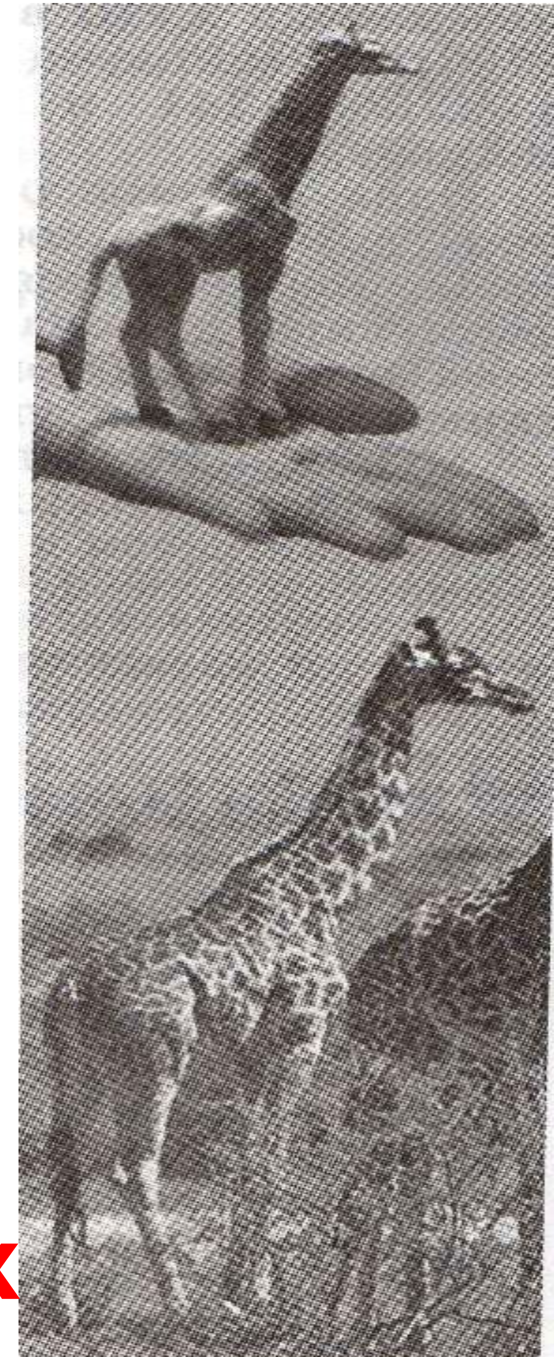
Урок

Геометрия 8 класс



Что общего на этих рисунках?

10. 05. 18.

Классная работа

Определение подобных треугольников

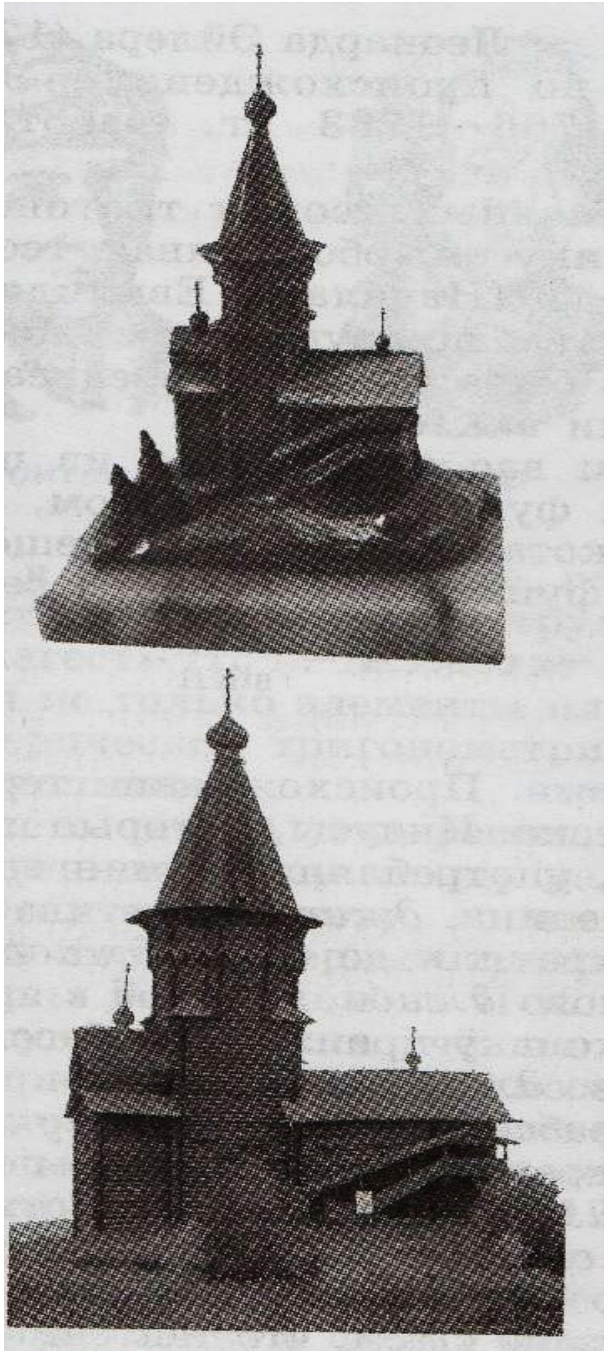
Определение

Подобные фигуры **- это фигуры, имеющие одинаковую форму, но различные размеры.**

