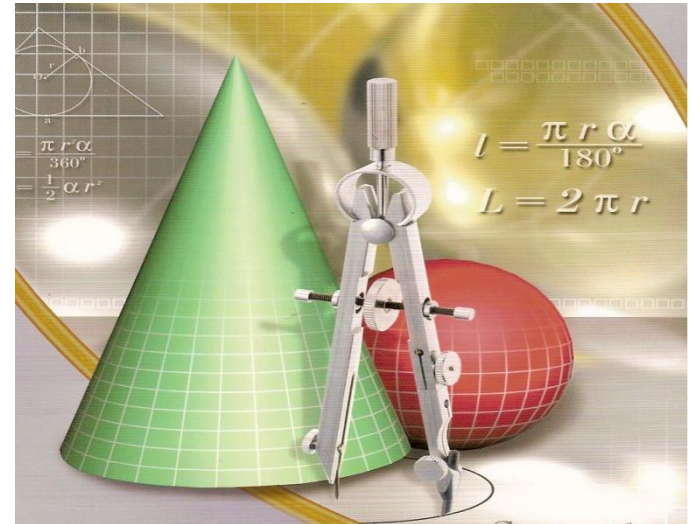


Тема урока:  
«Параллелограмм. Свойства  
параллелограмма»



## ПЛАН УРОКА:

### Вспомним

- свойства параллельных прямых
- признаки равенства треугольников

### Узнаем

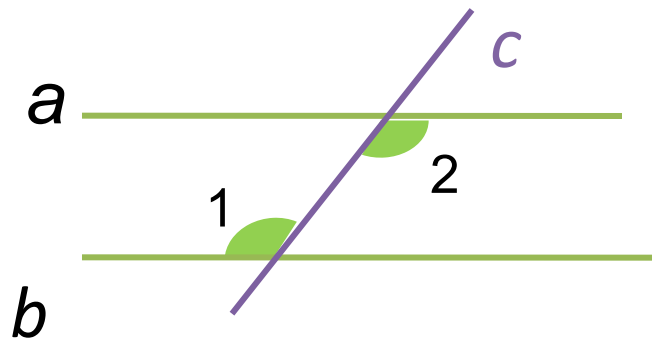
- определение параллелограмма
- свойства параллелограмма

### Научимся

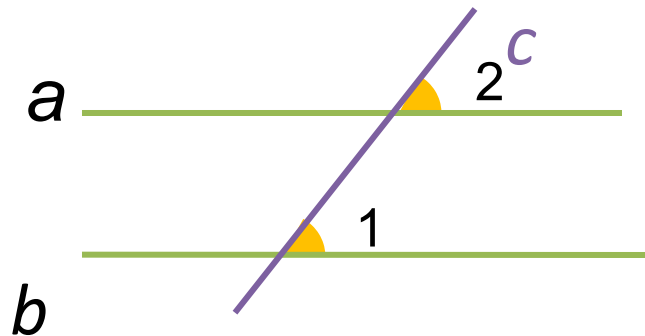
- чертить параллелограмм
- применять свойства параллелограмма при решении задач

# Продолжите предложение:

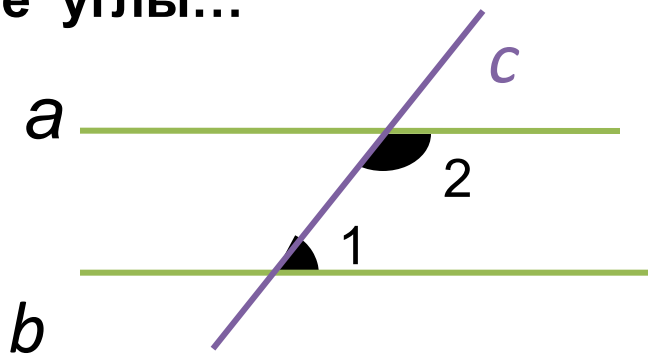
При пересечении двух параллельных прямых третьей секущей...



накрест лежащие углы...



соответственные углы ...

