектор точки B

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

$$\vec{OA} = \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{OB} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right\}$$

$$\vec{OC} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Задача. Точка M – середина отрезка AB .

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{0 + (-2)}{2} \\ y = \frac{3 + 2}{2} \\ z = \frac{-4 + 0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2,5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \\ y_2 = \\ z_2 = \end{cases}$$

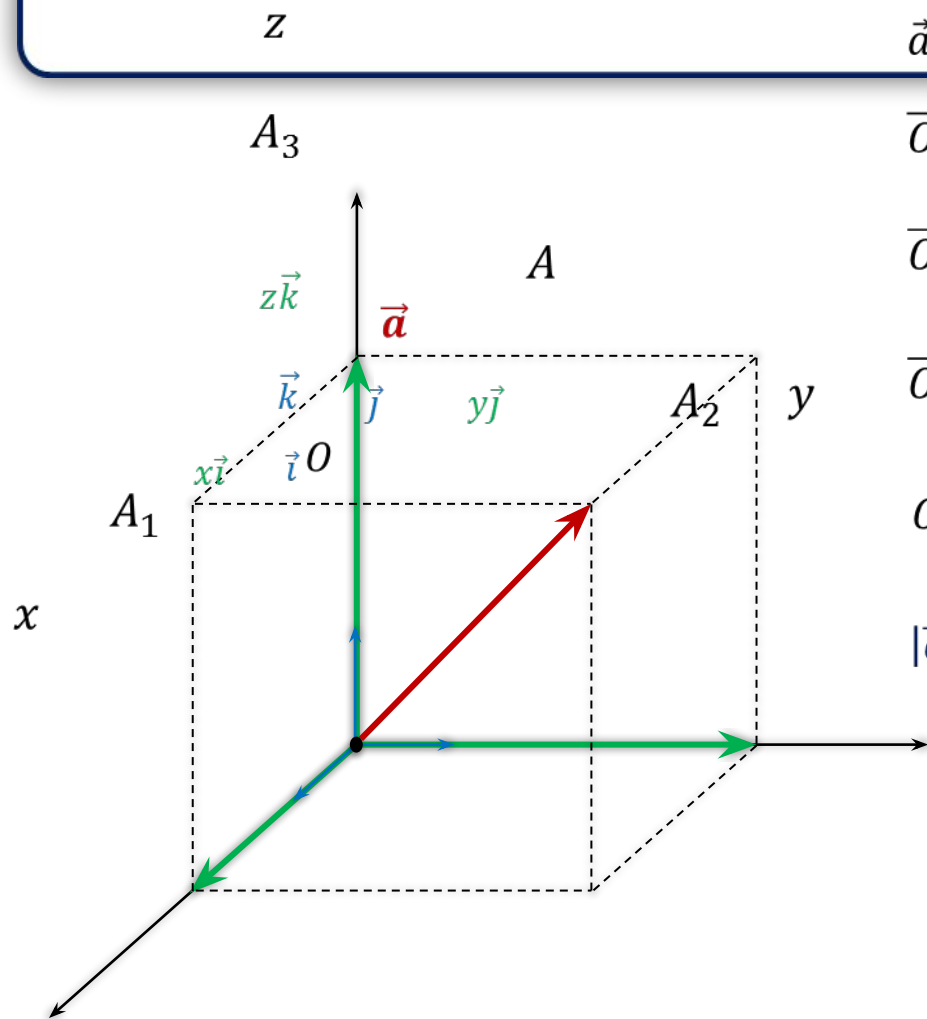
$$\begin{cases} x_2 = 2 \cdot 3 - 14 \\ y_2 = 2 \cdot (-2) - (-8) \\ z_2 = 2 \cdot (-7) - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \cdot (-12) - 0 \\ y_1 = 2 \cdot 3 - 0 \\ z_1 = 2 \cdot 15 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = -19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -24 \\ y_1 = 8 \\ z_1 = 28 \end{cases}$$

2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора $\vec{a} \{x; y; z\}$ равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.



$$\vec{a} \{x; y; z\} \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \quad \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \quad \overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| = OA$$

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Задача. Вычислить длину вектора \overrightarrow{AB} .

а) $A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$;

б) $A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8)$.

$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

а) $A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$

Решение.

$$\overrightarrow{AB} \{1 - (-1); -2 - 0; 3 - 2\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{2; -2; 1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 3$$

б) $A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8)$

$$\overrightarrow{AB} \{-34 - (-35); -5 - (-17); 8 - 20\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{1; 12; -12\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 144 + 144}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{289}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 17$$

Задача. Вычислить длины векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} и \vec{m} .

$$\vec{a} \{5; -1; 7\}$$

$$\vec{b} \{2\sqrt{3}; -6; 1\}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{d} = 2\vec{k}$$

$$\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

Решение.