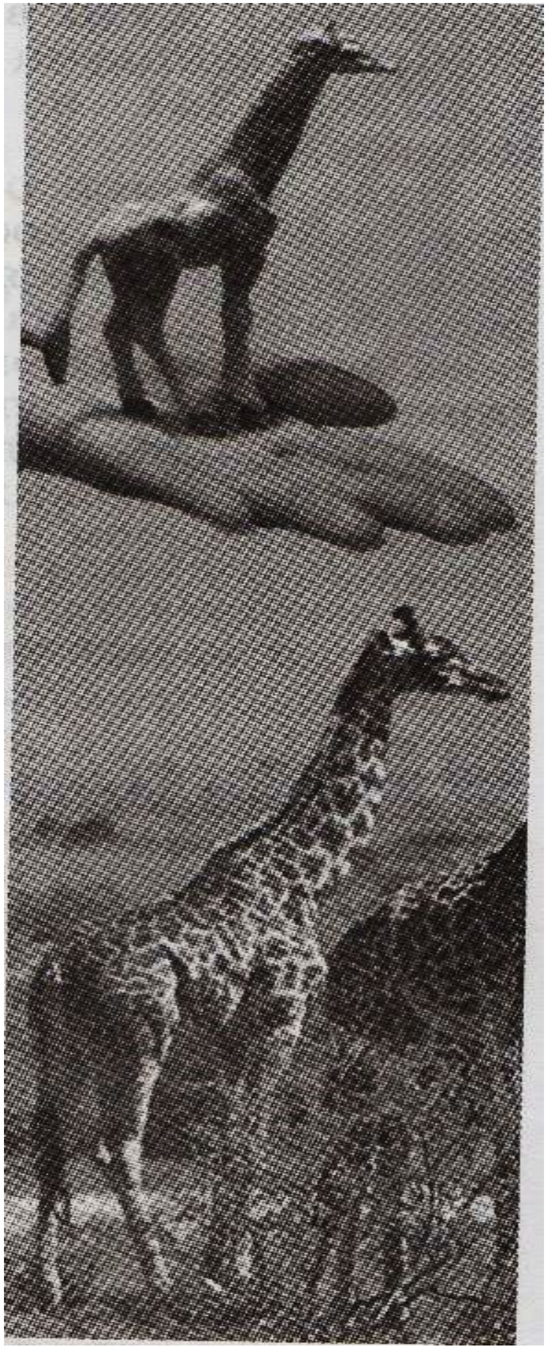
Например

Подобны две фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями.

Например



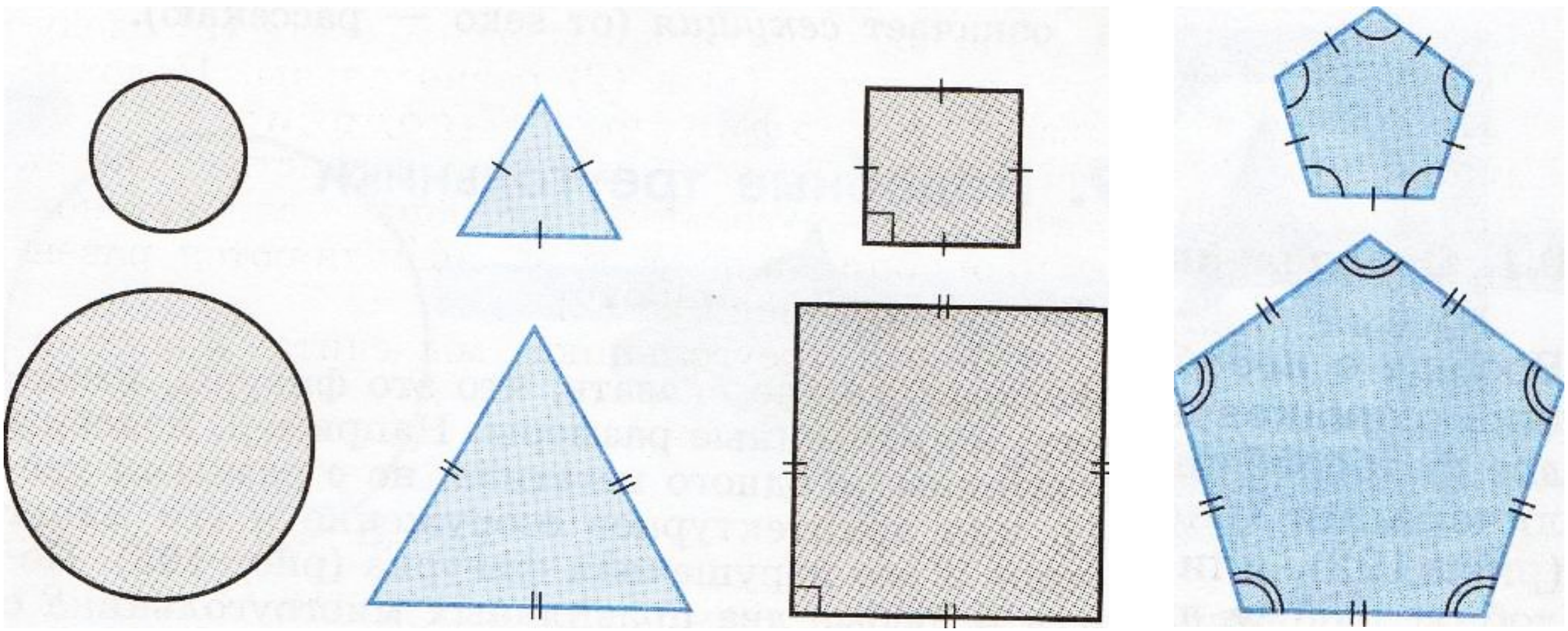
Подобны архитектурное сооружение и его макет.



