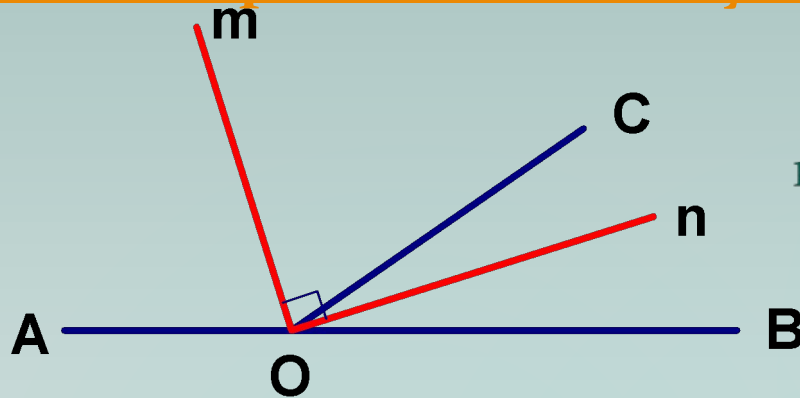


Полезные факты из планиметрии

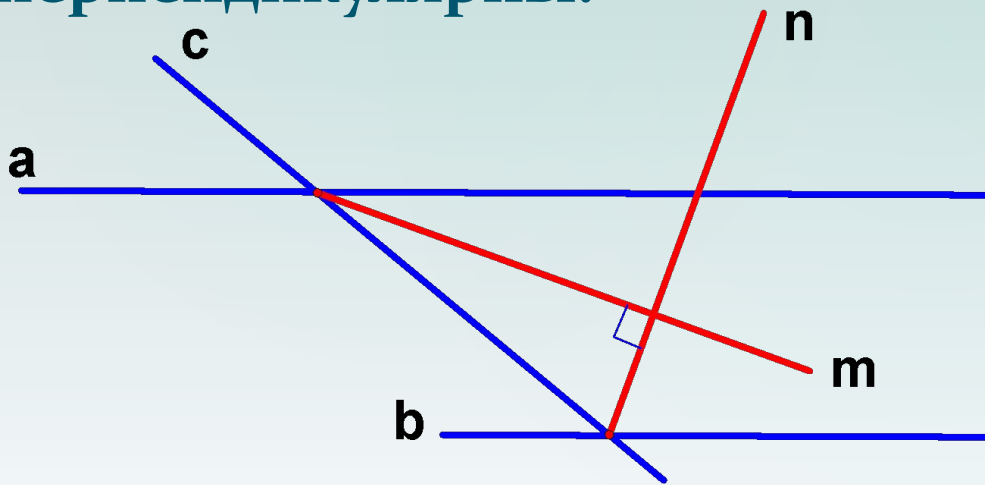
{ **Лучше это знать...**

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.



$\angle AOC$ и $\angle COB$ — смежные углы
 m и n — биссектрисы смежных углов
 $m \perp n$

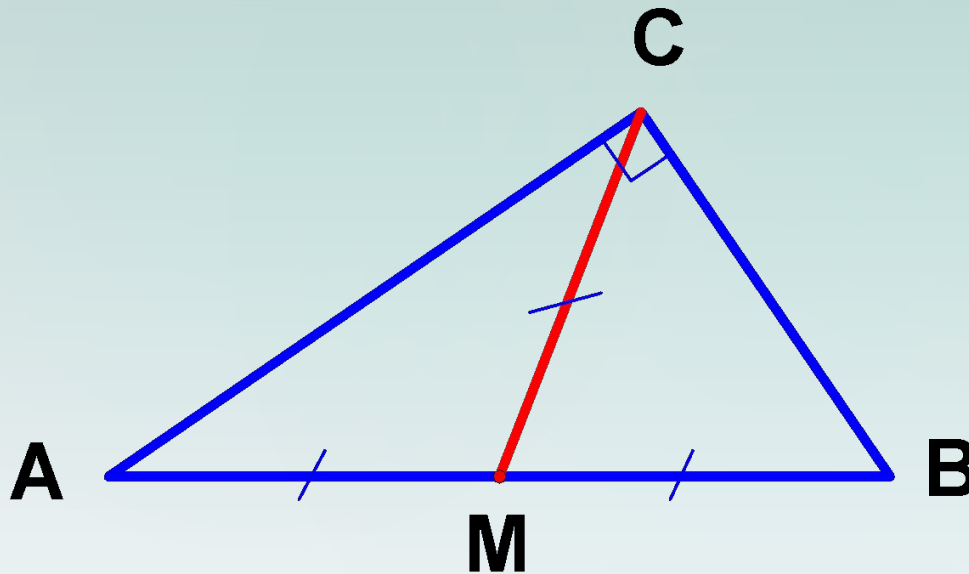
Биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

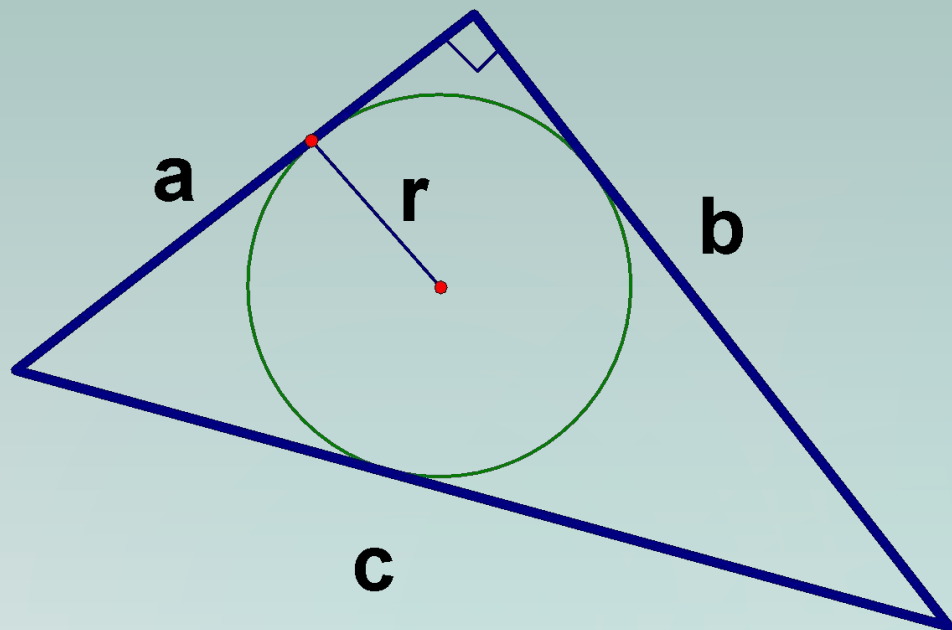


$a \parallel b$ и c — секущая
 m и n — биссектрисы
внутренних
односторонних углов
при двух
параллельных a и b и
секущей c .
 $m \perp n$

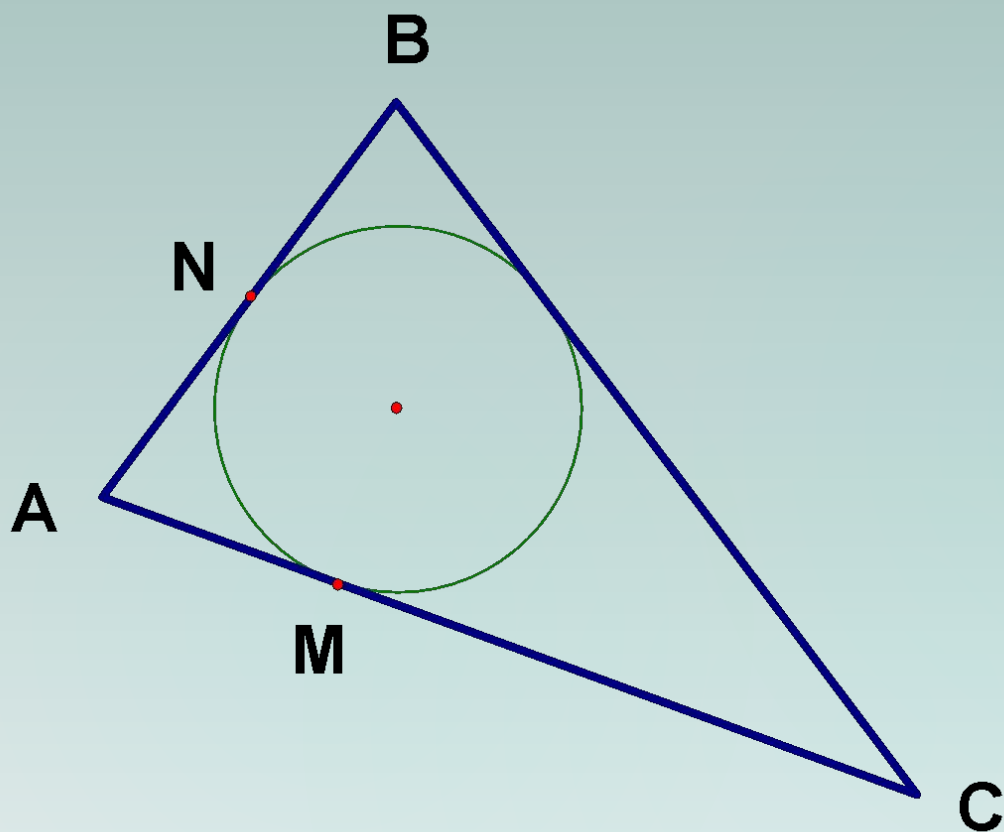
а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

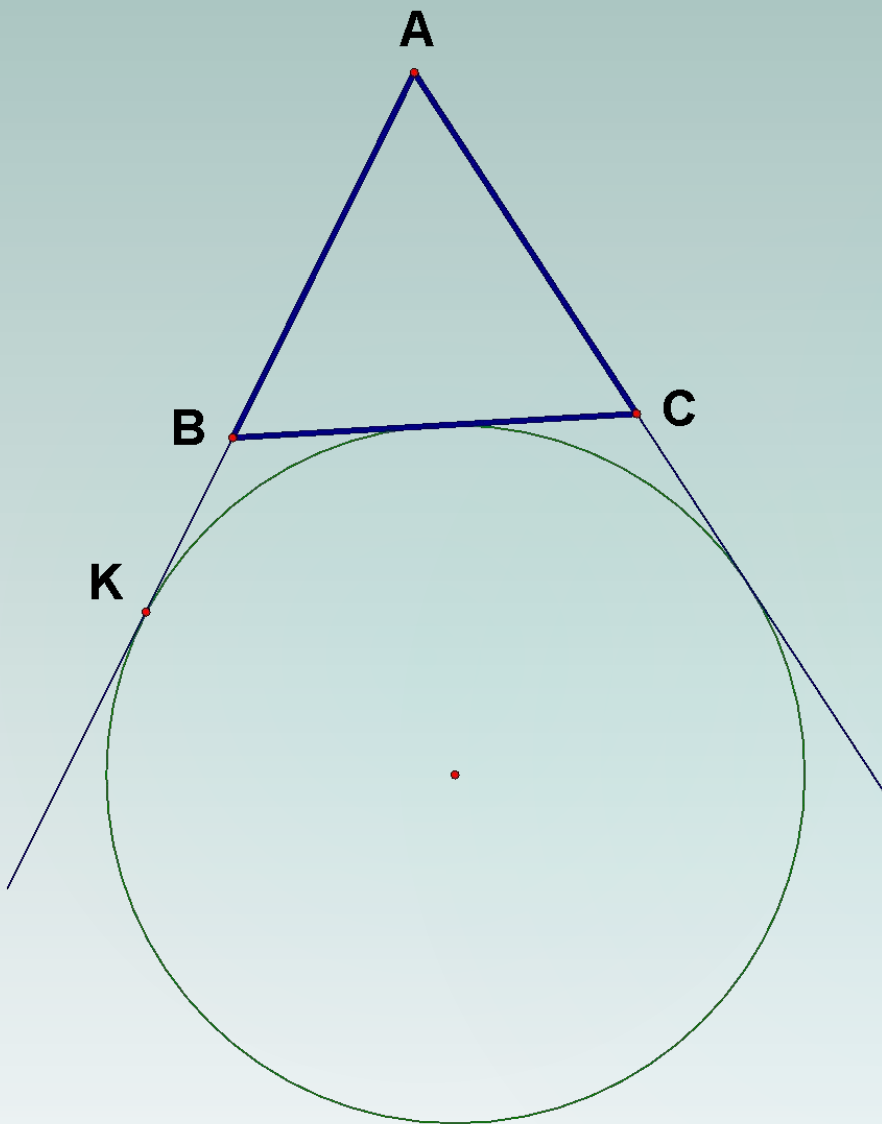




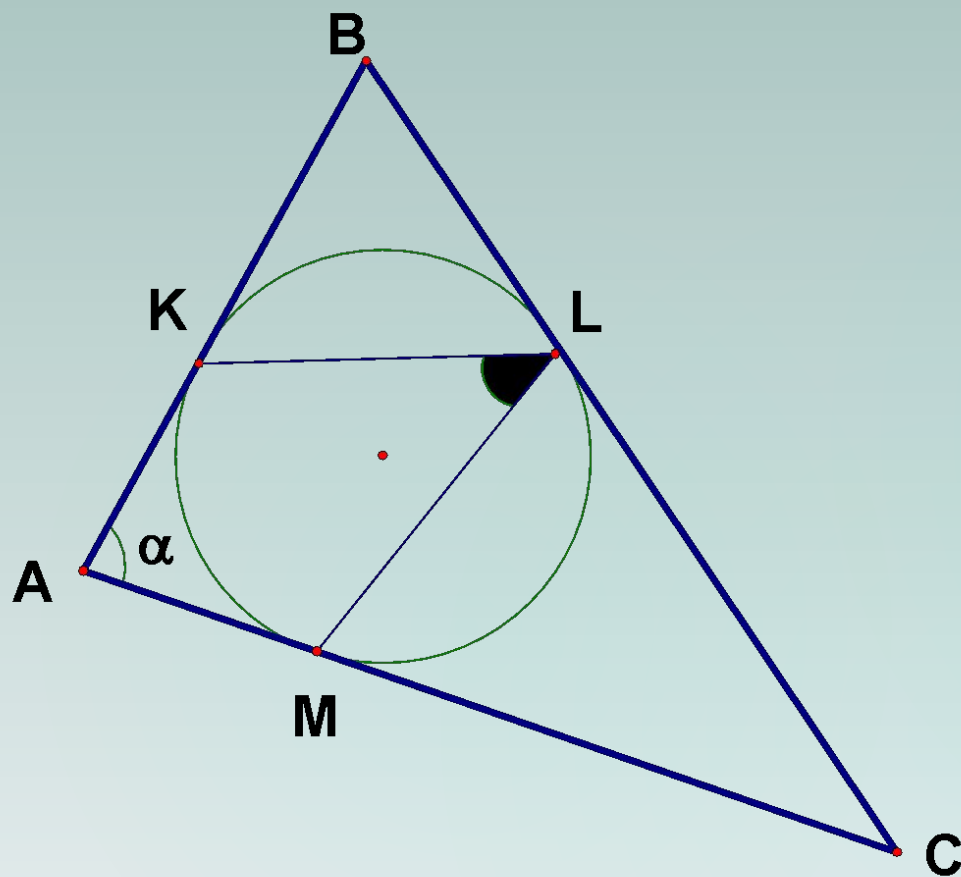
Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c , равен $r = \frac{a+b-c}{2}$.