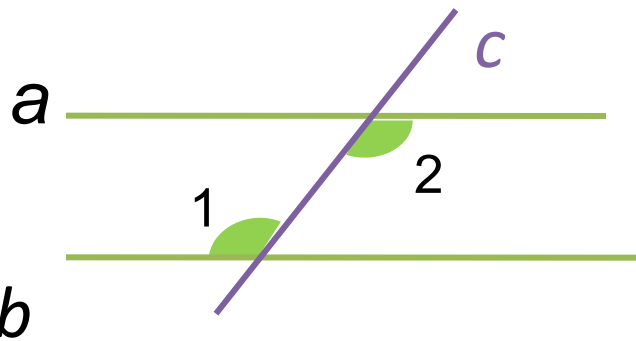


сумма односторонних углов

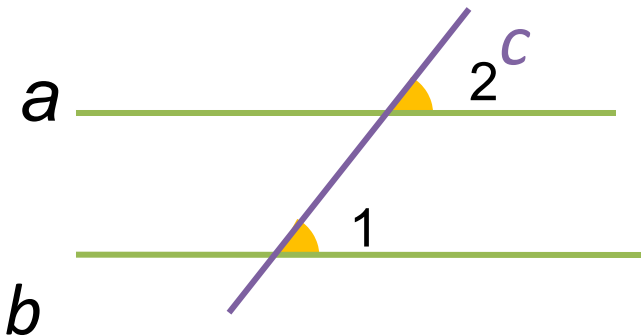
$$\angle 1 + \angle 2 = \dots$$

# Продолжите предложение:

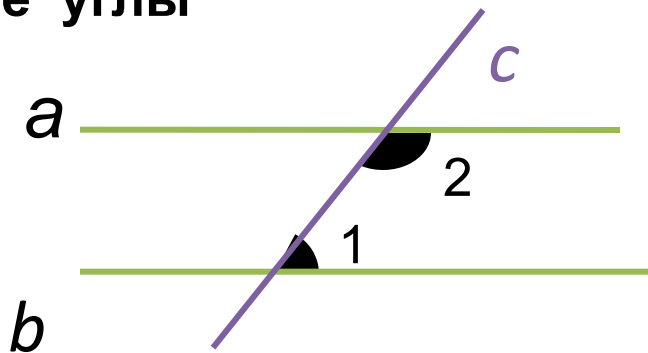
При пересечении двух параллельных прямых третьей секущей...



накрест лежащие углы  
равны



соответственные углы  
равны

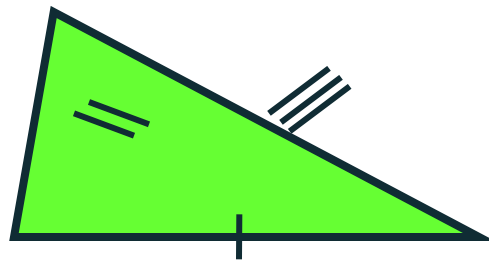
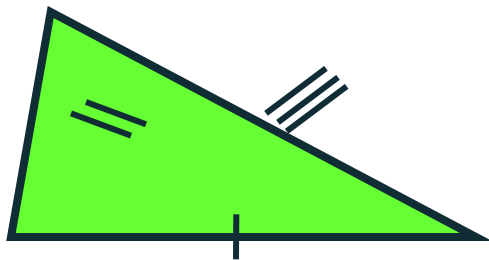
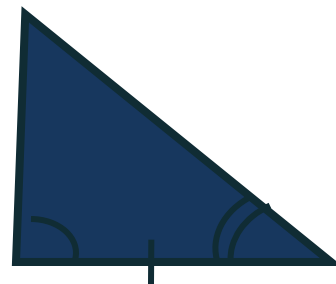
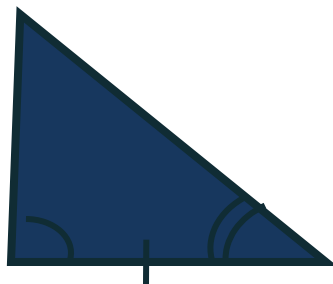
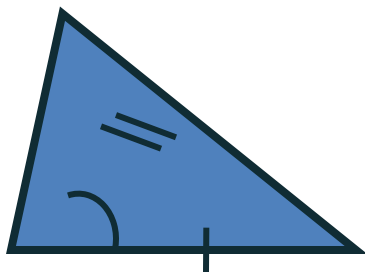
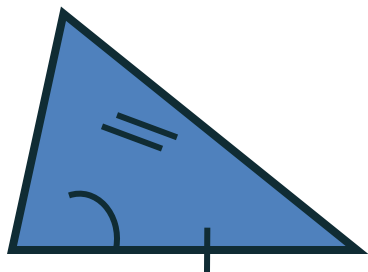


сумма односторонних  
углов

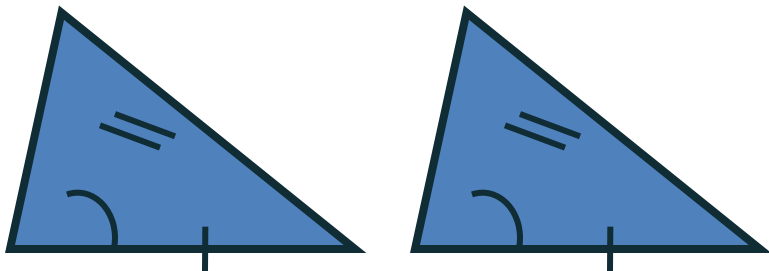
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

Продолжите предложение:

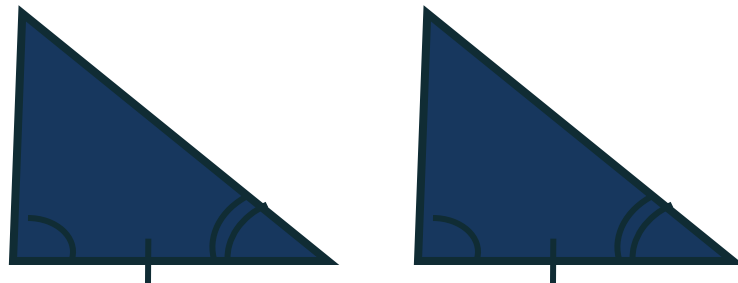
Два треугольника равны, если ...



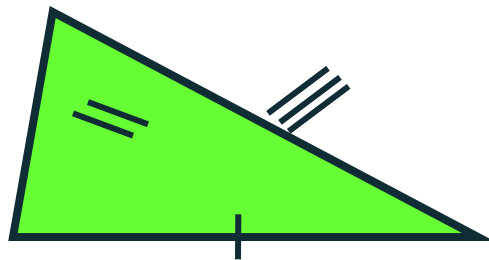
**Продолжите предложение:** Два треугольника равны, если ... одного  $\Delta$  соответственно равны ...