Например

Подобны животное и его игрушечная фигурка .

Подобны любые два круга и любые два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон.



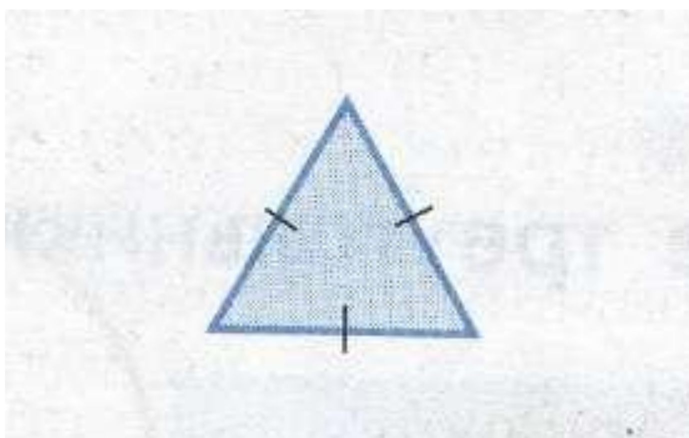
Из этих примеров можно увидеть, что соответствующие линейные размеры одной фигуры, подобной некоторой другой фигуре, в одно и то же число раз меньше или больше линейных размеров другой фигуры.

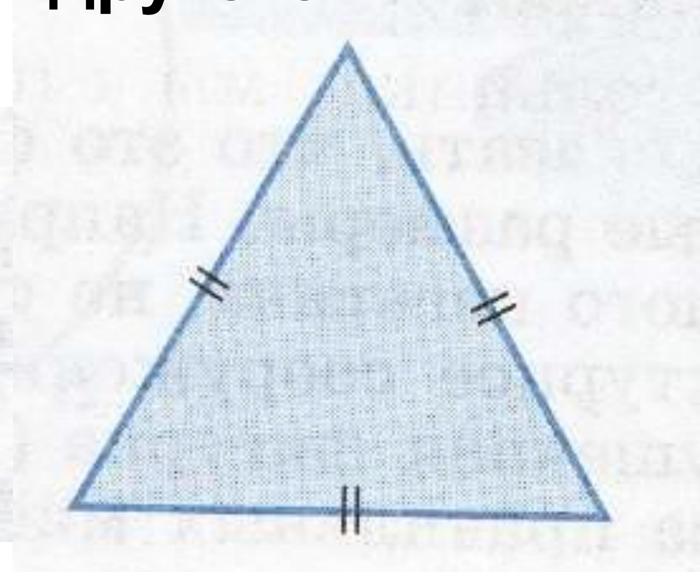
Так, на коробках игрушечных моделей самолётов указано, во сколько раз их детали меньше соответствующих деталей настоящих самолётов.

Поэтому все размеры одной из двух подобных фигур получают, умножая на некоторое число соответствующие размеры другой из них.

Определение

Два треугольника называются <u>подобными</u>, если стороны одного из них получаются из сторон другого умножением на некоторый множитель, т. е. стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.