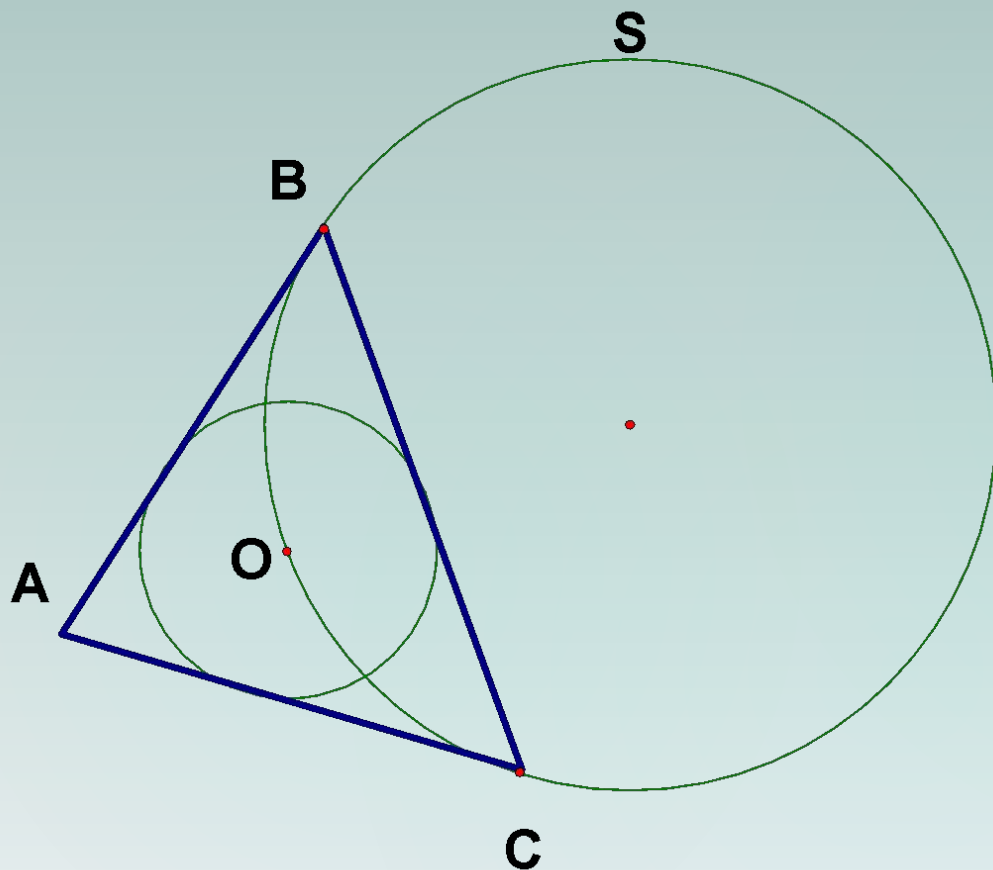
Если М — точка касания со стороной АС и N-точка касания со стороной АВ окружности, вписанной в треугольник АВС, то $AM = AN = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.



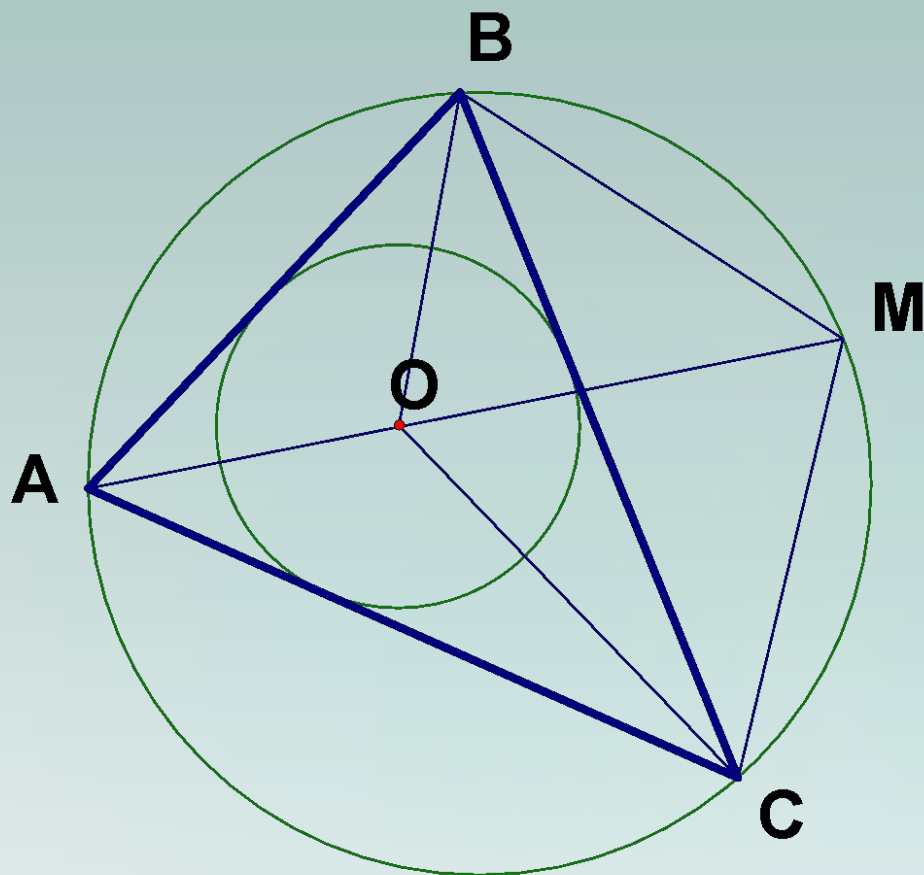
Если окружность
касается основания BC
треугольника ABC и
продолжений сторон AB
и AC , то расстояние от
вершины A до точки
касания окружности с
прямой AB равно
полупериметру
треугольника ABC .



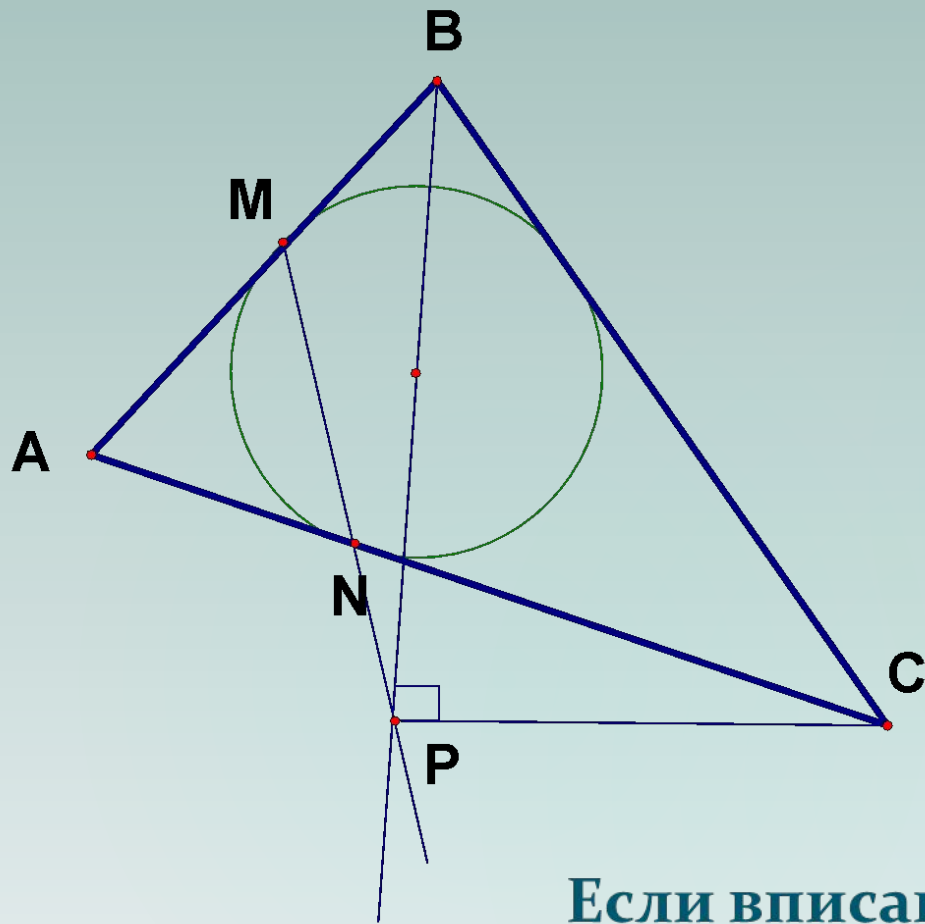
Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M, а $\angle BAC = \alpha$, то $\angle KLM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.



Если прямые, проходящие через точку A , касаются окружности S в точках B и C , то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S .



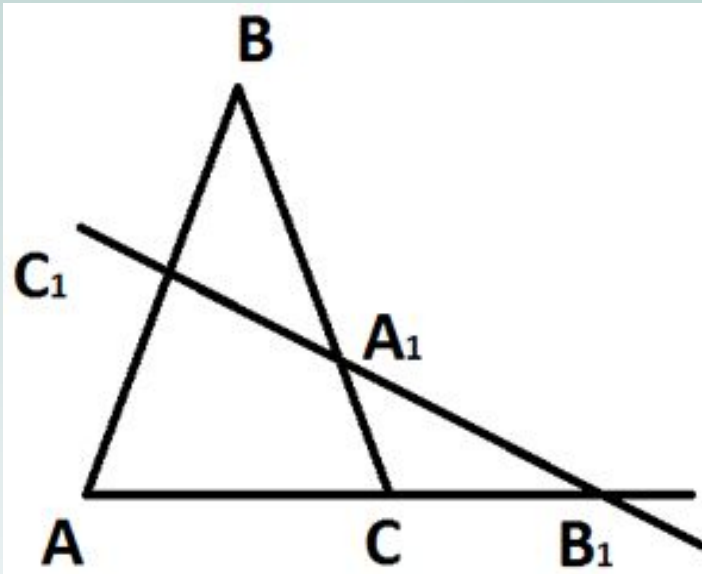
Если прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC , вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке M , то треугольники BOM и COM равнобедренные.



Если вписанная окружность касается сторон АВ и АС треугольника АВС в точках М и N, а Р — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла В, то $\angle BPC = 90^\circ$.

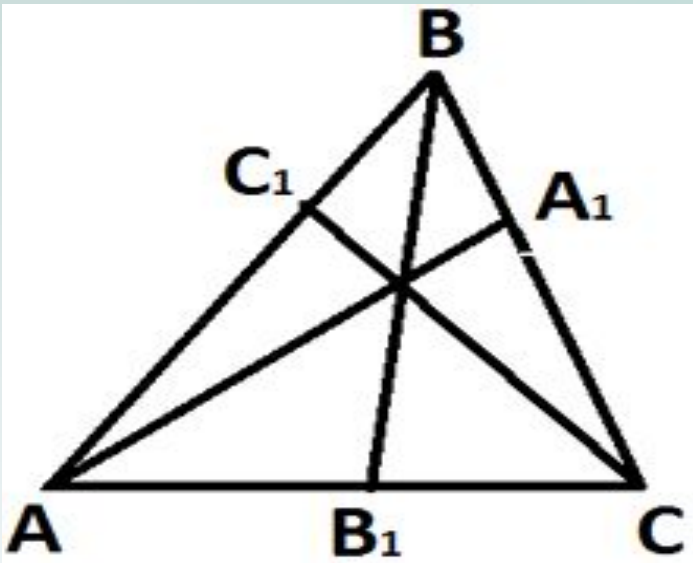
Теорема Минелая: Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC , точка C_1 – на стороне AB , точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C . Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$



Теорема Чевы: Пусть в треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 – на стороне AC, точка C_1 – на стороне AB. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство

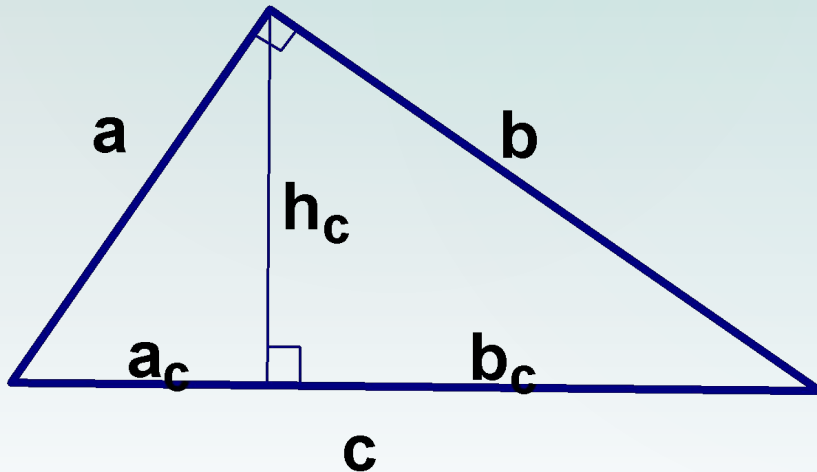
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$



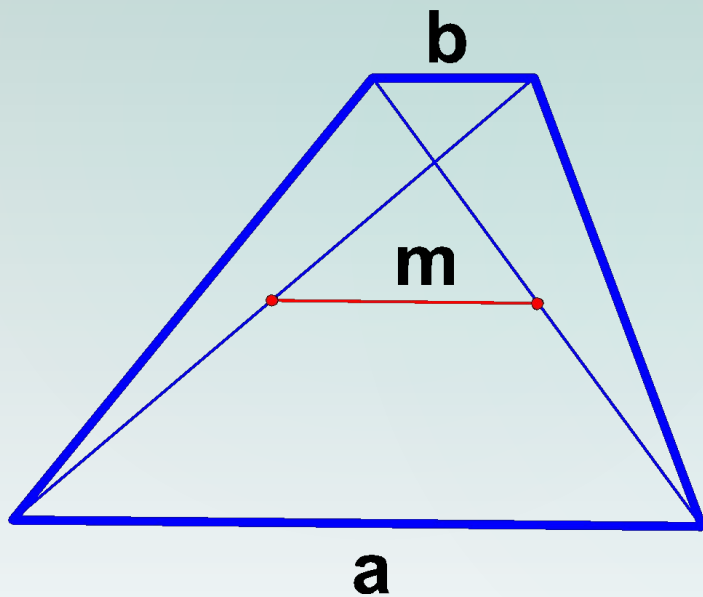
Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

$$a = \sqrt{a_c \cdot c}; \quad b = \sqrt{b_c \cdot c}$$

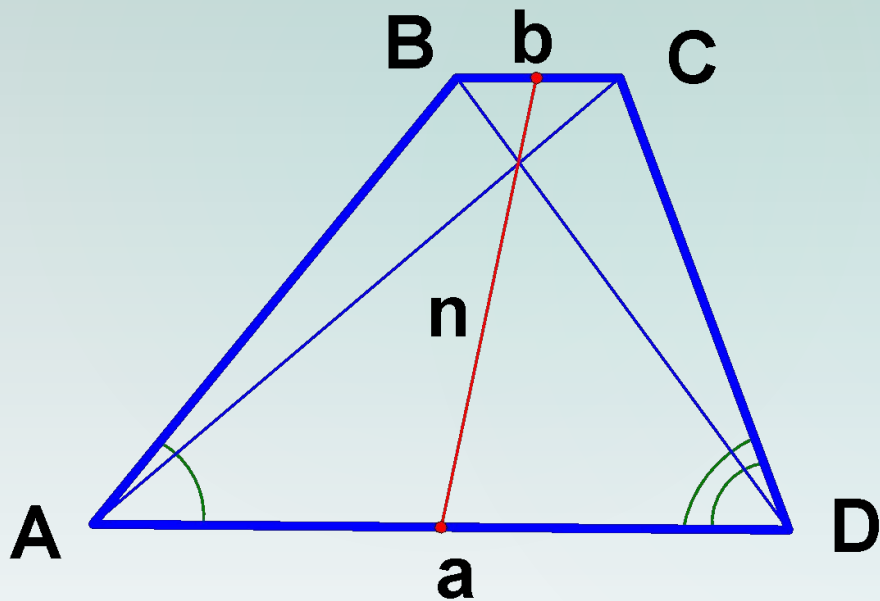


Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.



$$m = \frac{1}{2}(a - b)$$

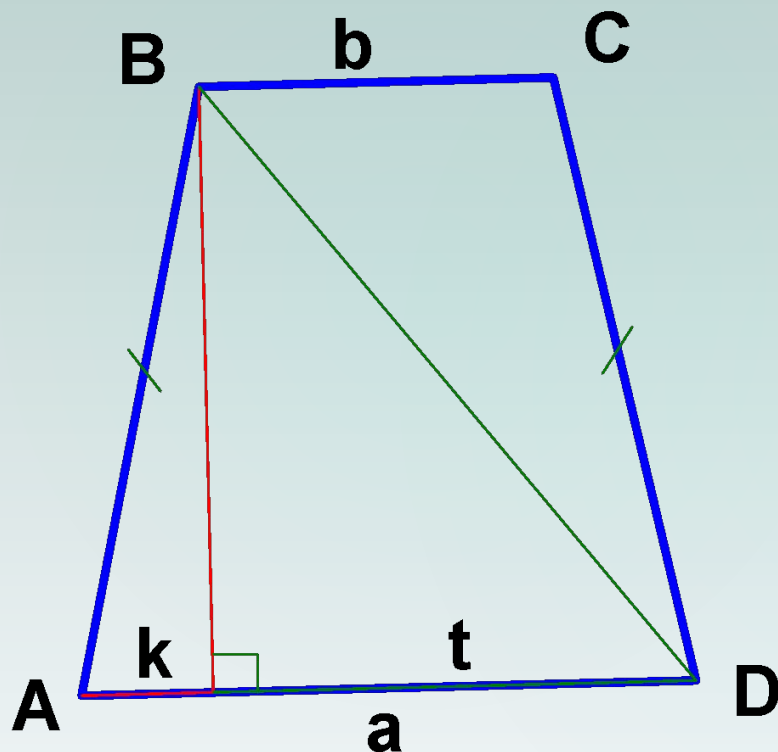
Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.



