Свойства педального треугольника. Точка Брокара

Выполнила работу: ученица 10 «а» класса

МКОУ «Исилькульский общеобразовательный лицей» Хованская Екатерина

Преподаватель: Федотова Татьяна Николаевна

- ***Актуальность исследования*** *обусловлена ежегодным усложнением заданий ЕГЭ, что требует углубленных знаний не только в алгебре, но и геометрии.*
- ***Цель:*** *Рассмотреть теоретические аспекты педального треугольника, точки Брокара и их практическое применение.*

Задачи:

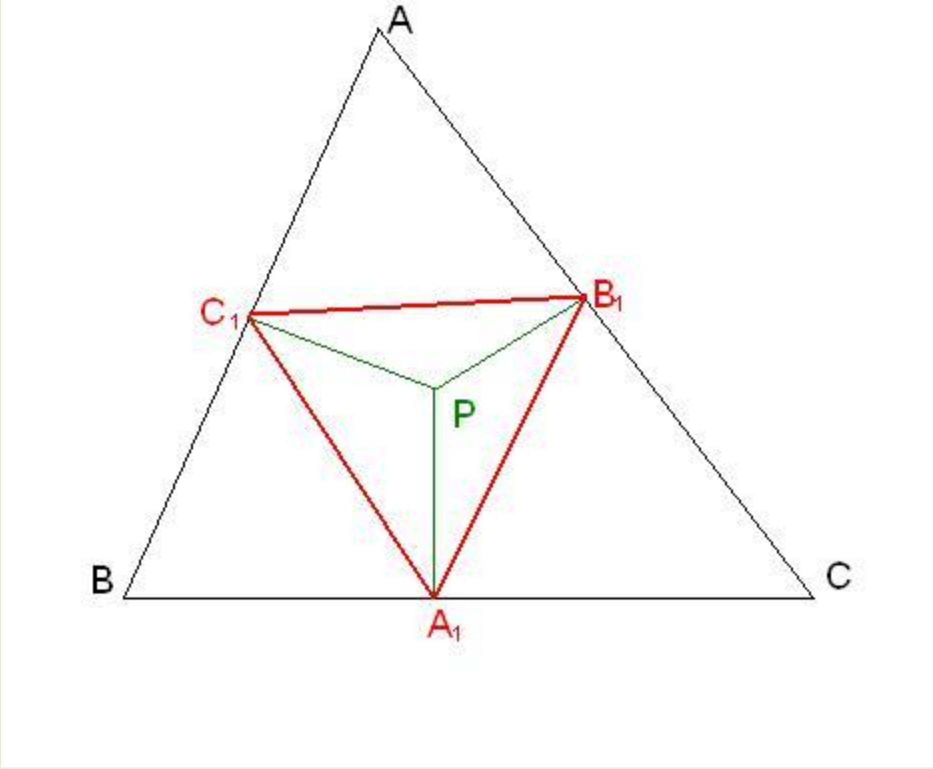
- *Дать общую характеристику треугольнику как геометрической фигуры.*
- *Рассмотреть педальный треугольник как разновидность треугольника, точку Брокара.*
- *Показать практическое применение свойств педального треугольника и расположения точки Брокара.*

- ***Объект исследования***: *треугольник - как геометрическая фигура.*
- ***Предмет исследования***: *свойства педального треугольника.*
- ***Гипотеза:*** *если выяснить свойства педального треугольника, месторасположение точки Брокара и овладеть ими, то возникает объективная возможность для решения задач повышенной сложности.*

Педальный треугольник как разновидность треугольника. Точка Брокара

$$\sin^2 \varphi = \frac{4S^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

$$S_1 = \frac{4S^3}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$



Свойства педального треугольника и их применение в решении задач

1^0. Если расстояние от педальной точки до вершины треугольника ABC равны x, y, z, то длины сторон педального треугольника равны $\frac{\grave{a}\tilde{o}}{2R},\frac{by}{2R},\frac{cz}{2R}$***,где R–радиус описанной окружности.***

2^0. Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной окружности.