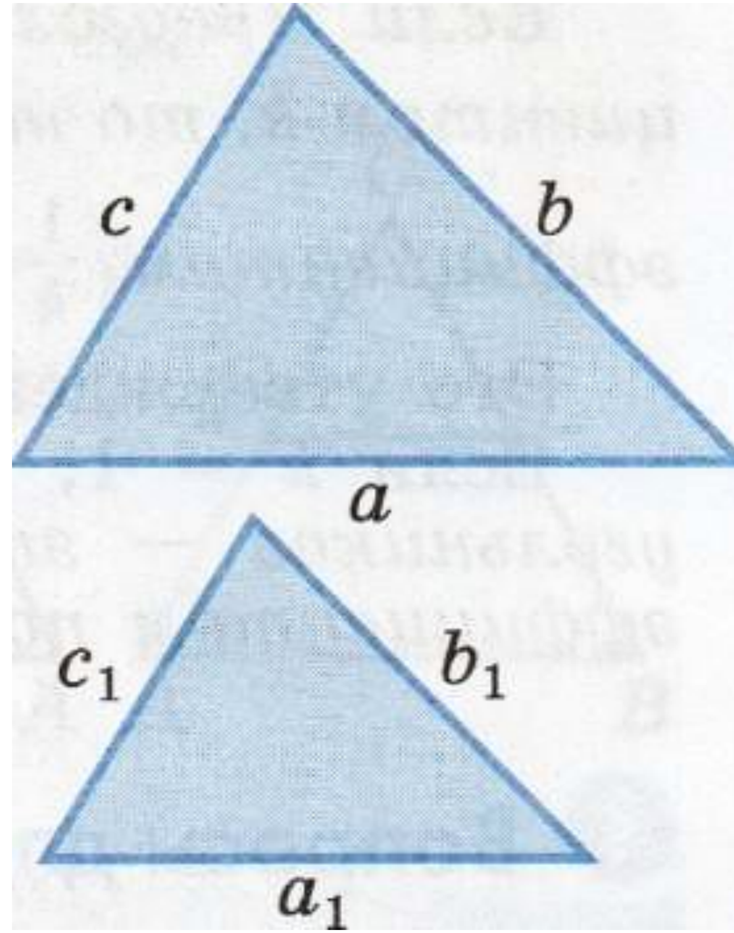


Подобными называются треугольники, у которых соответствующие стороны пропорциональны.

Подробнее: **два треугольника подобны, если можно так сопоставить их стороны,** **например обозначив стороны одного треугольника через *а, Ь, с,* а соответствующие стороны другого треугольника через a_1, b_1, c_1, что будем иметь равенства отношений соответствующих сторон,**

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}.$$

т. е.



$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k \qquad (1)$$

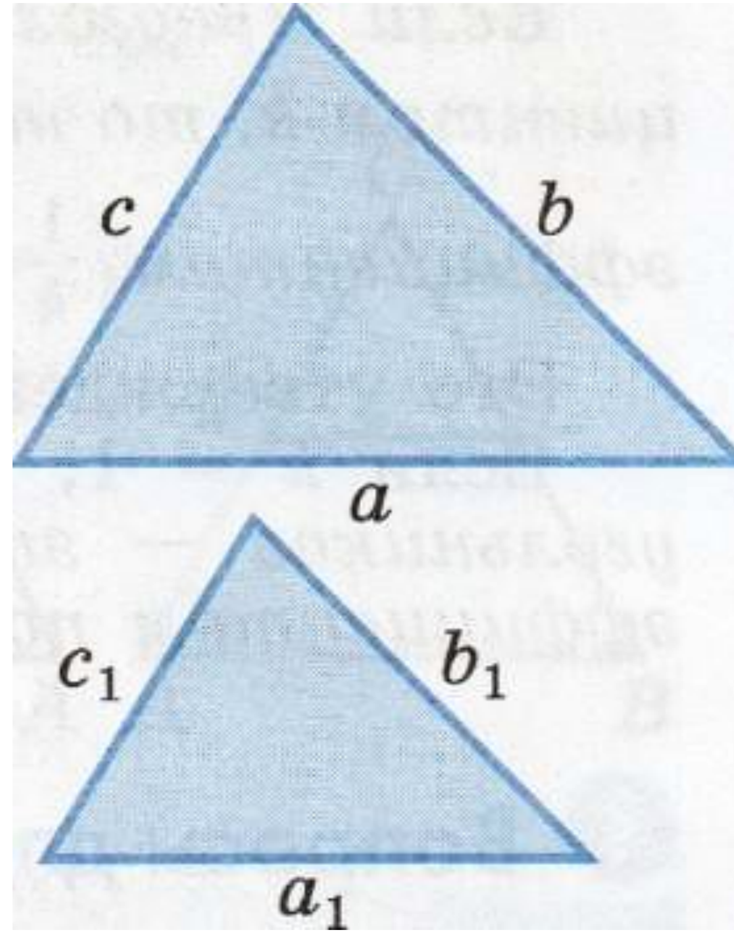
Если эти отношения обозначить через

к, то из равенств (1) получаем, что

$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc. \qquad (2)$$

Ясно, что верно и обратное утверждение: из равенств (2) следуют равенства (1). Итак, равенства (1) и (2) равносильны.
Положительное число *k* называется коэффициентом подобия.