Если $\angle A + \angle D = 90^\circ$, то

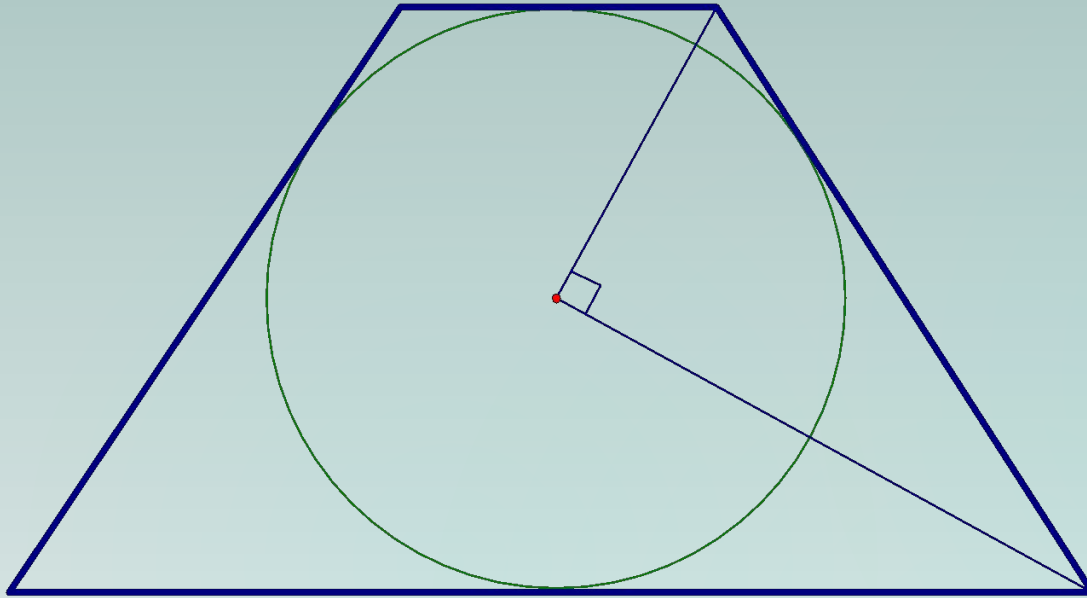
$$n = \frac{1}{2}(a - b)$$

Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.



k – проекция боковой стороны AB на основание AD , тогда
$$k = \frac{1}{2}(a - b)$$

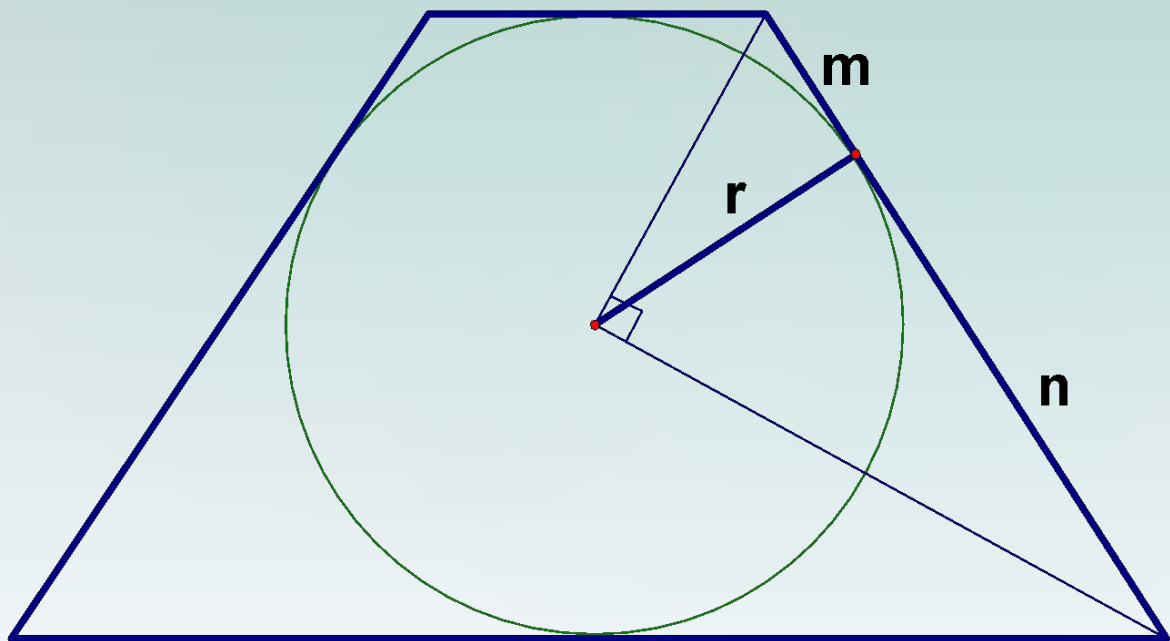
t – проекция диагонали BD на основание AD , тогда
$$t = \frac{1}{2}(a + b)$$

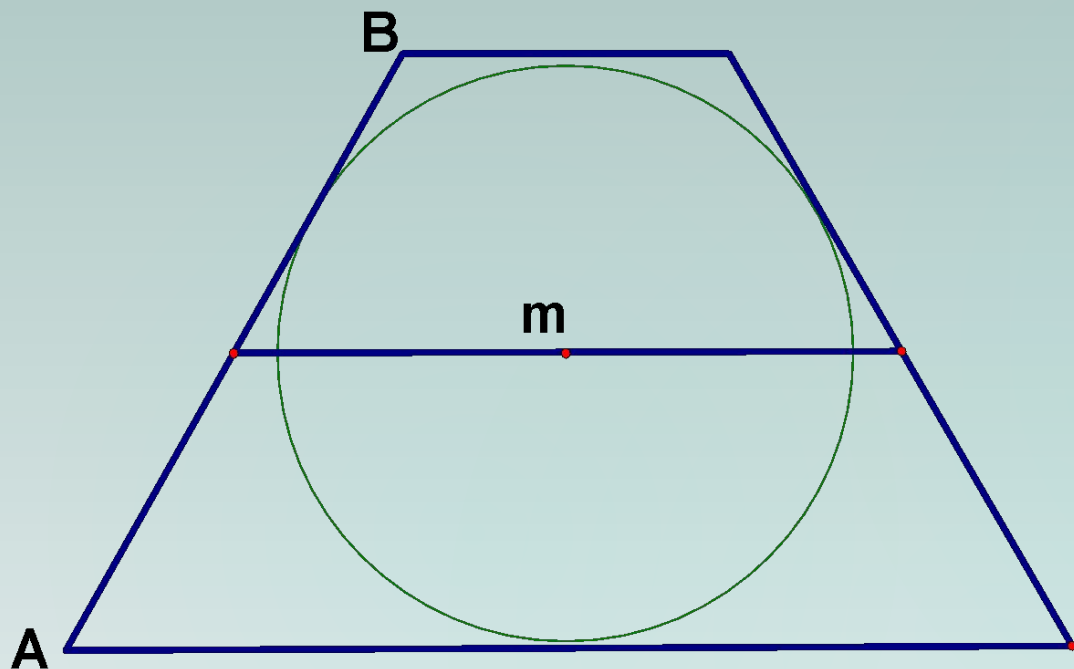


Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

$$r = \sqrt{m \cdot n}$$

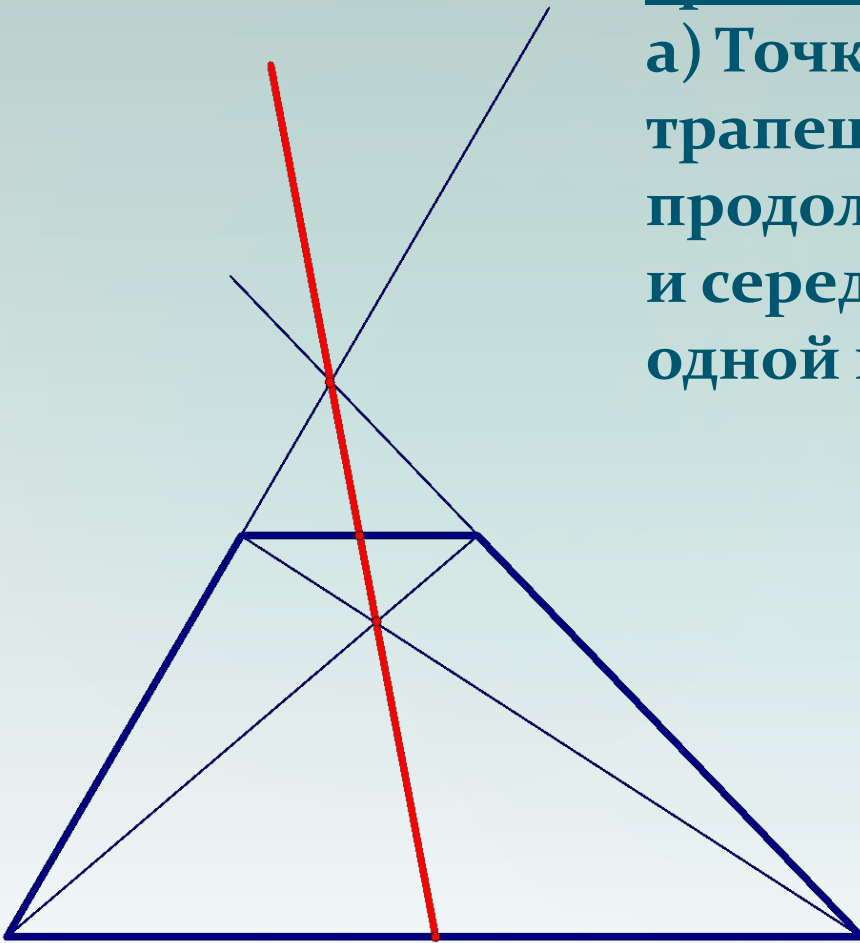


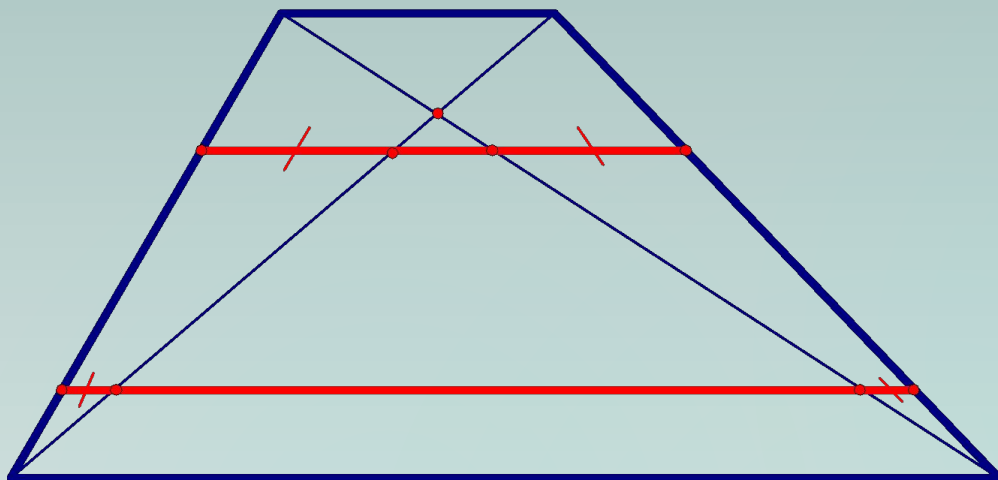


Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.

Замечательное свойство
трапеции.

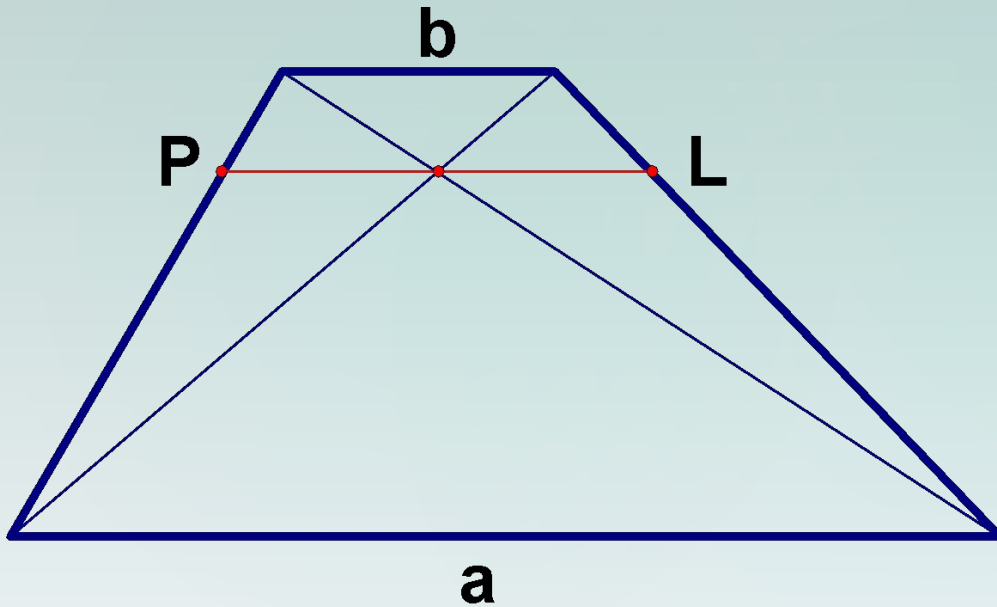
а) Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.



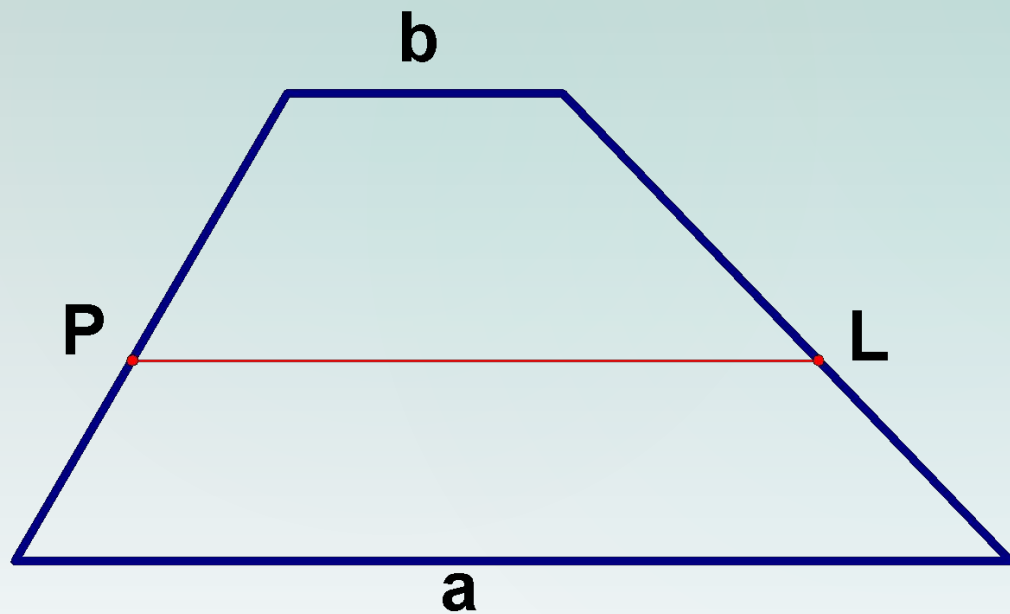


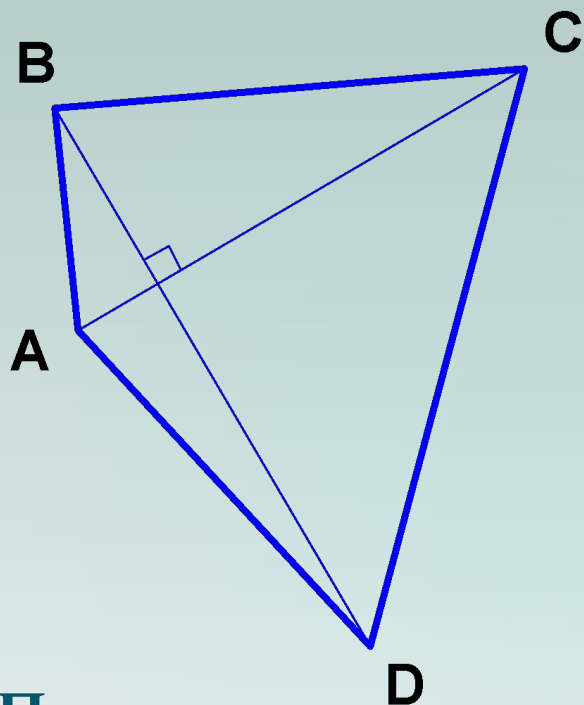
Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции, равен $PL = \frac{2ab}{a+b}$



Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b , на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{ab}$.