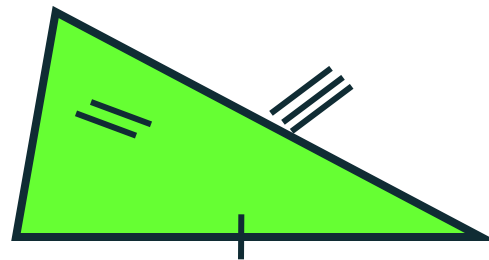
*две стороны и угол между ними*



*сторона и два прилежащих к ней угла*

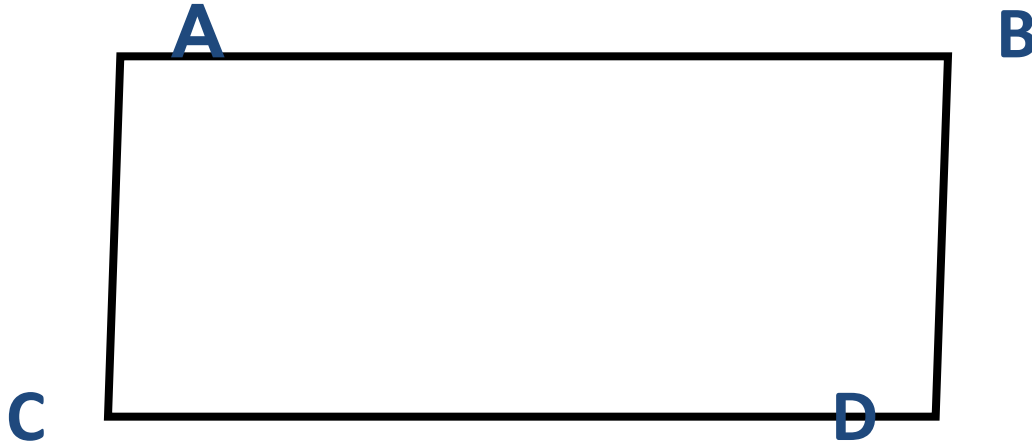


*три стороны*



# Определение

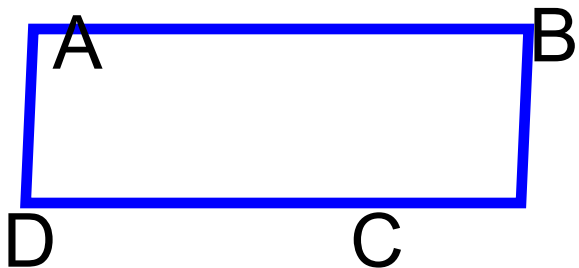
*Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом*



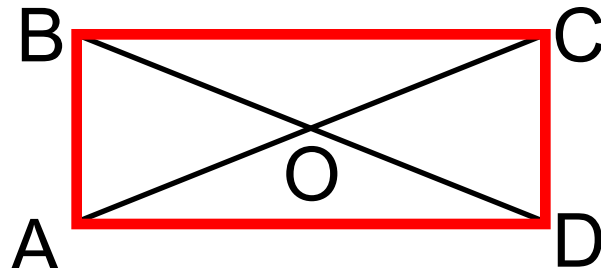
$$AB \parallel CD, AC \parallel BD$$

# На каком из чертежей изображён параллелограмм?

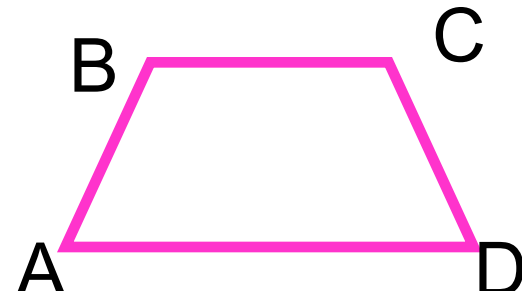
$$\begin{aligned} AB &= CD \\ BC &= DA \end{aligned}$$



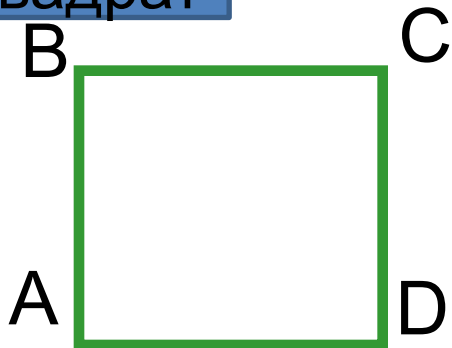
$$\begin{aligned} AO &= OC \\ BO &= OD \end{aligned}$$



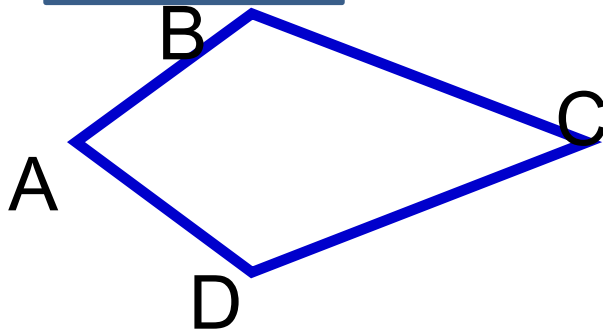
$$\begin{aligned} \angle A &= \angle D \\ \angle B &= \angle C \end{aligned}$$