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| \{2\sqrt{3}; -6; 1\}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{12 + 36 + 1} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{c} \{1; 1; 1\}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{d} = 2\vec{k} \Rightarrow \vec{d} \{0; 0; 2\}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{m} \{1; -2; 0\}$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$$

3. Определение расстояния между двумя точками

$M_1(x_1; y_1; z_1)$

d

$M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = M_1M_2 = d$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Задача. По координатам точек A , B и C определить вид $\triangle ABC$.

а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$

б) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$

а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$

Решение.

$$AB = \sqrt{(2 - 9)^2 + (10 - 3)^2 + (-5 - (-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 0^2} = 7\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - 10)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{0^2 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2 - 9)^2 + (3 - 3)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ — правильный

Задача. По координатам точек A , B и C определить вид $\triangle ABC$.

а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$

б) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$

б) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$

Решение.

$$AB = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-3 - 7)^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 6^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

$$BC = \sqrt{(1 - 5)^2 + (3 - (-3))^2 + (-10 - 2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = \sqrt{196} = 14$$

$$AC = \sqrt{(1 - 3)^2 + (3 - 7)^2 + (-10 - (-4))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\sqrt{196}^2 = \sqrt{140}^2 + \sqrt{56}^2$$

$$196 = 140 + 56$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ – прямоугольный, разносторонний

$$196 = 196$$

Задача. Найти расстояние от точки начала координат O до середины отрезка MN , если $M(-4; 7; 0)$ и $N(0; -1; 2)$.

Решение.

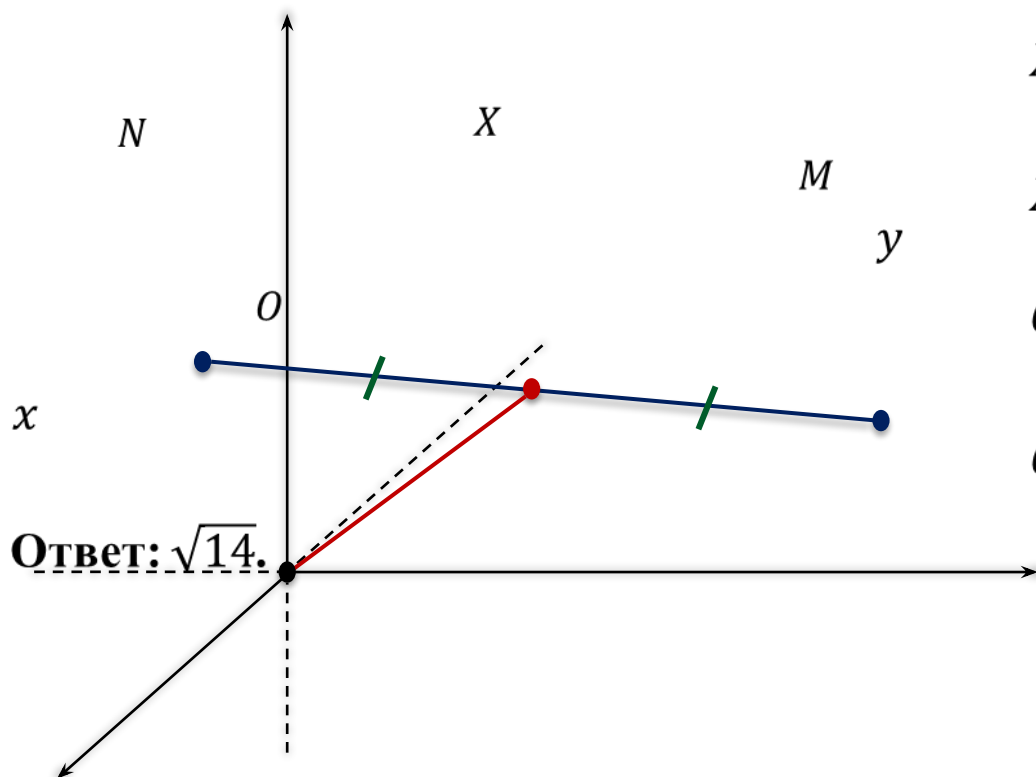
$$M(-4; 7; 0) \quad N(0; -1; 2)$$

$$X\left(\frac{-4 + 0}{2}; \frac{7 + (-1)}{2}; \frac{0 + 2}{2}\right)$$

$$X(-2; 3; 1) \quad O(0; 0; 0)$$

$$OX = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}$$

$$OX = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$



Ответ: $\sqrt{14}$.

Простейшие задачи в координатах