Свойства педального треугольника и их применение в решении задач

- ***3^0. Если из точки L внутри треугольника опущены перпендикуляры l_a, l_b, l_c, соответственно на стороны a, b, c треугольника, то*** $\frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}=1$
- ***5^0. Третий педальный треугольник подобен исходному.***

Свойства педального треугольника и их применение в решении задач

- ***4^0. Перпендикуляры, опущенные их точки, лежащей в плоскости треугольника, на его стороны, определяют на сторонах шесть отрезков так, что сумма квадратов трех отрезков, не имеющих общих концов, равна сумме квадратов других трех отрезков.***

Задачи о педальном треугольнике, месторасположении точки Брокара

- ***Задача 4***. Найти площадь педального треугольника точки Брокара, если стороны треугольника равны 4, 7 и 5 см.
- Решение.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8\cdot4\cdot1\cdot3}=4\sqrt{6}$$

$$S_1=\frac{4\left(4\sqrt{6}\right)^3}{16\cdot49+49\cdot25+16\cdot25}=\frac{256\sqrt{6^3}}{784+1225+400}=\frac{3762}{2409}\approx1{,}57$$

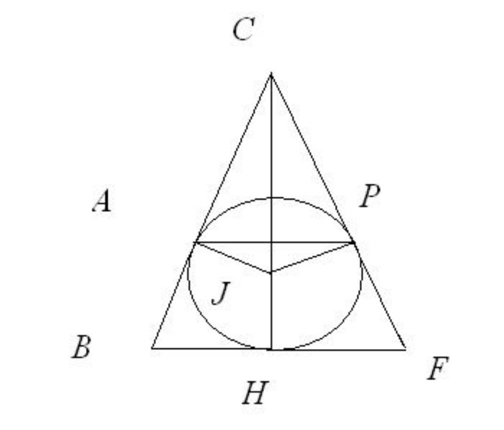
Терминологический словарь.

Педальный треугольник - *треугольник, вершинами которого является основания перпендикуляров, опущенных из точки, находящейся внутри треугольника. А сама эта точка называется* ***педальной точкой.***

Если педальную точку взять на описанной окружности, то основания перпендикуляров, опущенных от данной точки к сторонам треугольника, лежат на одной прямой, которая называется ***прямой Симсона****.*

Точкой Брокара *называется такая педальная точка, которая при соединении с вершинами треугольника образует равные чередующиеся углы. А такие углы называются* ***углами Брокара.***

Задача 7. *Основание равнобедренного треугольника равно 36. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках А и Р, АР=12. Найдите периметр этого треугольника*



Решение.

I способ

Пусть BCF – равнобедренный треугольник с основанием BF. Проведем высоту CH. Тогда $BH=HF$ и $BF=2BH=36$. Следовательно, $FH=BH=18$. Тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, $AB=BH=HF=FP=18$. Поскольку CH – ось симметрии треугольника BCF, то центр вписанной окружности лежит на CH, а $AB=FP$. Следовательно, точки A и P симметричны относительно прямой CH и поэтому $AP\|BF$. Значит, треугольники ACP и BCF подобны. Отсюда следует, что треугольник ACP равнобедренный и $AC=AP$. Пусть $AC=x$. Из подобия треугольников ACP и BCF следует

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AP}{BF}$$ Отсюда получаем $$\frac{x}{x+18}=\frac{12}{36}$$

значит, $x=9$. Поэтому, $BC=CP=x+18=27$. Следовательно, искомый периметр треугольника BCF равен $BF+2BC=36+54=90$.

<u>Задача 7.</u> *Основание равнобедренного треугольника равно 36. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках A и P, AP=12. Найдите периметр этого треугольника.*

II способ

Так как дана вписанная окружность, то J – есть педальная точка, тогда треугольник APH – педальный.

$p = \dfrac{BC + BF + CF}{2}$, $BC=CF$, так как треугольник BCF- равнобедренный, $BC=x$ $\quad \dfrac{x + x + 36}{2} = p$

$$(2x - 36)\cdot 18 = 12x \qquad x \neq 0$$

$$36x - 648 = 12x,$$

$$24x = 648,$$

$$x = 27$$

$BC=27$, $CF=27$, $BF=36$.

$P_{BCF}=27+27+36=90$.

По изученным свойствам педального треугольника

$$AP = 2(p - BF)\sqrt{\frac{(p - BC)(p - CF)}{BC \cdot CF}} = 2(x + 18 - 36)\sqrt{\frac{(x + 18 - x)(x + 18 - x)}{x \cdot x}} = 2(x - 18)\frac{18}{x} = 12$$

Таким образом, знание свойств педального треугольника, месторасположения точки Брокара значительно упрощают решение сложных математических задач.