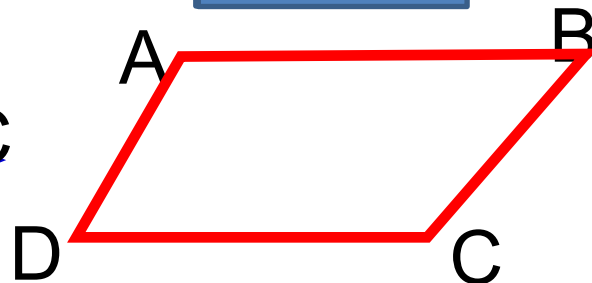
$$\begin{aligned} ABCD & \\ \text{квадрат} & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= AD \\ CD &= CB \end{aligned}$$



$$AB \parallel DC$$





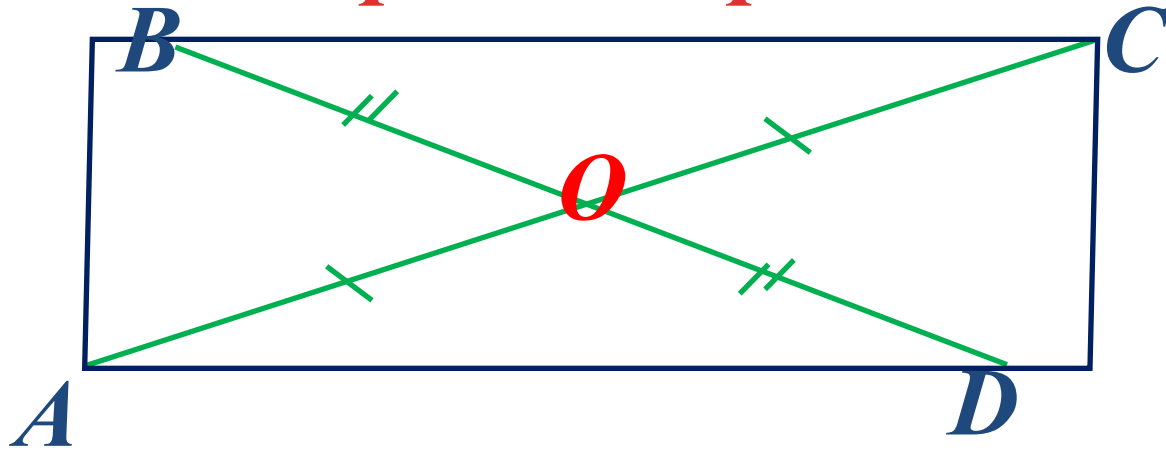
# Свойства параллелограмма



*В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.*

$$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$$
$$BC \neq AD, AB = CD$$

## 2 Свойства параллелограмма



Диагонали параллелограмма **делятся**  
**точкой пересечения пополам.**

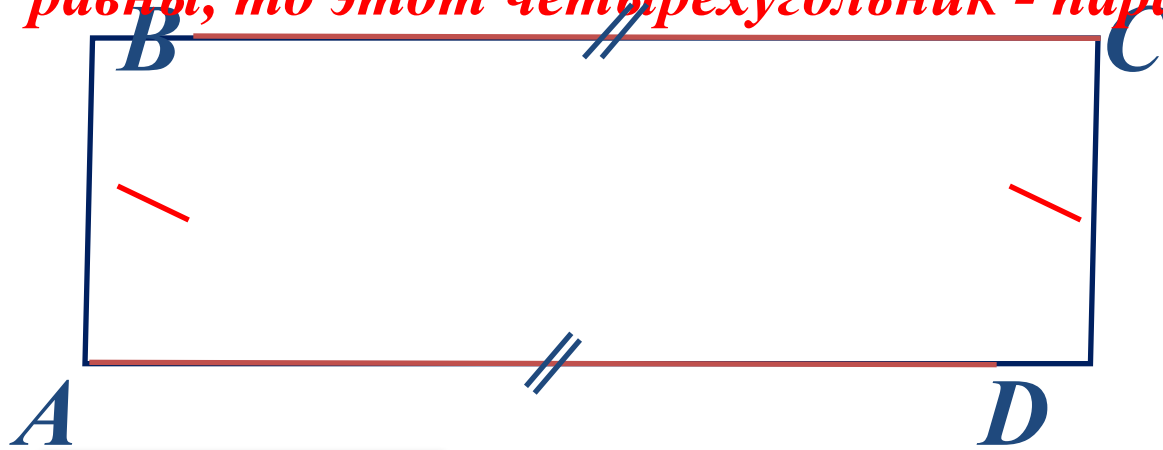
$$BO = OD, AO = OC$$

**O** – точка пересечения диагоналей



## Признаки параллелограмма

Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.