Из подобия двух треугольников вытекают как равенства (1), так и равенства (2). Обратно: два треугольника подобны, если установлено, что их стороны пропорциональны, т. е. выполняются равенства (1) или, что равносильно,



$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

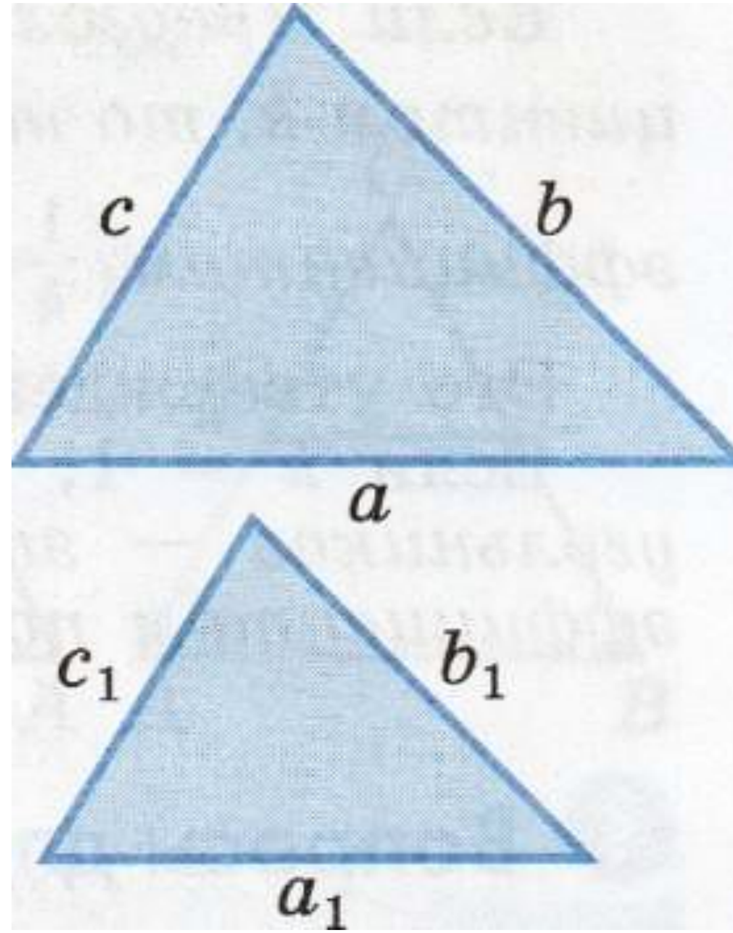
Рассматривая два подобных треугольника, мы считаем выбранными введённые здесь обозначения их сторон, а вершины треугольников, лежащие против этих сторон, обозначаем, как обычно, через A, B, C, A_1, B_1, C_1.

Итак, говорят, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, если выполняются равенства (2).

В этом случае пишут: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$.

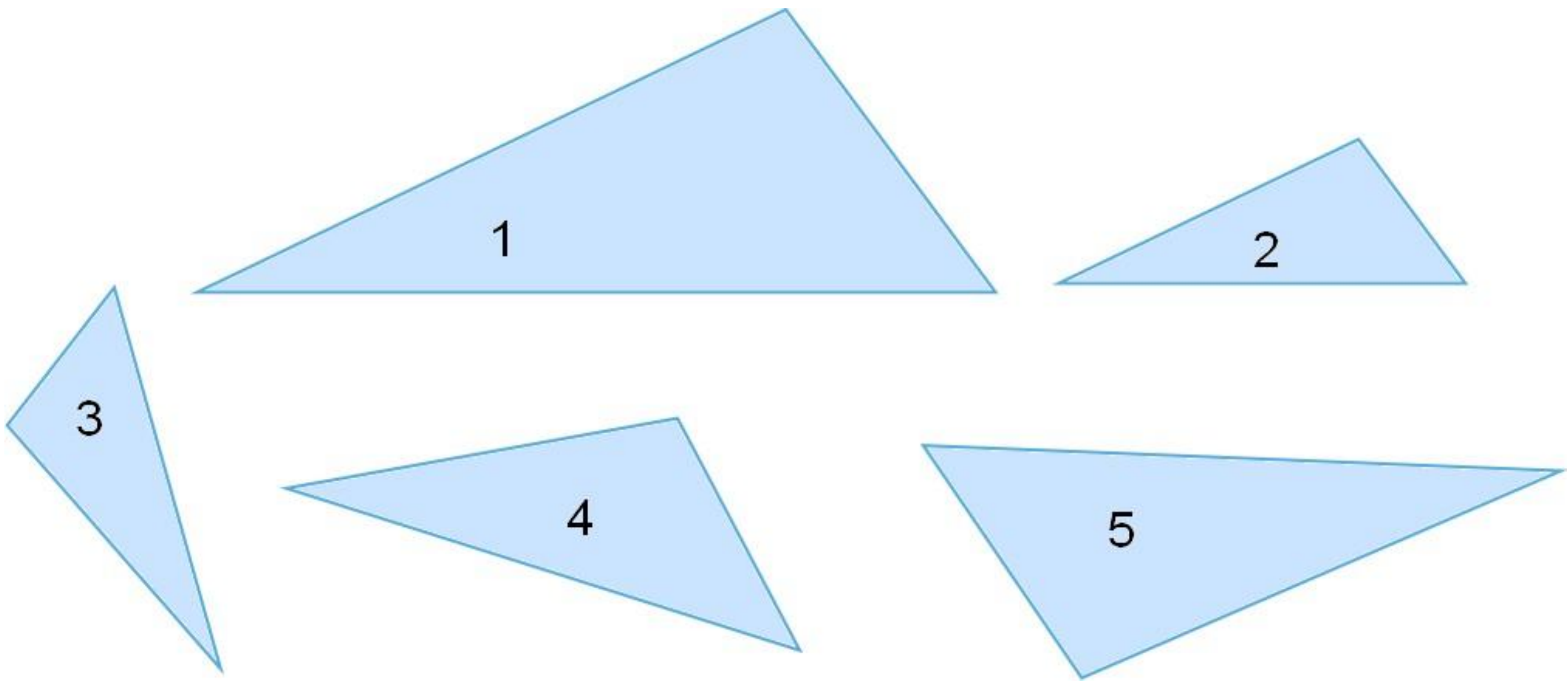
Если треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 1/k.