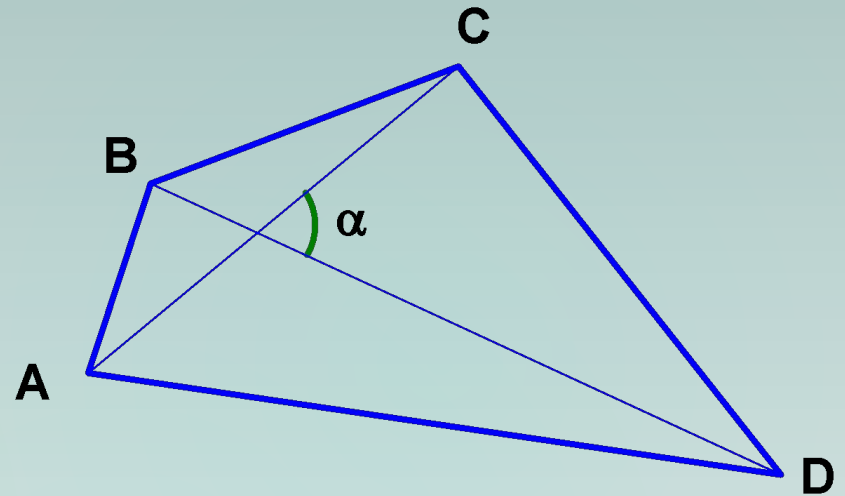




Диагонали
четырёхугольника
перпендикулярны тогда
и только тогда, когда
суммы квадратов
противоположных
сторон равны.

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

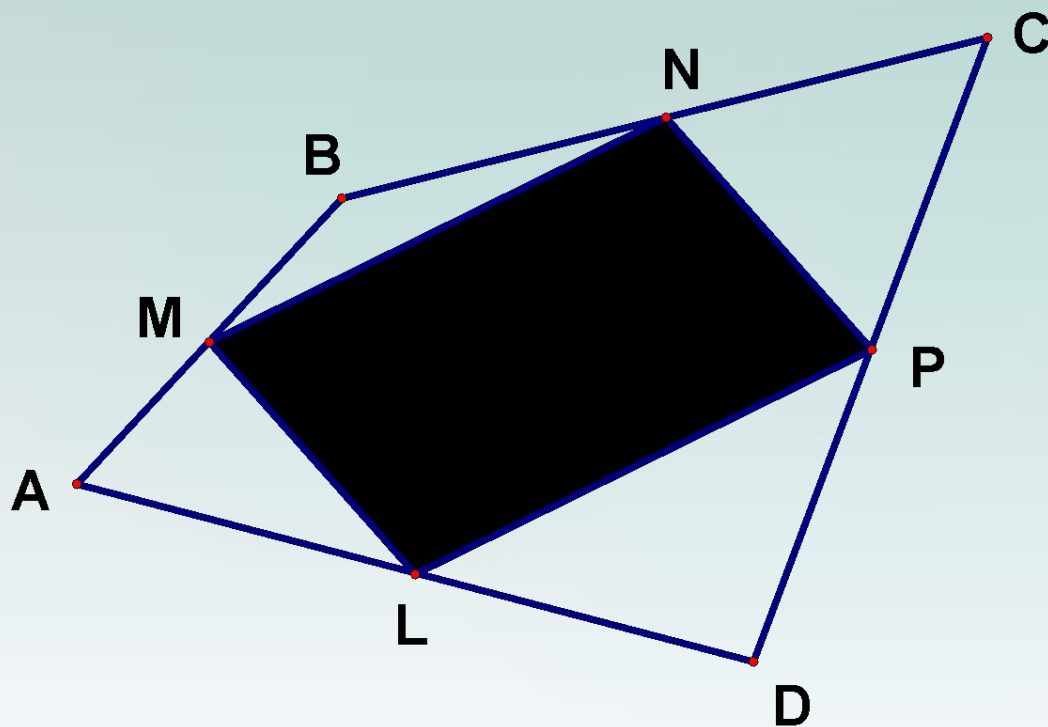
Площадь
четырёхугольника с
перпендикулярными
диагоналями равна
половине произведения
диагоналей.



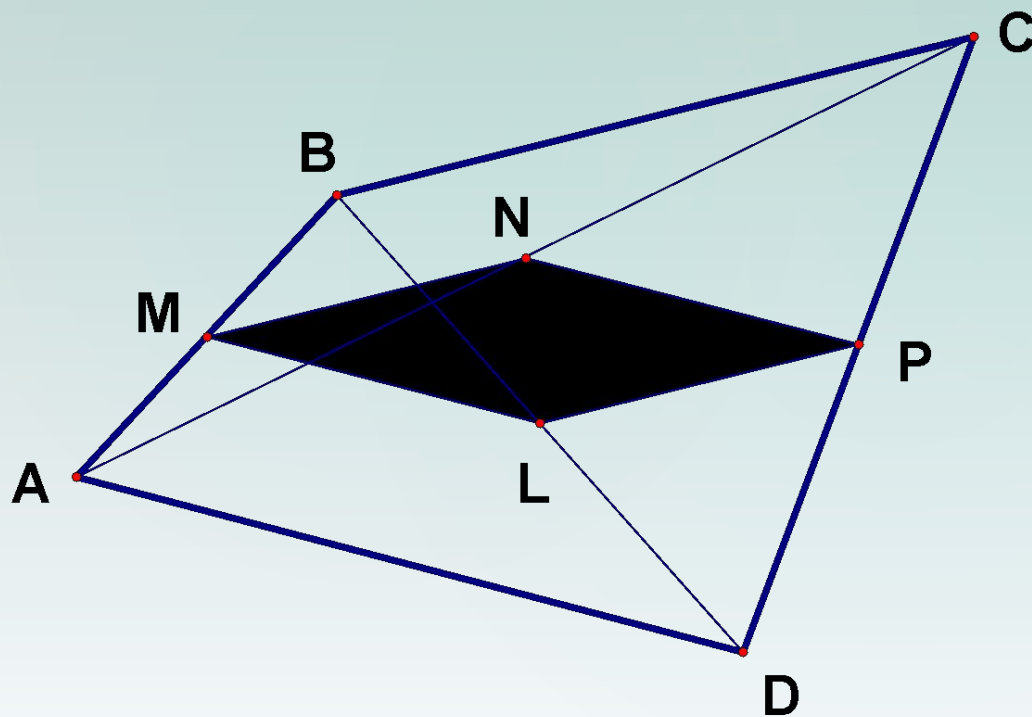
Площадь любого
четырёхугольника равна половине
произведения диагоналей на синус
угла между ними.

Средины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, причём площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

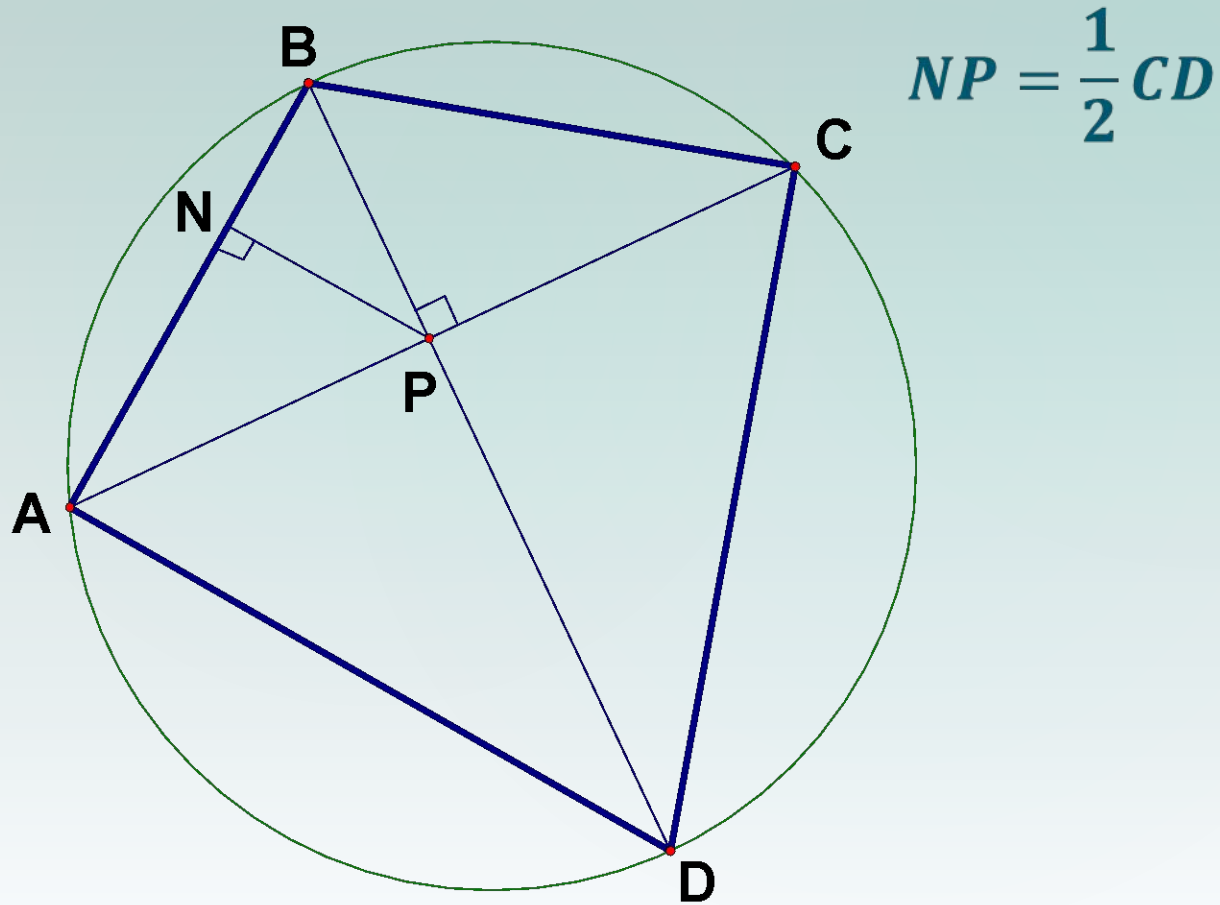
MNPL-параллелограмм, $S_{MNPL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$



Средины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

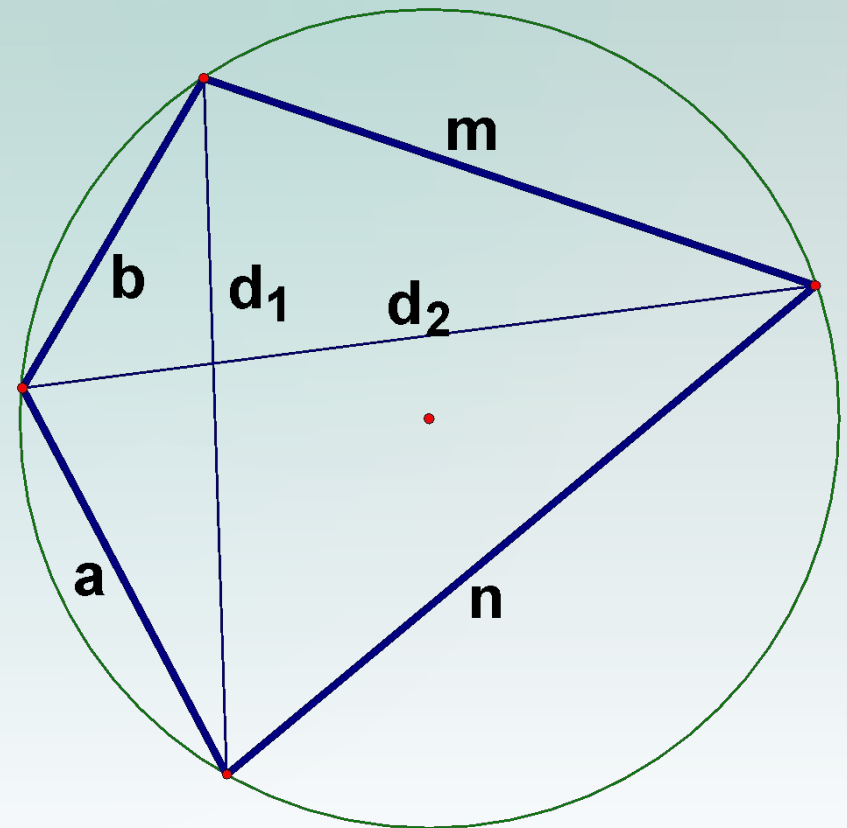


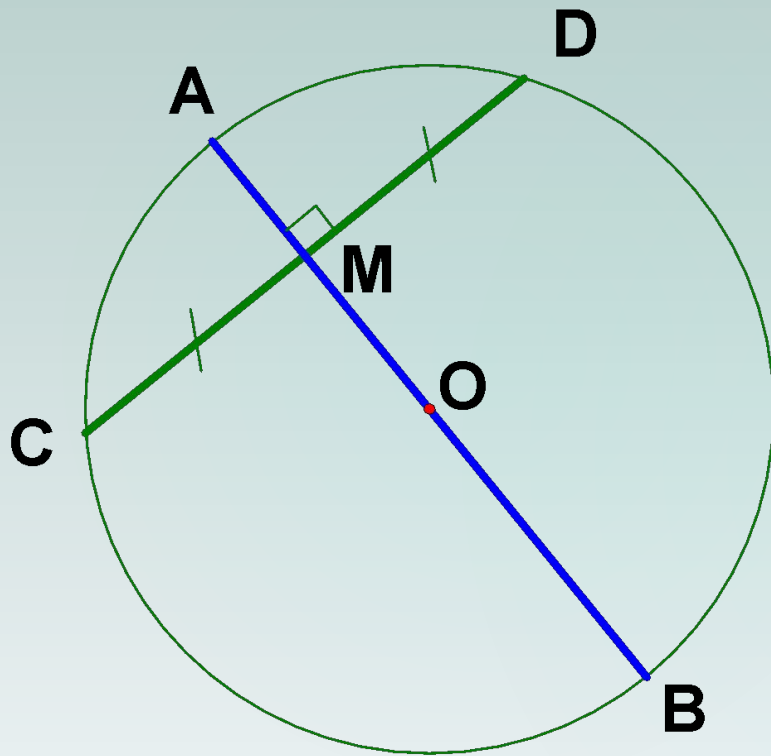
Если диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R с центром O , пересекаются в точке P и перпендикулярны, то расстояние от точки P до стороны AB вдвое меньше стороны CD ;



Теорема Птолемея.