Дано:

$ABCD$  – четырехугольник,  
 $AB = CD, BC = AD$

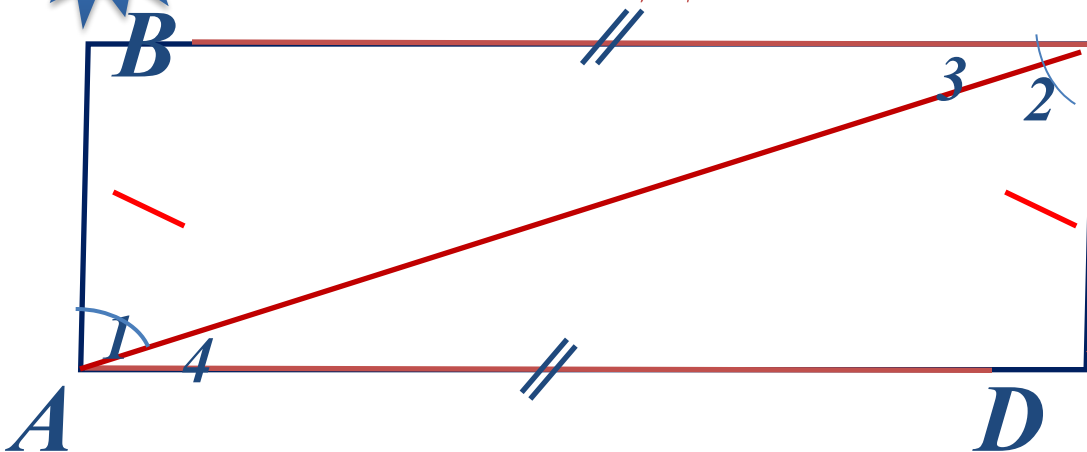
Доказать:

$ABCD$  – параллелограмм

*Доказательство*

2

## Доказательство



$ABCD$ - четырехугольник,  
 $AB = CD$ ,  $BC = AD$ .  
Проведем диагональ  $AC$ .

Рассмотрим треугольники  
 $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ :

$\triangle ABC = \triangle ACD$  – по трем сторонам

( $AC$  – общая,  $AB = CD$ ,  $BC = AD$  – по условию).

Поэтому  $\angle 1 = \angle 2$  как накрест лежащие при секущей  $AC$ .

Отсюда следует, что  $AB \parallel CD$ .

Так как  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , то по признаку 1 четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм (если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм).



## Свойства параллелограмма



В параллелограмме **сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна  $180^\circ$ .**

$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

$$\angle D + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ$$

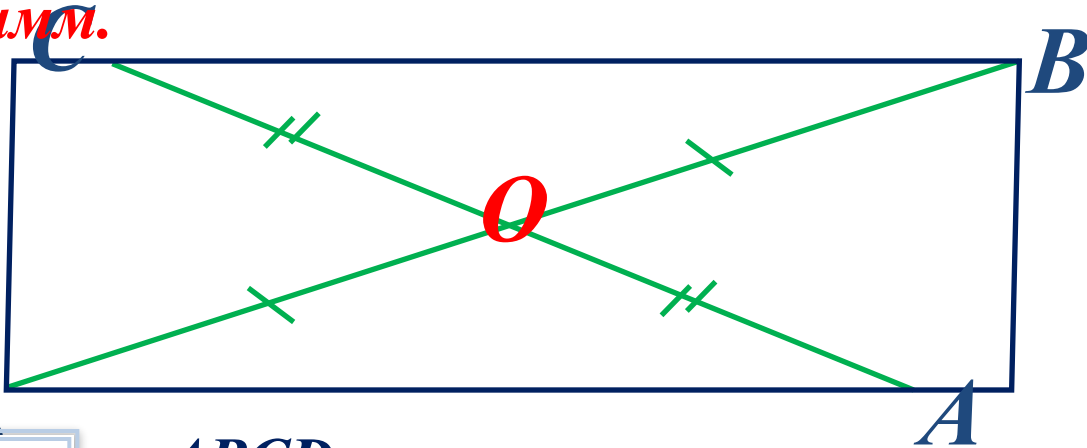
,

,



## Признаки параллелограмма

Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник параллелограмм.



Дано:

Доказать:

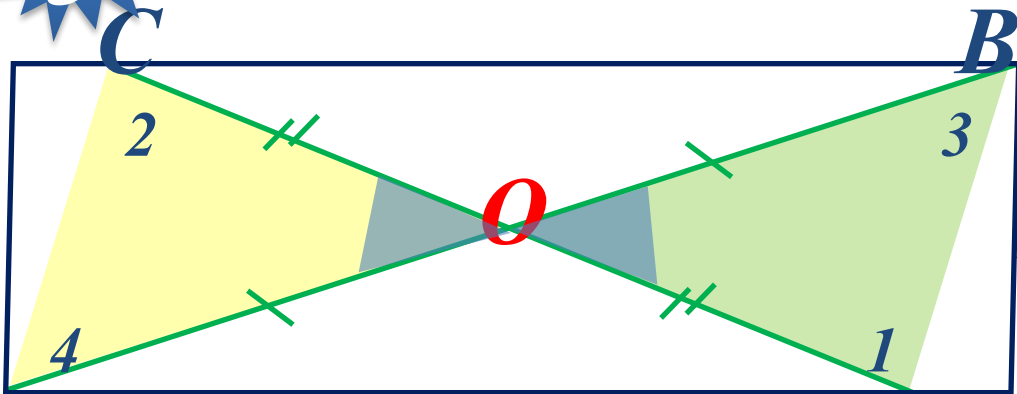
$ABCD$  – четырехугольник,  
 $BO = OD$ ,  $AO = OC$

$ABCD$  – параллелограмм

*Доказательство*



# Доказательство



$ABCD$  – четырехугольник,  
 $BO = OD$ ,  $AO = OC$ .  
 Проведем диагонали  $AC$  и  $BD$ .