Это утверждение вытекает из равенств (2).

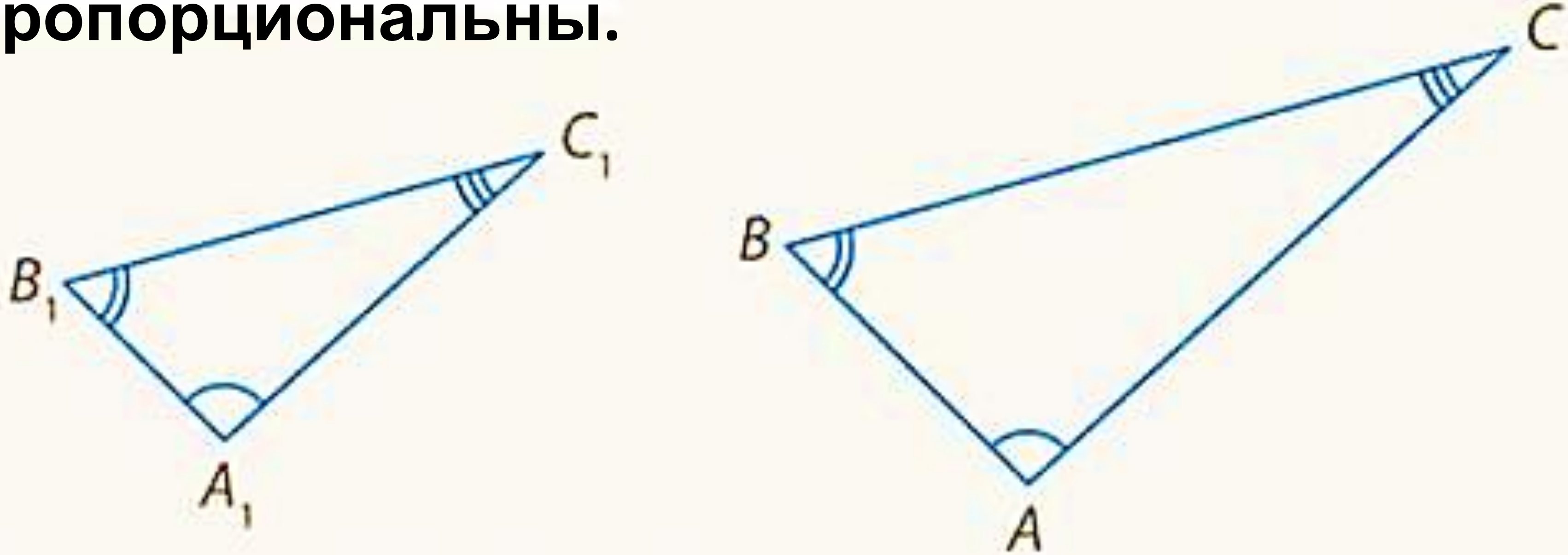


$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc.$$

Найди подобные треугольники



Подобными называются треугольники, у которых соответствующие стороны пропорциональны.



$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A_1;\ \angle B=\angle B_1;\ \angle C=\angle C_1\\ \dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$$

У подобных треугольников соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Если к = 1, то треугольники равны. Поэтому равенство треугольников — это частный случай подобия треугольников (с коэффициентом подобия, равным единице).

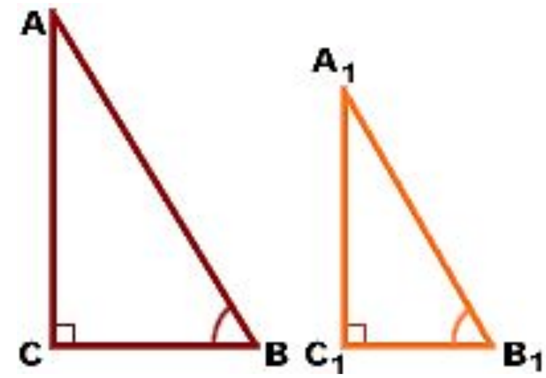
Вопросы для самоконтроля

1. Какие фигуры называются подобными?
2. Какие треугольники называются подобными?
3. Что такое коэффициент подобия?
4. Верно ли, что равные треугольники подобны? Равны ли подобные тре угольники?