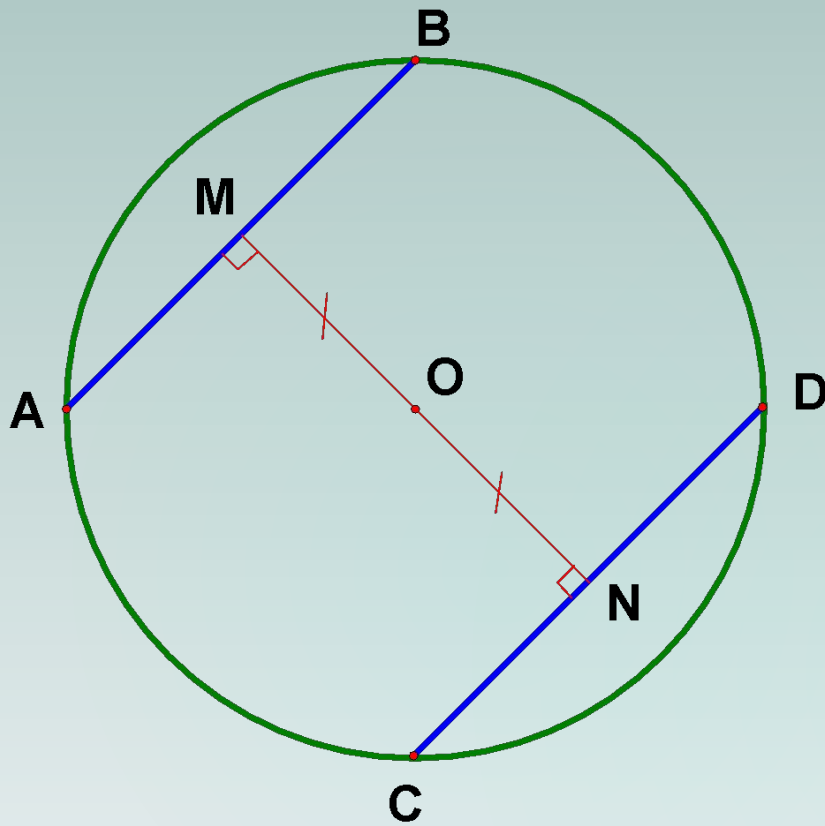
Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей $bn \cdot am = d_1 \cdot d_2$





- а) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
- б) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
- в) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

AB-диаметр окружности, CD-хорда, М-середина хорды CD



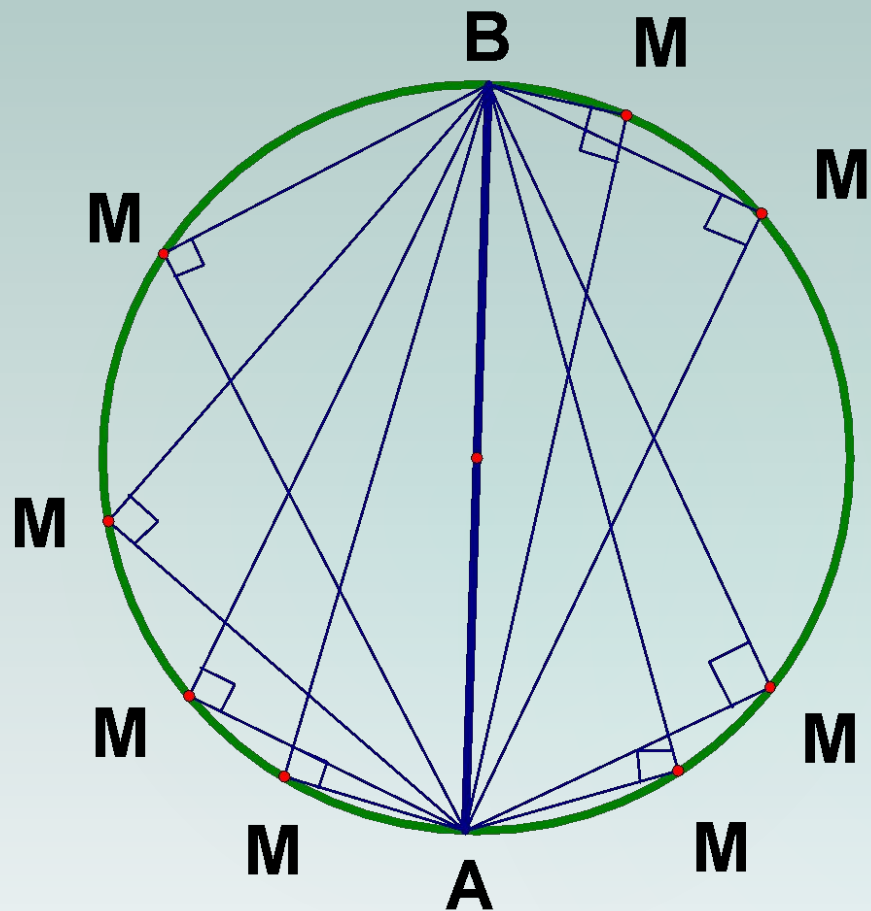
а) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния. $MO = NO$

б) Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны. $AB = CD$

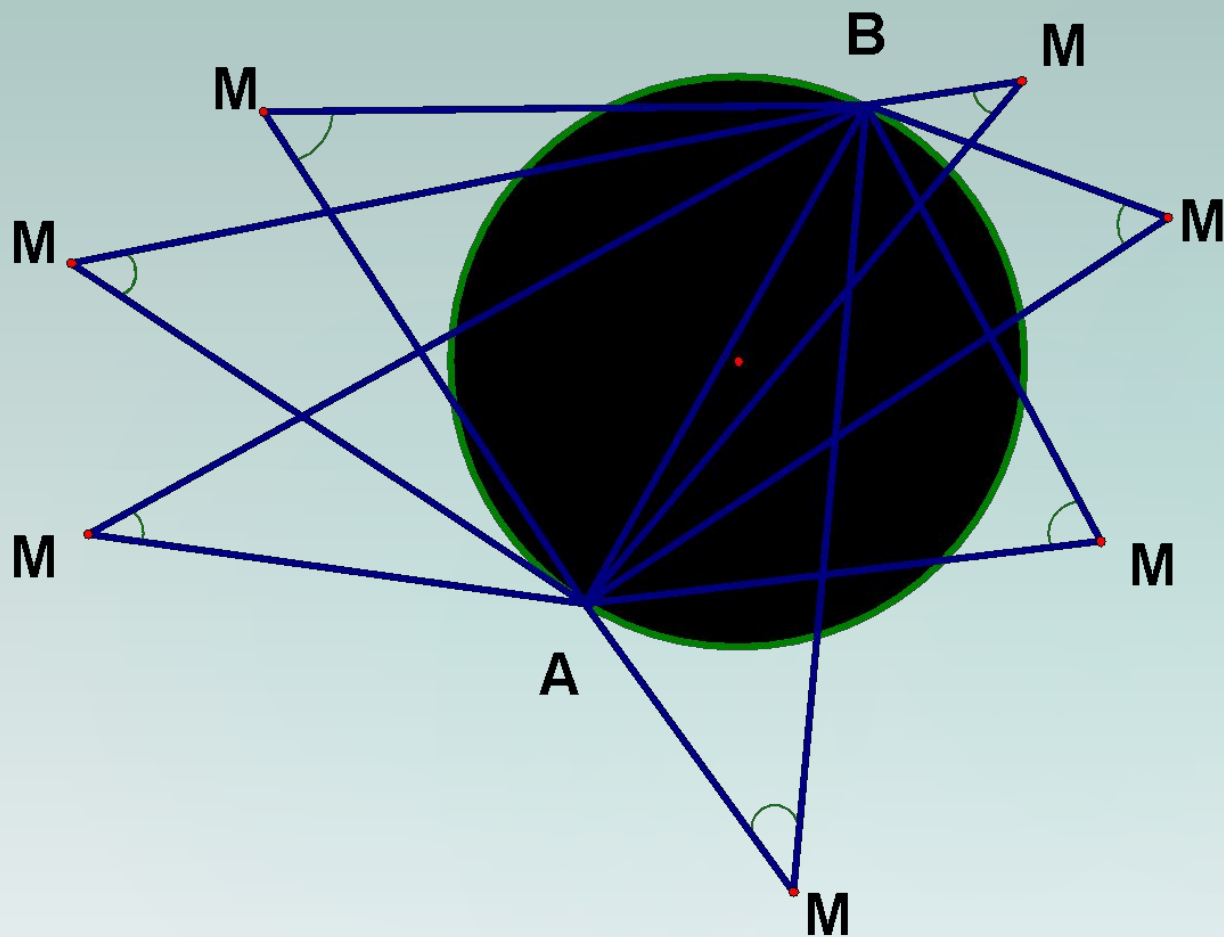
в) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

Если $AB \parallel CD$, то $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

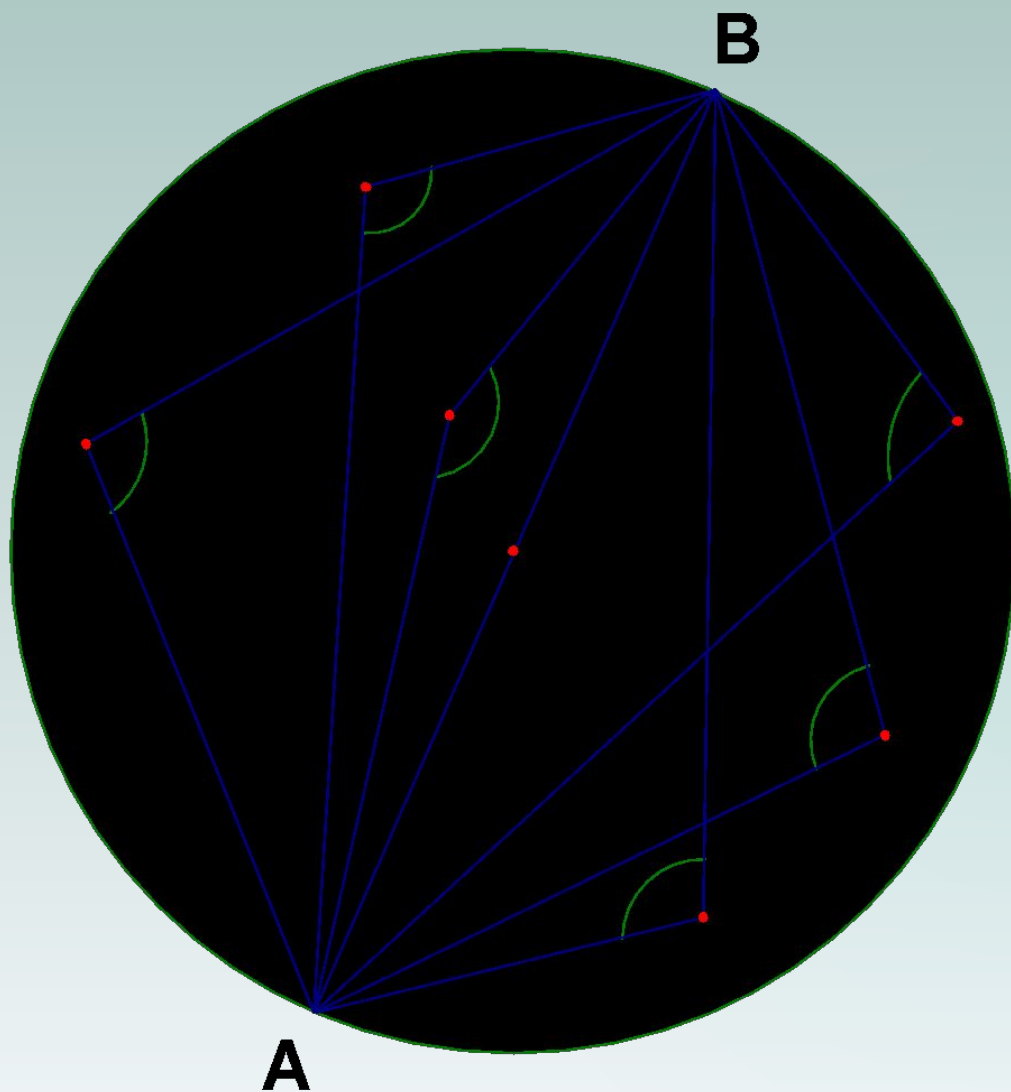
Как это работает...



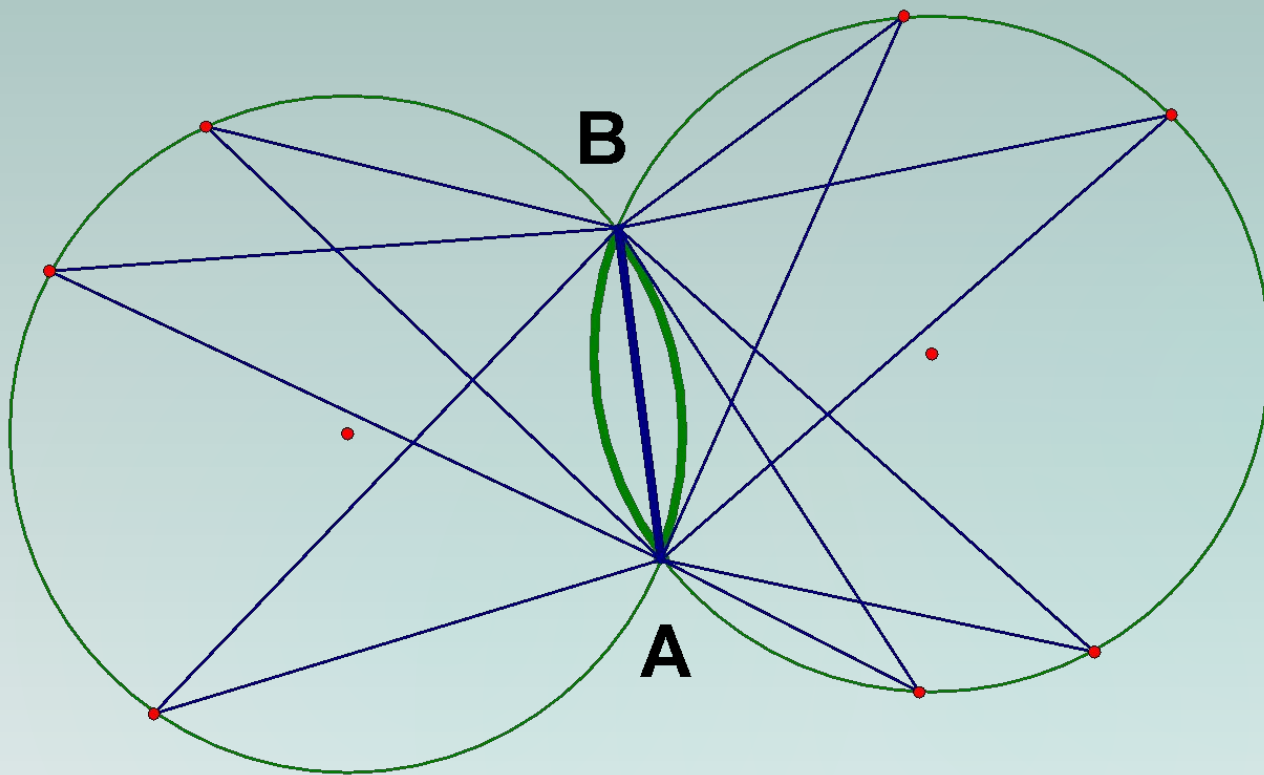
Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B .



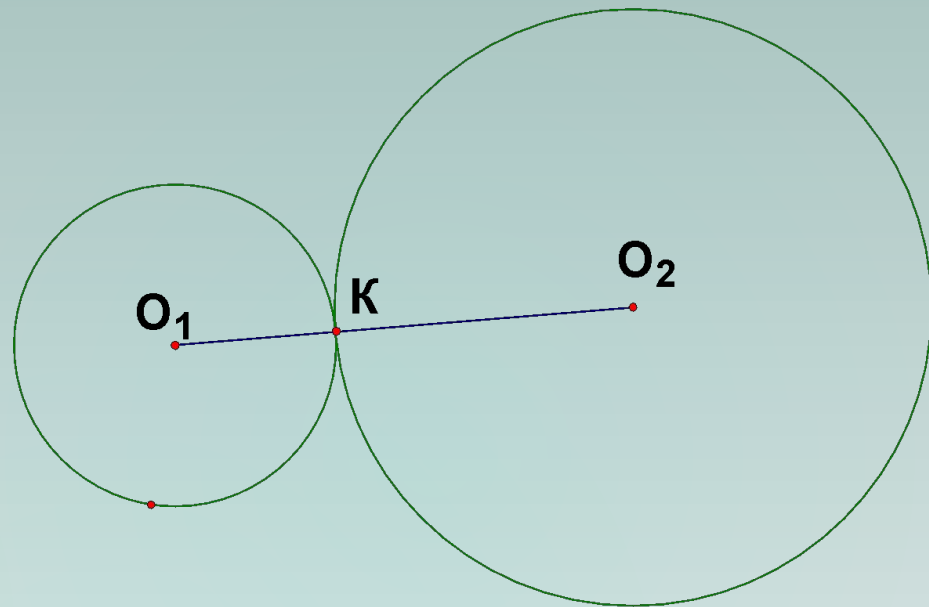
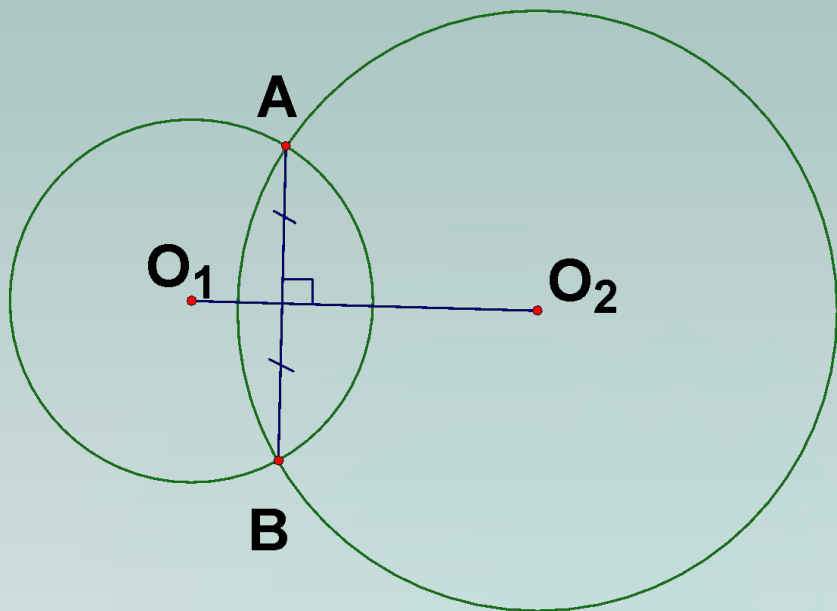
Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB .



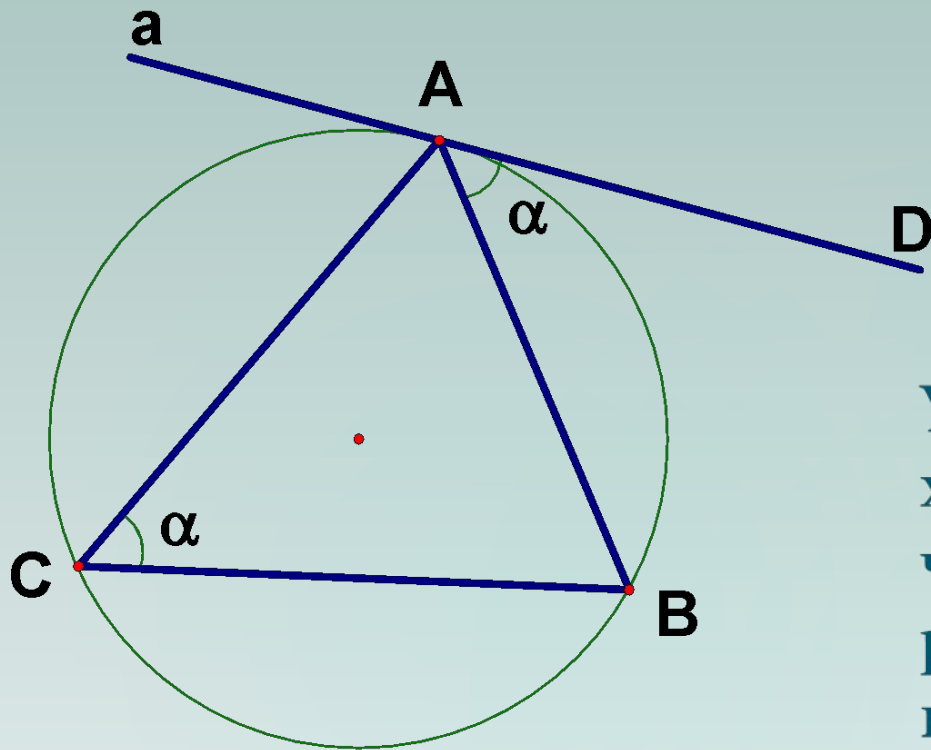
Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB .



Геометрическое место точек, из которых отрезок АВ
виден под данным углом, есть две дуги равных
окружностей с общей хордой АВ, лежащие по разные
стороны от прямой АВ, без точек А и В.

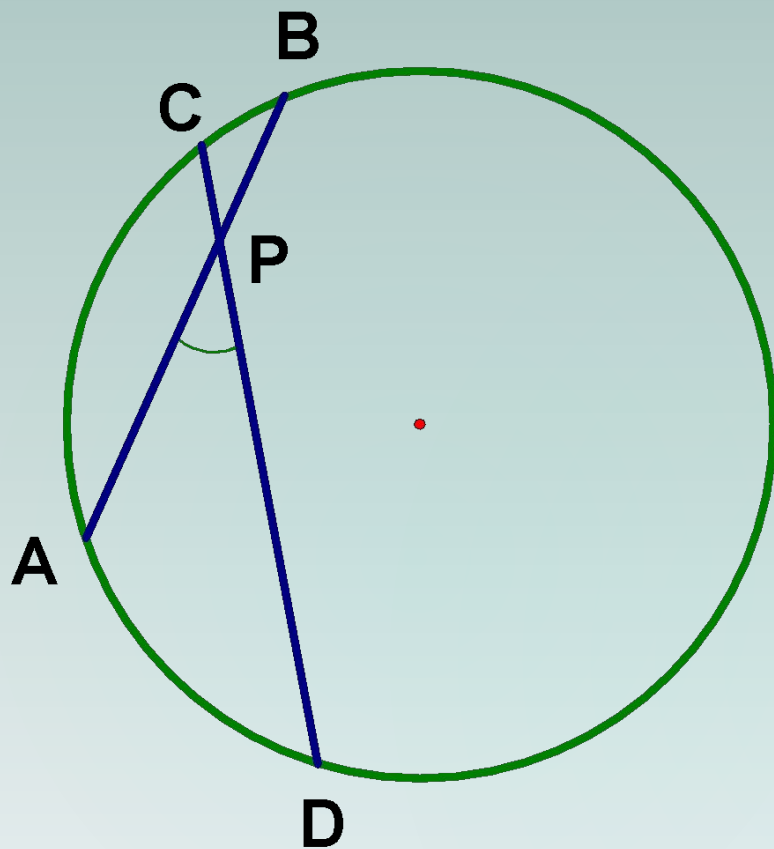


- а) Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.
- б) Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.



Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

$$\angle DAB = \angle ACB = \frac{1}{2} \frown AB$$

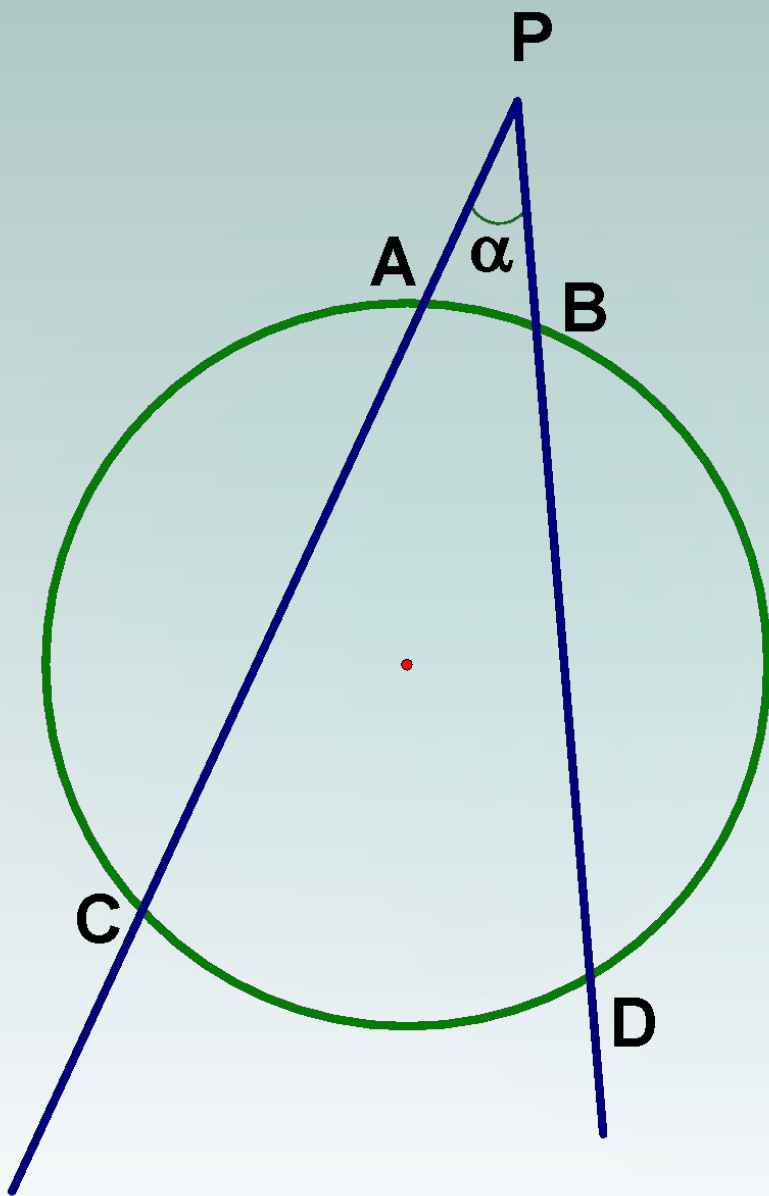


Угол между
пересекающимися
хордами равен полусумме
противоположных дуг,
высекаемых хордами.

$$\angle APD = \frac{1}{2} (\smile AD + \smile CB)$$

или

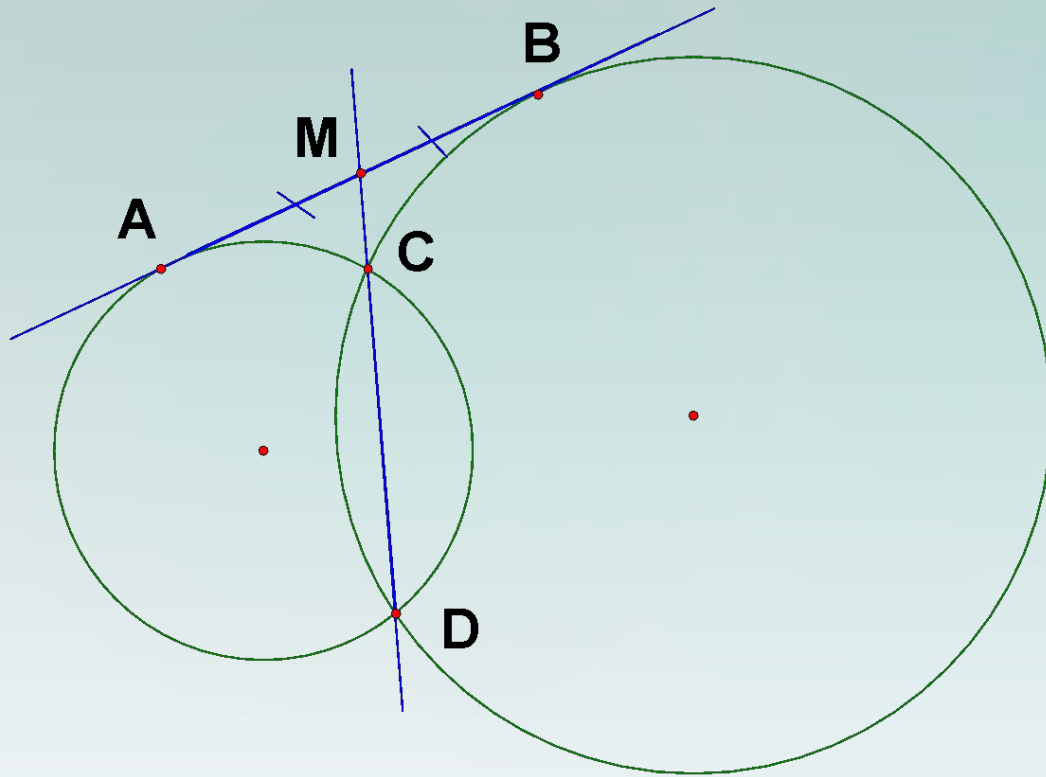
$$\angle BPD = \frac{1}{2} (\smile AC + \smile BD)$$

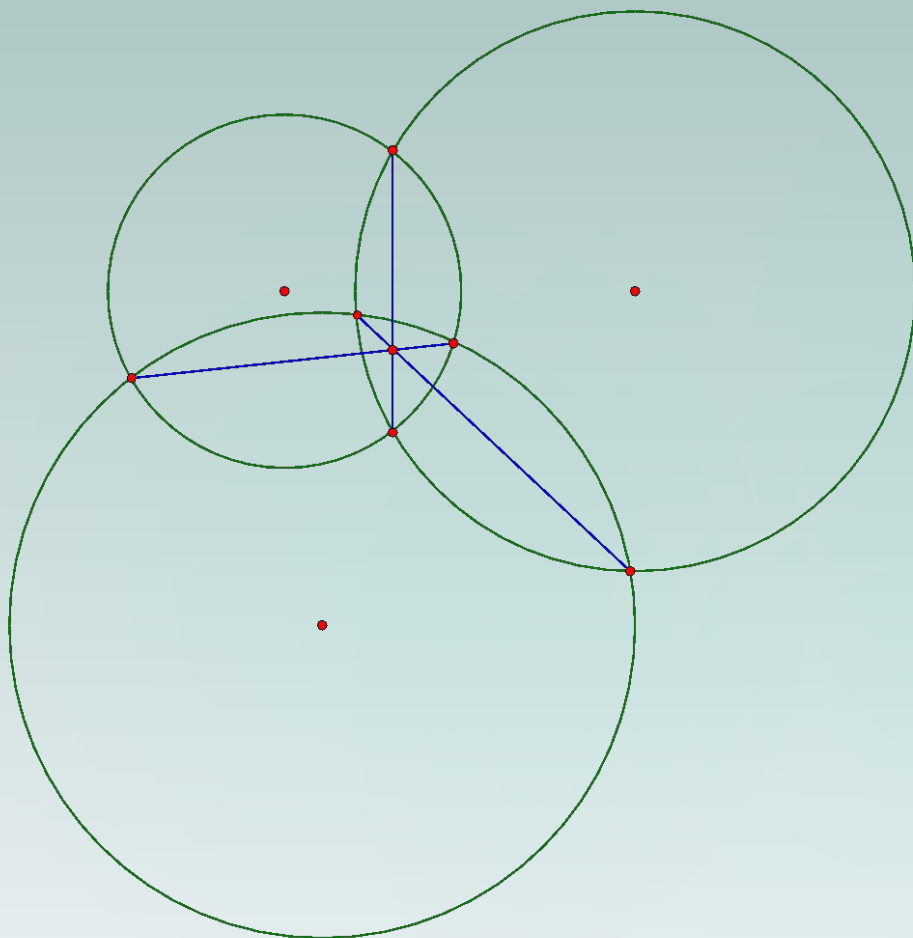


Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

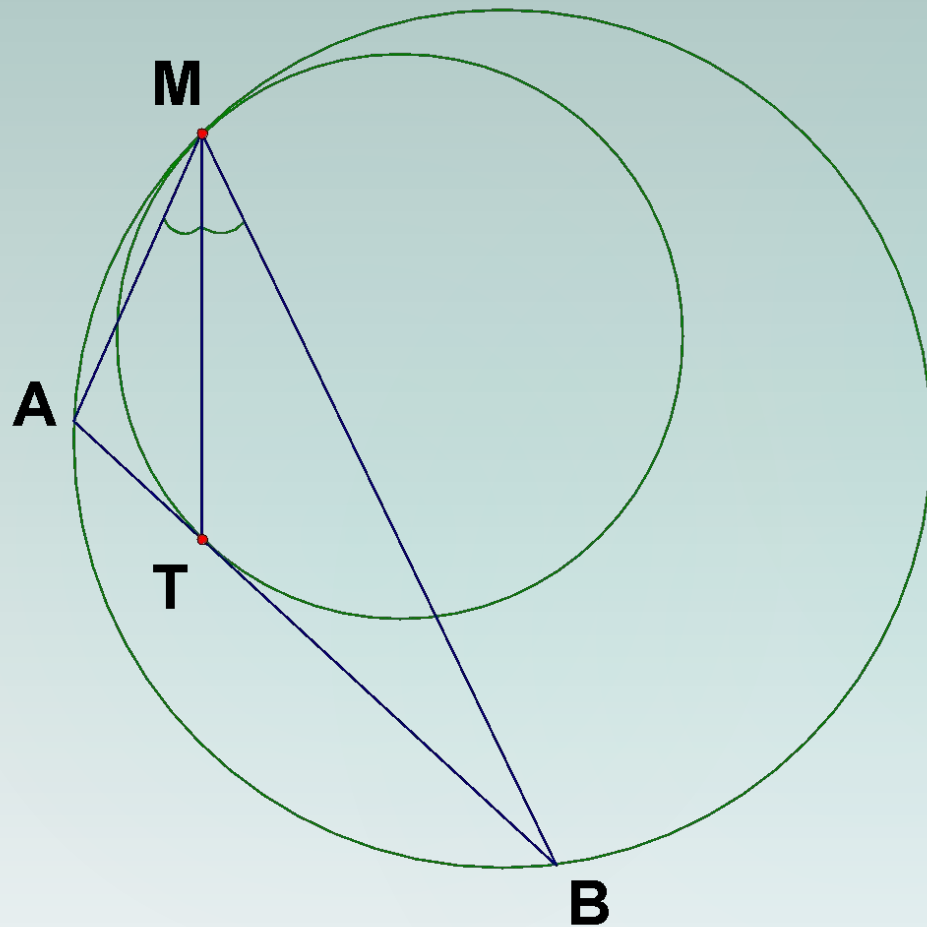
$$\angle \alpha = \frac{1}{2} (\frown CD - \frown AB)$$

Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.



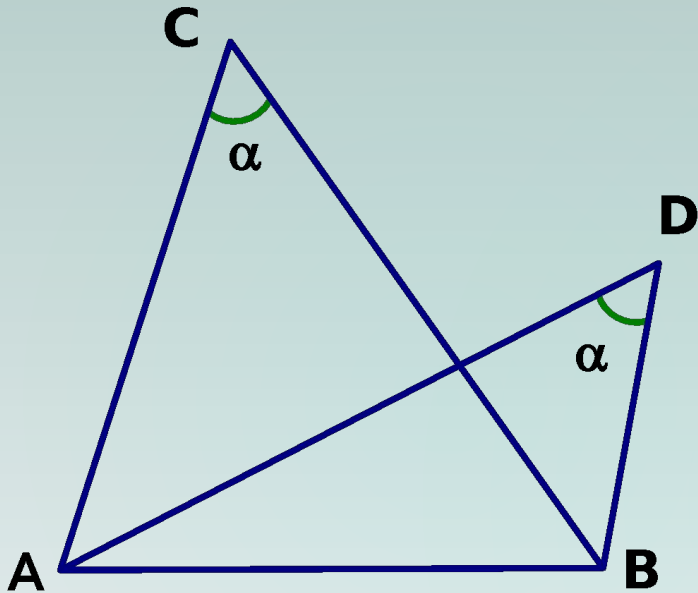


Общие хорды (или их продолжения) трёх попарно пересекающихся окружностей проходят через одну точку либо параллельны.