Рассмотрим треугольники  
 $\triangle AOB$  и  $\triangle COD$ :

$\triangle AOB = \triangle COD$  – по первому признаку равенства треугольников

( $BO = OD$ ,  $AO = OC$  – по условию,  $\angle AOB = \angle COD$  – как

вертикаль.) Поэтому  $AB = CD$  и  $\angle 1 =$  Из  $\angle 1 = \angle 2$  следует, что  $AB \parallel$

Так как в четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB = CD$  и  $AB \parallel$   
 $CD$ ,

то по 1 признаку четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм

(если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то

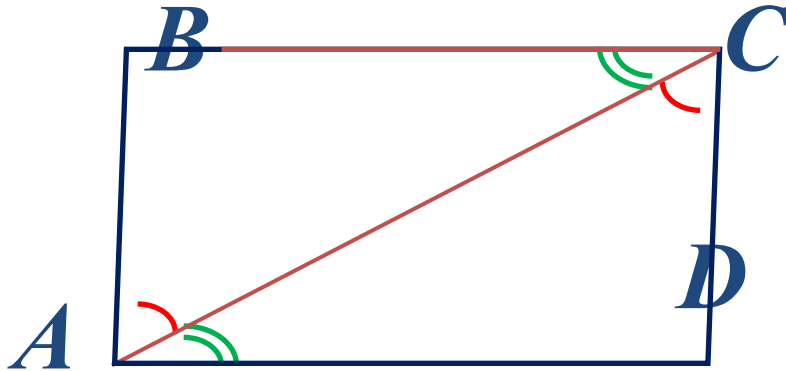
# 1 Задача

Дано:

$ABCD$  – четырехугольник,  
 $\angle BAC = \angle ACD$ ,  $\angle CAD = \angle BCA$   
 $\Rightarrow ABCD$  параллелограмм.

Доказать:

## Доказательство



Рассмотрим треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ :

1.  $\angle BAC = \angle ACD$ ,  $\angle CAD = \angle BCA$  – по

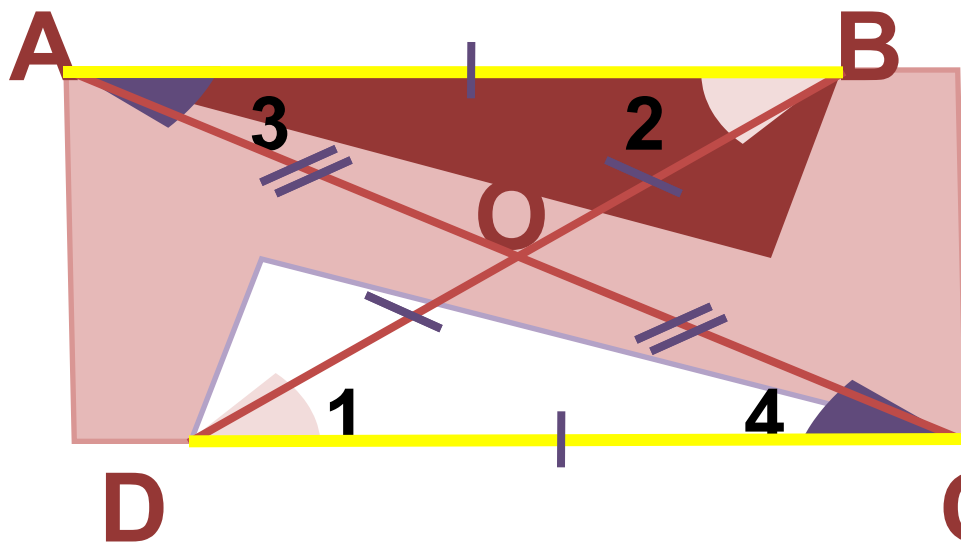
следствию  $\triangle ABC = \triangle ACD$  – по стороне и двум прилежащим углам; поэтому  $BC = AD$ .

2. Так как  $\angle BAC = \angle ACD$  – накрест лежащие углы при параллельных прямых  $BC$ ,  $AD$  и секущей -  $AC$ , то  $BC \parallel AD$ .

3. Так как  $BC = AD$  и  $BC \parallel AD$ , то по 1-му признаку параллелограмма  $ABCD$  – параллелограмм, что и требовалось доказать.