Дополняем теорию

№ 9.1; № 9.2; № 9.3

№ 9.1



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$ и $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle C_1 = 90°$;
$\angle A = \angle A_1$

Д - ть: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$;

Д – во :

1) Т. к сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна
$90°$, то $\angle B = \angle B_1$.

2) tg $A = BC : AC$, tg $A_1 = B_1C_1 : A_1C_1$.
Т. к $\angle A = \angle A_1$, то $BC : AC = B_1C_1 : A_1C_1$.
Следовательно $BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$

3) sin $A = BC : AB$, sin $A_1 = B_1C_1 : A_1B_1$.
Т. к $\angle A = \angle A_1$, то $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$.
Следовательно $BC : B_1C_1 = AB : A_1B_1$.

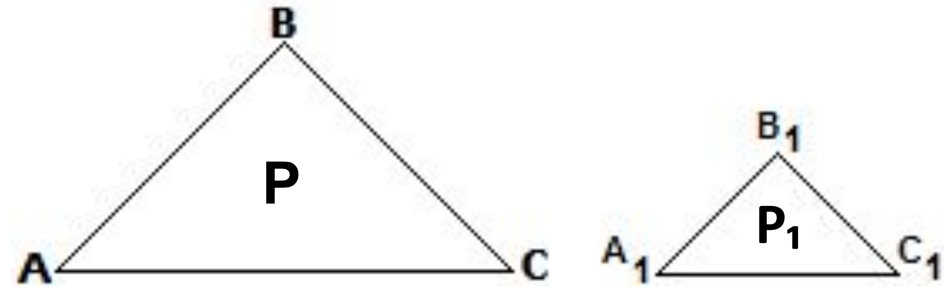
4) $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$.
Следовательно $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

№ 9.2

Дано: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

Д - ть: $P = kP_1$

Д – во :



1) По определению подобных треугольников их соответственные стороны пропорциональны:

$AB = k \cdot A_1B_1$

$BC = k \cdot B_1C_1$

$AC = k \cdot A_1C_1$

2) Периметр Δ ABC равен сумме длин его трёх сторон:

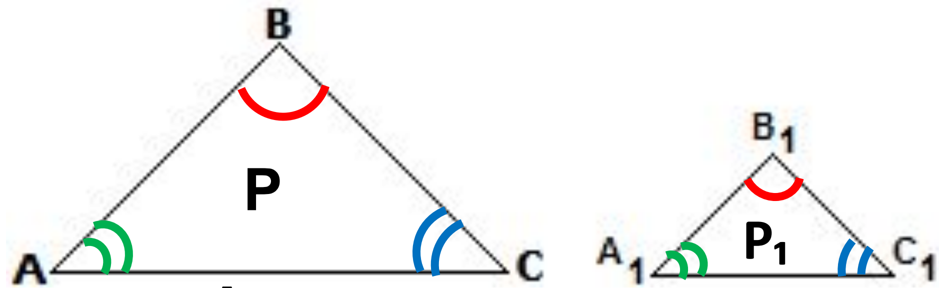
$AB + BC + AC = k \cdot (A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)$

3) Сумма в скобках в правой части равенства представляет собой периметр $\Delta A_1B_1C_1$. Разделим обе части равенства на периметр $A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1$.

Получаем:

$$\frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k$$

№ 9.2(а)



$\angle A = \angle C$

$\angle A_1 = \angle C_1$

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ - равнобедренные,

$\angle B = \angle B_1$.

Д - ть: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Д – во :

1) Так как $\angle B = \angle B_1$, то $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$

2) По теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$ и $\dfrac{B_1C_1}{\sin A_1} = \dfrac{A_1C_1}{\sin B_1} = \dfrac{A_1B_1}{\sin C_1}$

$\sin A : \sin C = BC : AB$ и $\sin A_1 : \sin C_1 = B_1C_1 : A_1B_1$

$\sin A : \sin B = BC : AC$ и $\sin A_1 : \sin B_1 = B_1C_1 : A_1C_1$

3) Так как $\angle A = \angle A_1 = \angle C = \angle C_1$, то синусы этих углов равны, т. е

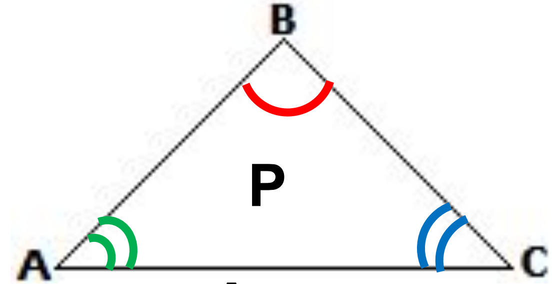
$BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$ и $BC : AC = B_1C_1 : A_1C_1$