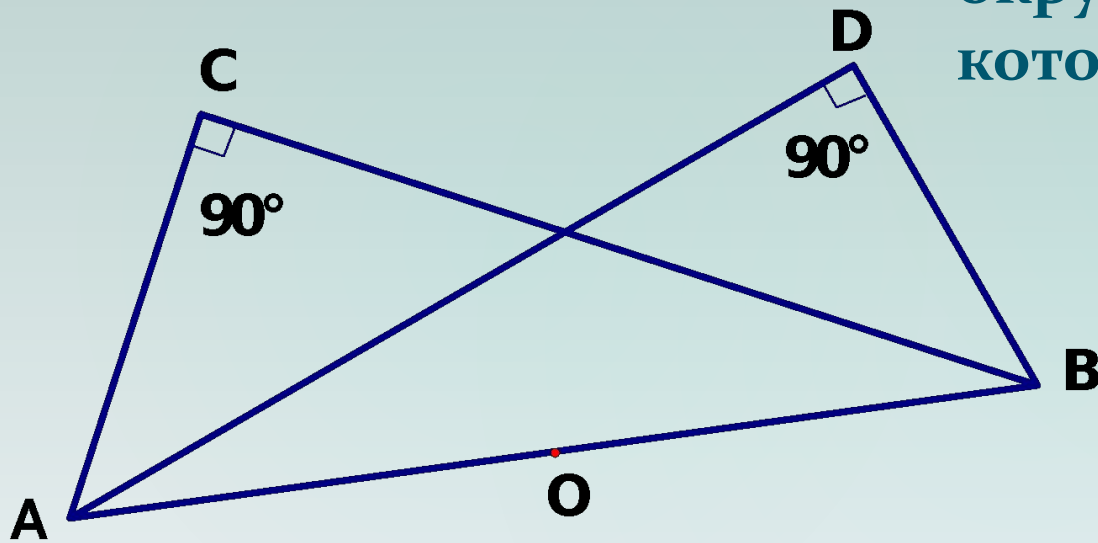
Две окружности
касаются внутренним
образом в точке М.
Если АВ — хорда
большей окружности,
касающаяся меньшей
окружности
в точке Т, то МТ —
биссектриса угла АМВ.

Если точки С и D
расположены по одну
сторону от отрезка АВ и
отрезок виден из этих точек
под одинаковым углом, то А,
В, С и D лежат на одной
окружности

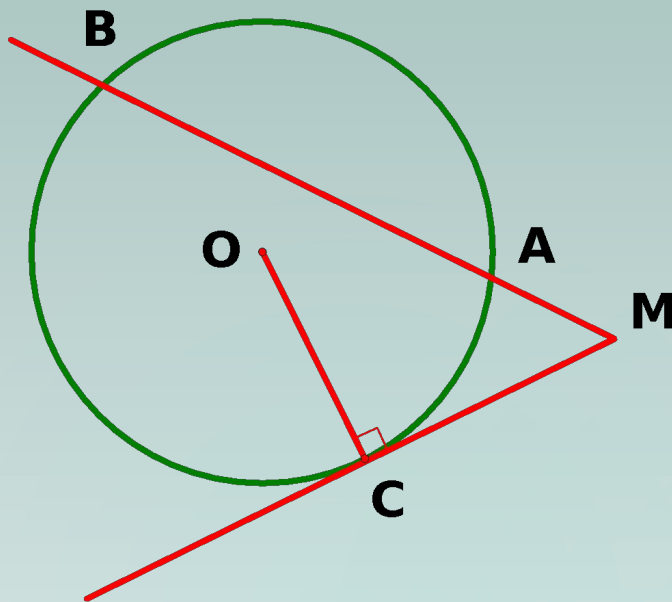


Как это работает...

Если из точек C и D отрезок AB виден под прямым углом, то A , B , C и D лежат на одной окружности, центр которой – середина AB .

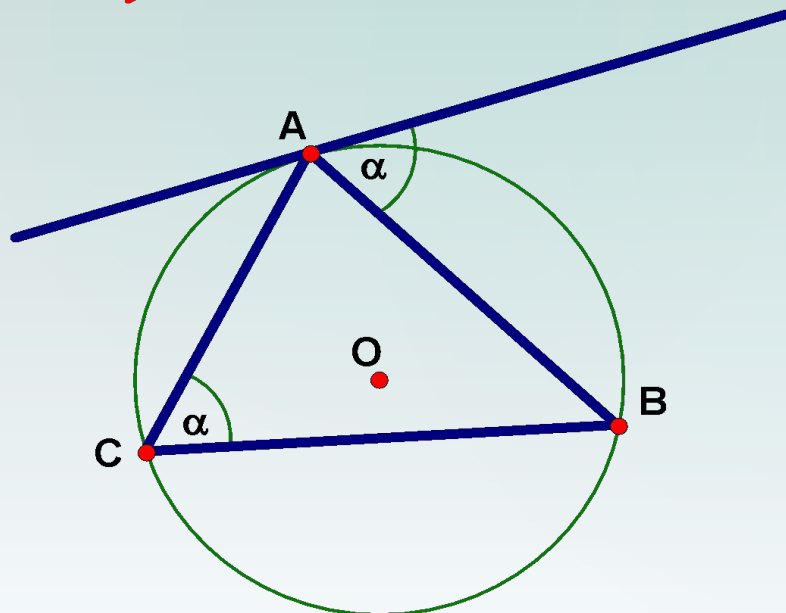


Как это работает, смотрим в следующей задаче:



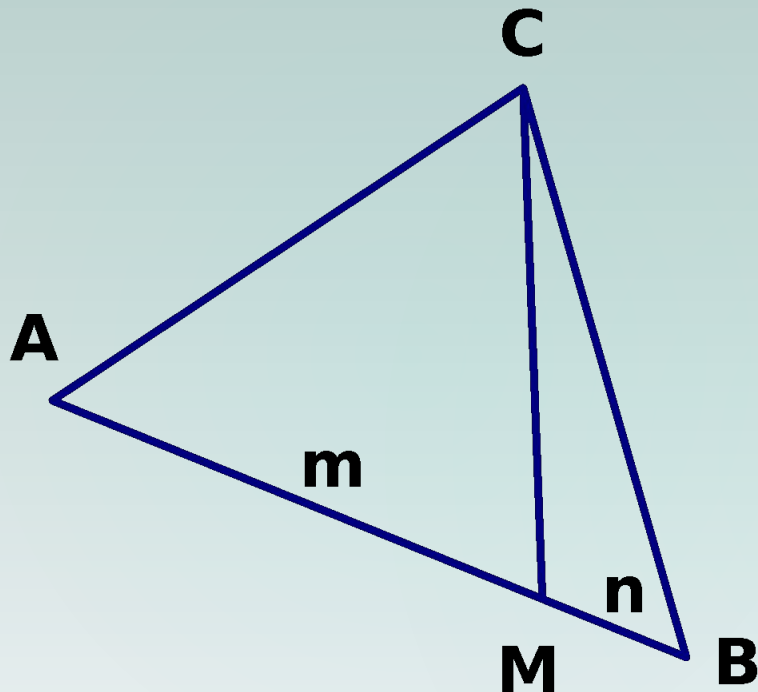
а) К окружности из одной точки проведена касательная и секущая. Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков длин секущей.

$$MC^2 = AM \cdot BM$$



б) Угол, образованный касательной и хордой, равен вписанному в эту окружность углу, опирающемуся на дугу, заключенную между касательной и хордой.

Как это работает, смотрим в следующих задачах:

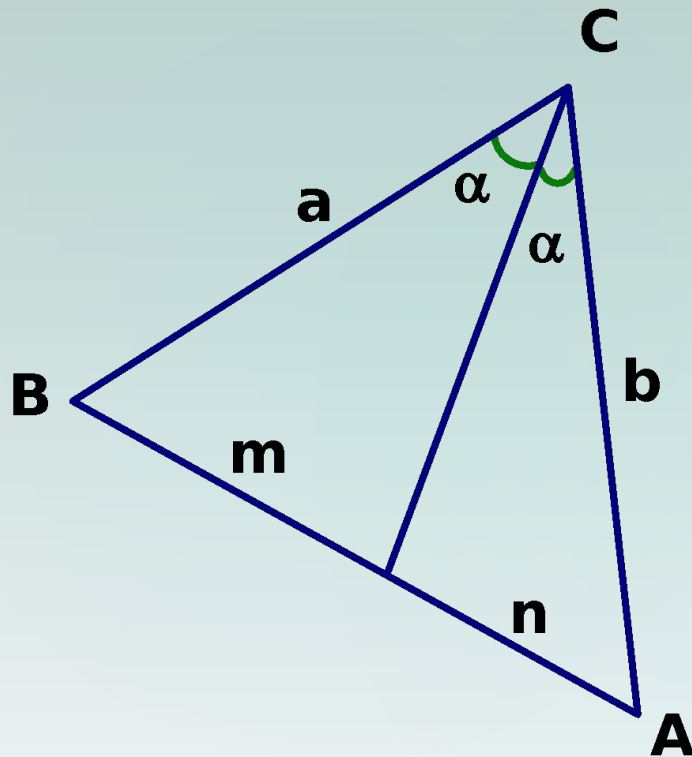


Если сторона АВ
треугольника АВС разделена
на два отрезка m и n, тогда
отношение площадей
треугольников, на которые
треугольник АВС разбивается
отрезком СМ, равно
отношению этих отрезков.

$$\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}} = \frac{m}{n}$$

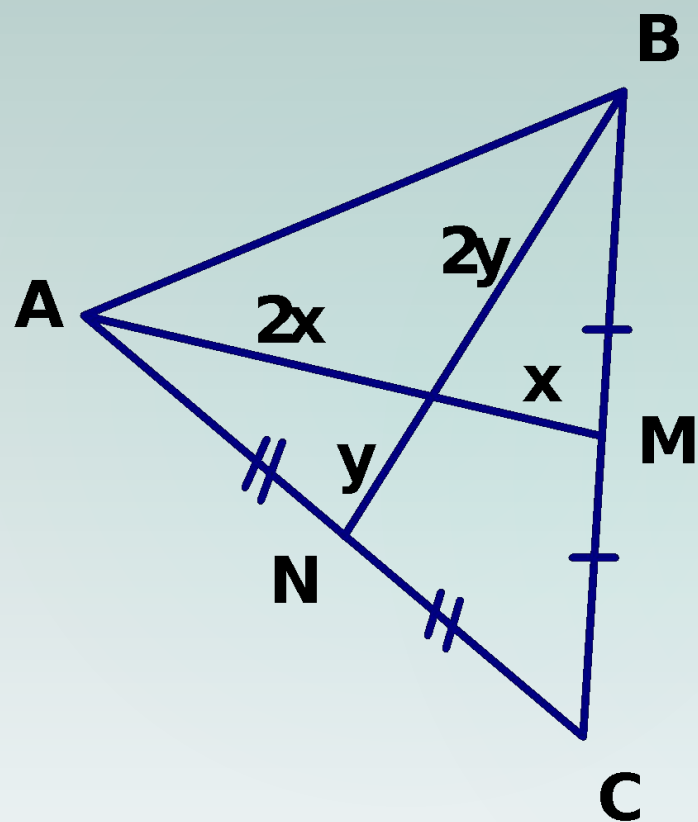
Как это работает, смотрим в следующей задаче:

Биссектриса угла
треугольника делит
противолежащую сторону в
отношении длин
прилежащих сторон.



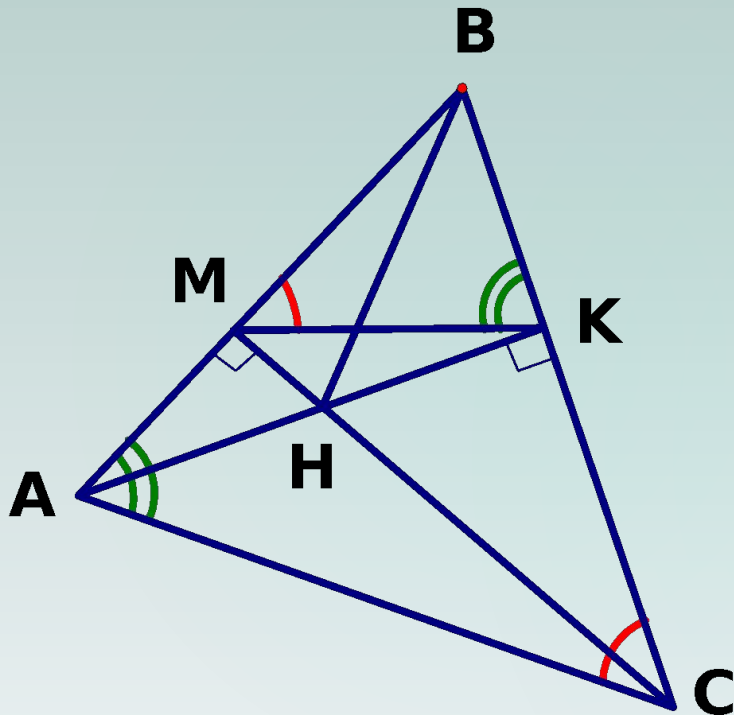
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Как это работает, смотрим в следующей задаче:



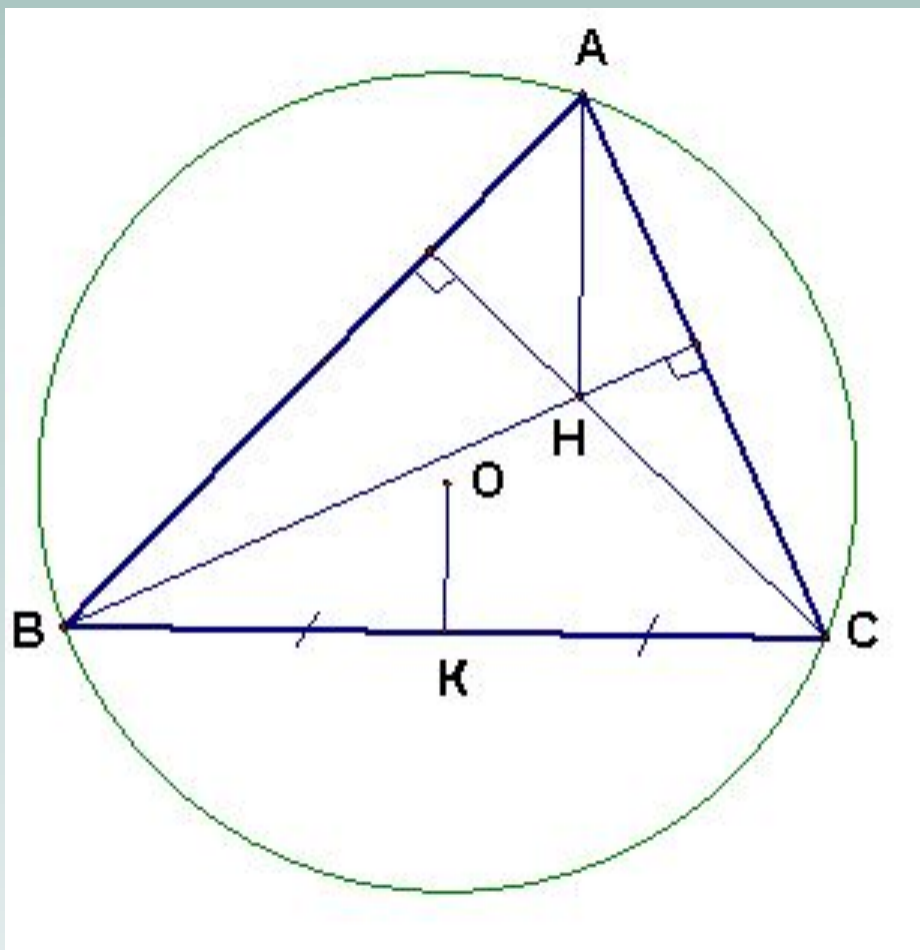
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Как это работает...