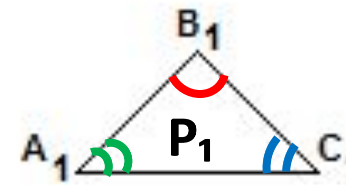
Получаем $BC : B_1C_1 = AB : A_1B_1$

$BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$ $\Rightarrow$ $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$ $\Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

№ 9.2(б)





$\angle A = \angle C$

$\angle A_1 = \angle C_1$

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ - равнобедренные,

$\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$

Д - ть: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Д – во :

1) Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\angle B = \angle B_1$

2) По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ и $\frac{B_1C_1}{\sin A_1} = \frac{A_1C_1}{\sin B_1} = \frac{A_1B_1}{\sin C_1}$

$\sin A : \sin C = BC : AB$ и $\sin A_1 : \sin C_1 = B_1C_1 : A_1B_1$

$\sin A : \sin B = BC : AC$ и $\sin A_1 : \sin B_1 = B_1C_1 : A_1C_1$

3) Так как $\angle A = \angle A_1 = \angle C = \angle C_1$, то синусы этих углов равны, т. е

$BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$ и $BC : AC = B_1C_1 : A_1C_1$

Получаем $BC : B_1C_1 = AB : A_1B_1$

$BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$

$\Rightarrow$ $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$ $\Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

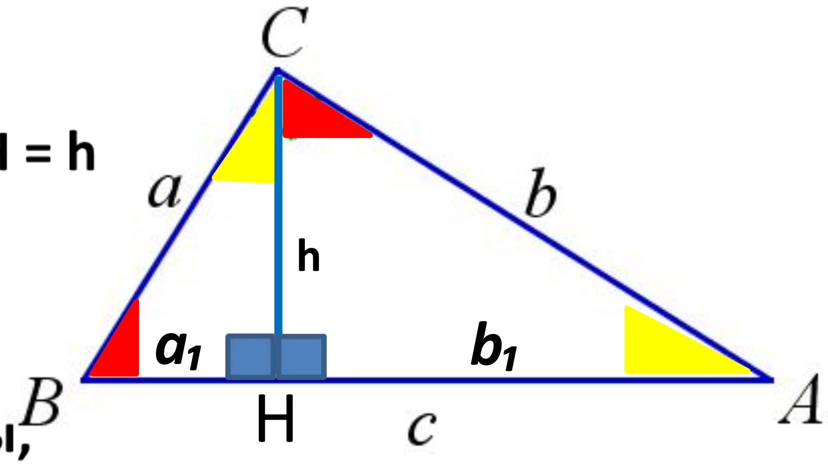
№ 9.8

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$; $BC = a$, $AC = b$, $CH = h$

Д - ть: $a^2 = a_1 \cdot c$; $b^2 = b_1 \cdot c$; $h^2 = a_1 \cdot b_1$;

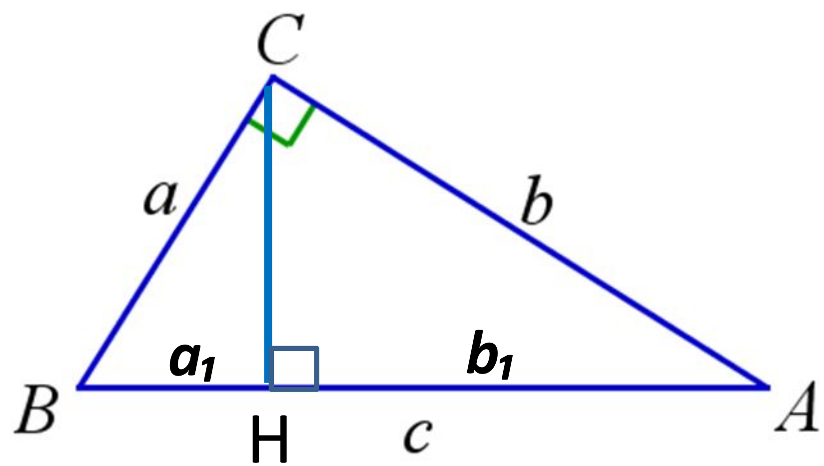
Д – во :

Прямоугольные треугольники, имеющие соответственно равные углы, подобны.



1) $\Delta ABC \backsim \Delta CBH \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BC}{BH} = \dfrac{AC}{CH}$, т. t

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow a^2 = a_1 \cdot c$



2) $\Delta ABC \backsim \Delta ACH \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BC}{CH} = \dfrac{AC}{AH}$, т. E

$\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{h} = \dfrac{b}{b_1} \Rightarrow b^2 = b_1 \cdot c$

3) $\Delta CBH \backsim \Delta ACH \Rightarrow \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{CH}{AH}$, т. E

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{h} = \dfrac{h}{b_1} \Rightarrow h^2 = a_1 \cdot b_1$