- а) $\triangle MKB \sim \triangle CAB$; $k = |\cos \angle B|$;
- б) Точки А, М, К, С – лежат на одной прямой;
- в) Точки В, М, Н, К – лежат на одной прямой;
- г) $R_{ABC} = R_{ACH} = R_{ABH} = R_{BCH}$

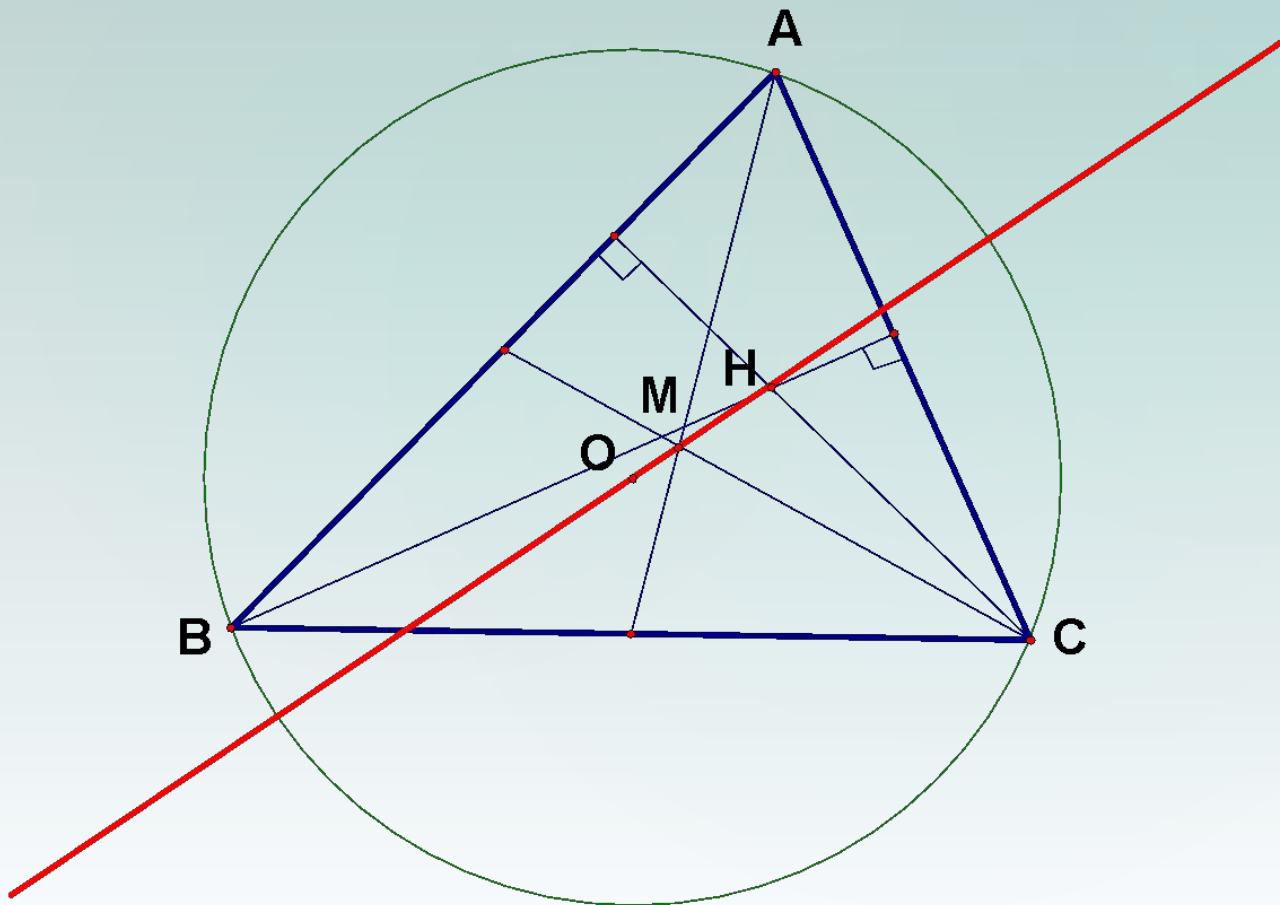
Как это работает...



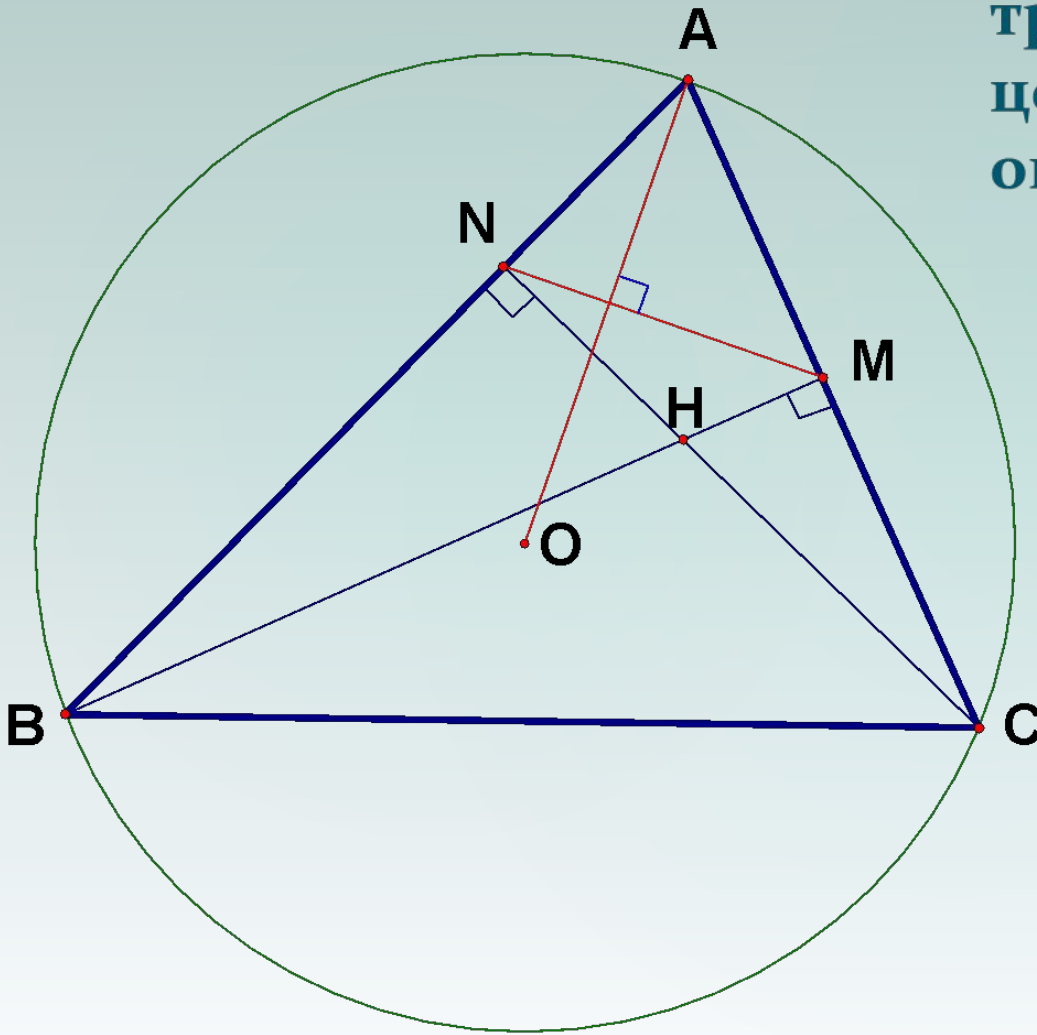
Если H точка пересечения высот треугольника ABC , а O — центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до середины стороны BC .

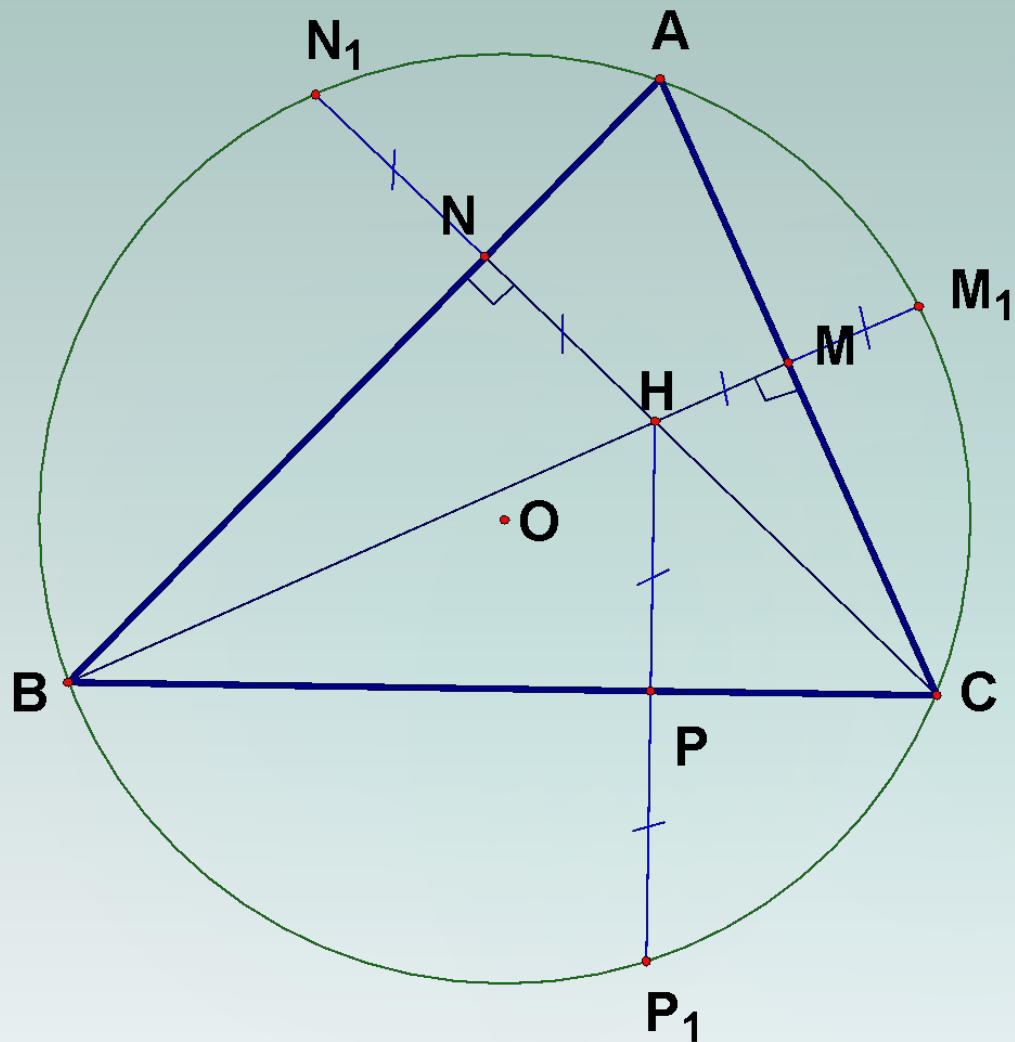
Как это доказать...

Точки O , H и точка M пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причём точка M лежит на отрезке OH и $OM:MH = 1:2$.

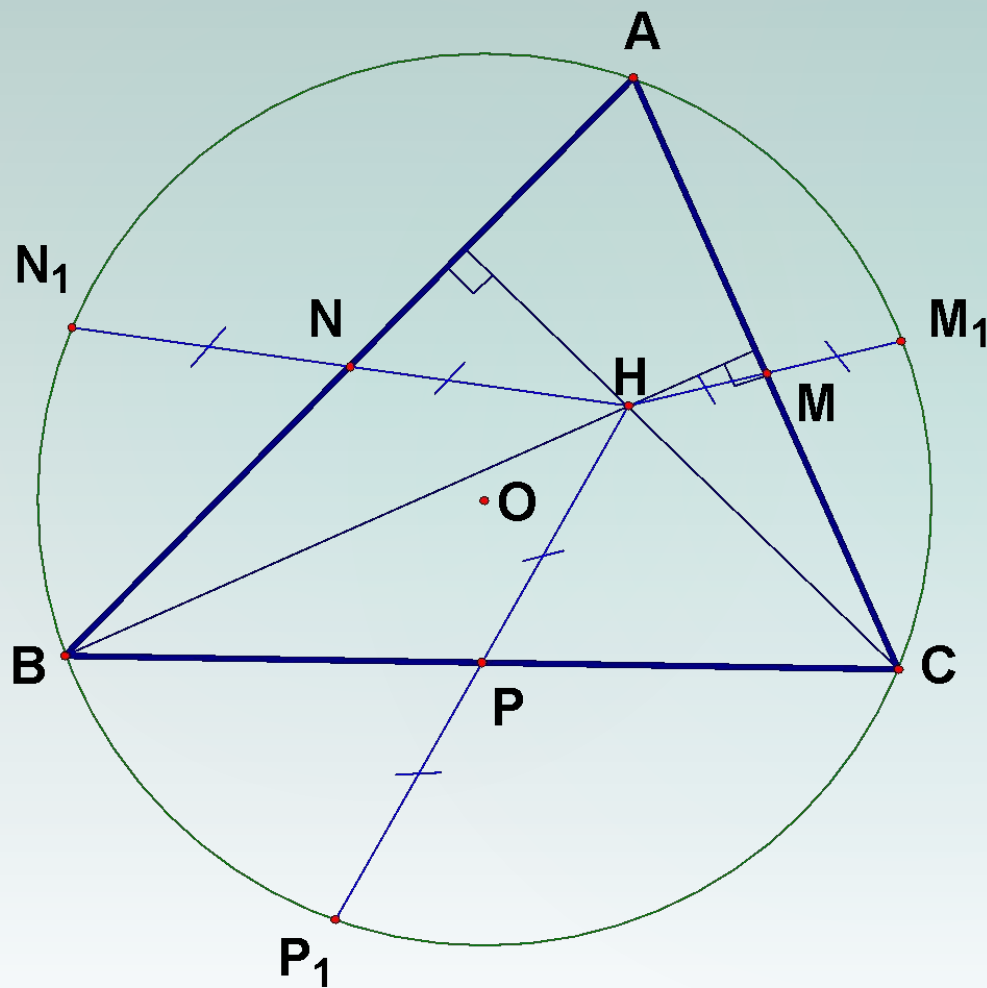


Если BM и CN — высоты
треугольника ABC , а O —
центр описанной
окружности, то $OA \perp MN$.

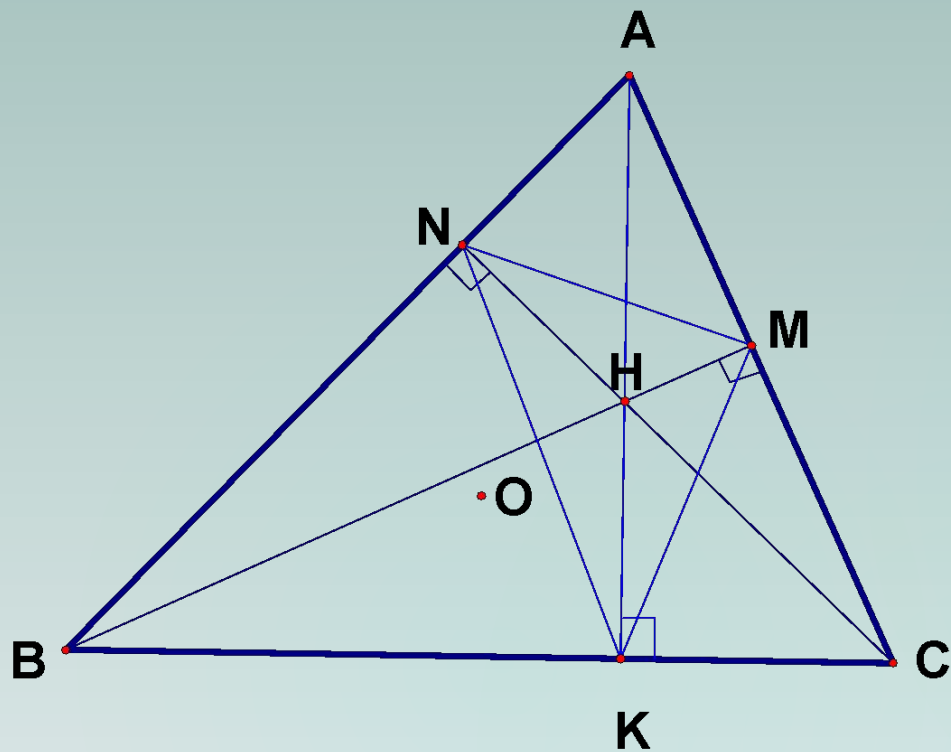




Точки, симметричные
точке пересечения
высот (ортоцентру)
треугольника ABC
относительно прямых
 AB , AC и BC , лежат на
описанной
окружности
треугольника ABC .



Точки, симметричные
точке пересечения
высот треугольника
 ABC относительно
середин его сторон,
лежат на описанной
окружности
треугольника ABC .



Если AK , BM и CN — высоты остроугольного треугольника ABC , то биссектрисы треугольника KMN (ортотреугольника треугольника ABC) лежат на прямых AK , BM и CN .

Если же треугольник ABC тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника KMN .