Свойство 2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



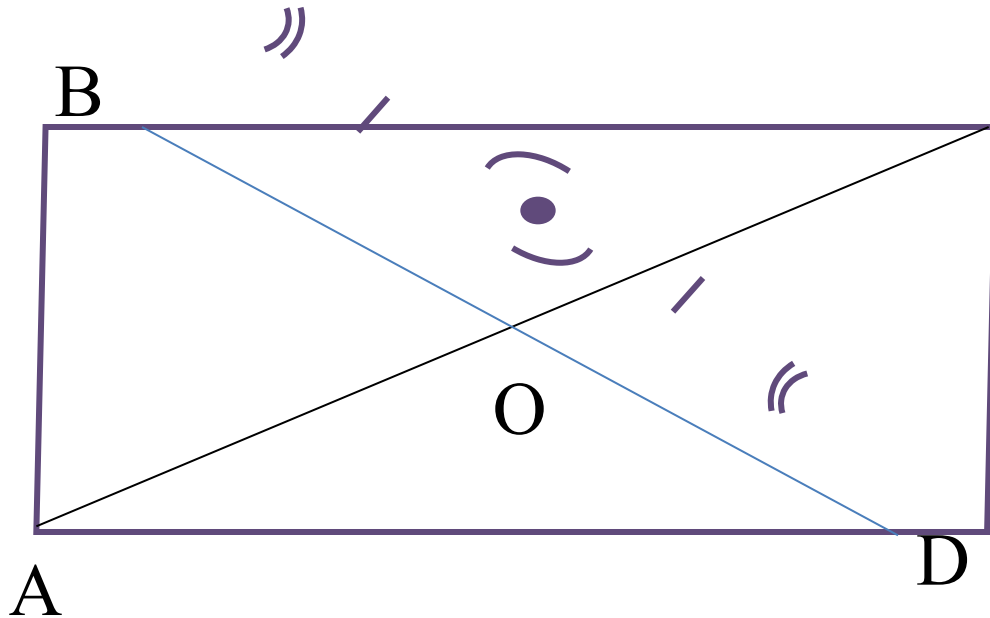
Дано:  $ABCD$  - параллелограмм  
 $BD \cap AC = O$   
 Доказать:  $BO = OD$ ,  $AO = OC$

Доказательство:  
 рассмотрим  $\triangle AOB$  и  $\triangle COD$ ,  
 $AB = CD$   
 $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$   
 (как накрест лежащие углы)  
 $AB \parallel CD$ ,  $BD, AC$  - секущие

$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD$  (по 2-му признаку равенства треугольников)  
 Следовательно:  $AO = OC$ ,  $BO = OD$

**Решите задачу.** В параллелограмме ABCD: O – точка пересечения диагоналей, отрезок MK проходит через эту точку.

Докажите, что  $\triangle OMB = \triangle OKD$



**Решение:** по свойству параллелограмма  $BO = OD$ ,  $\angle BOM = \angle KOD$  – вертикальные  $\angle MBO = \angle DOK$  – накрест лежащие при параллельных прямых BM и DK и секущей BD  $\triangle OMB = \triangle OKD$  (по стороне и двум прилежащим углам).

# 1 Признаки параллелограмма

*Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм.*



**Дано:**

*ABCD – четырехугольник,  
 $AB = CD$ ,  $AB \parallel CD$*

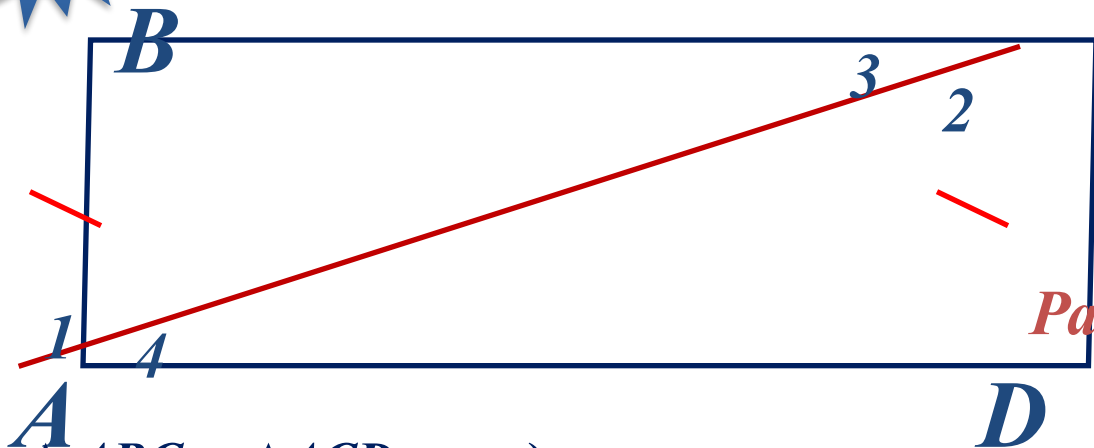
**Доказать:**

*ABCD – параллелограмм*

*Доказательство*

1

## Доказательство



Пусть  $AB = CD$  и  $AB \parallel CD$   
проведем диагональ  $AC$ .

Рассмотрим треугольники  
 $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ :

$\triangle ABC = \triangle ACD$  – по двум сторонам и углу между ними

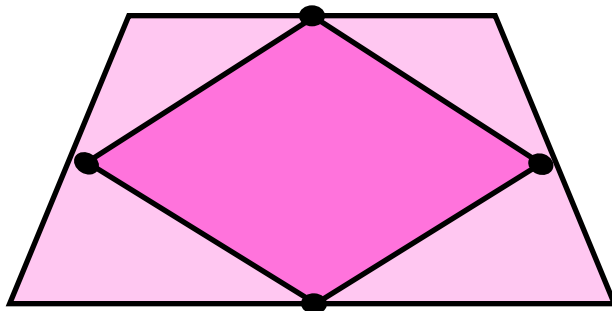
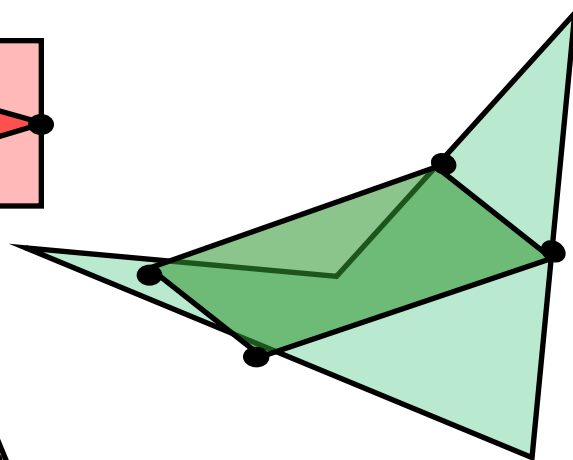
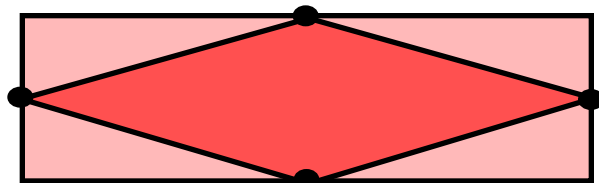
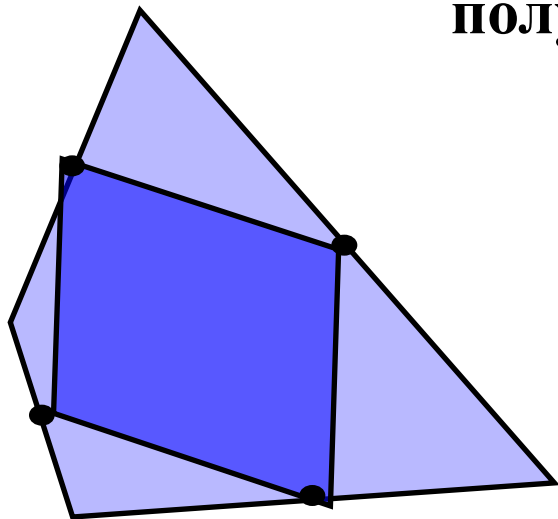
( $AC$  – общая,  $AB = CD$  – по условию,  $\angle 1 = \angle 2$  как накрест лежащие при  $AB \parallel CD$  и секущей  $AC$ ).

Поэтому  $\angle 3 = \angle 4$ .  
Но  $\angle 3$  и  $\angle 4$  – накрест лежащие углы при пересечении

прямых  $BC$  и  $AD$  секущей –  $AC$ . Следовательно  $BC \parallel AD$ .  
Таким образом, если в четырехугольнике противоположные стороны параллельны, то этот четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм.

**Середины сторон произвольного четырёхугольника являются  
вершинами параллелограмма**

**Что за точки отмечаются на четырёхугольниках, какие фигуры  
получаются при их соединении?**



**Теорема Вариньона**

# Рефлексия

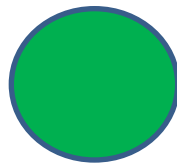
На уроке:

*Я узнал...*

*Я научился....*

*Мне понравилось....*

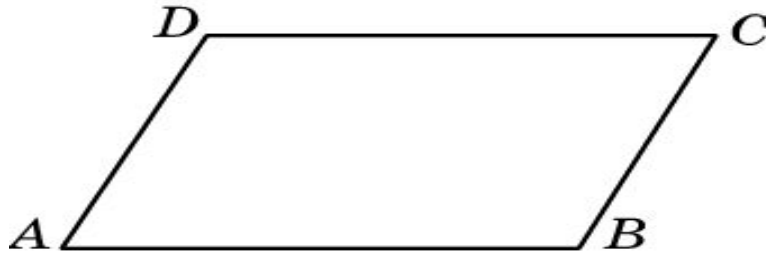
*Я затруднялся...*



Мне все понятно  
*Я молодец!!!*

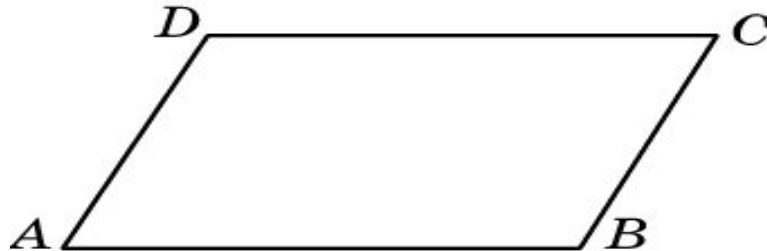
# Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



# Свойства параллелограмма

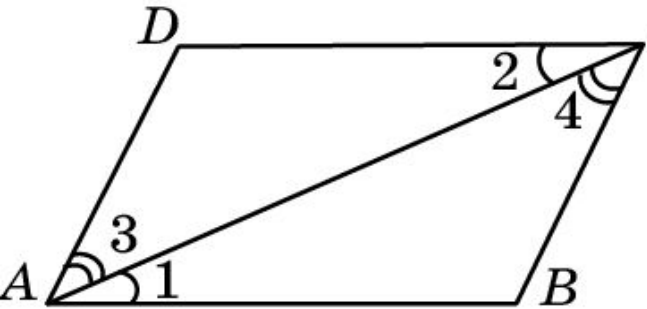
**Свойство 1.** Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне равна  $180^\circ$ .



**Доказательство.** Углы, прилежащие к стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними углами. Поэтому их сумма равна  $180^\circ$ .

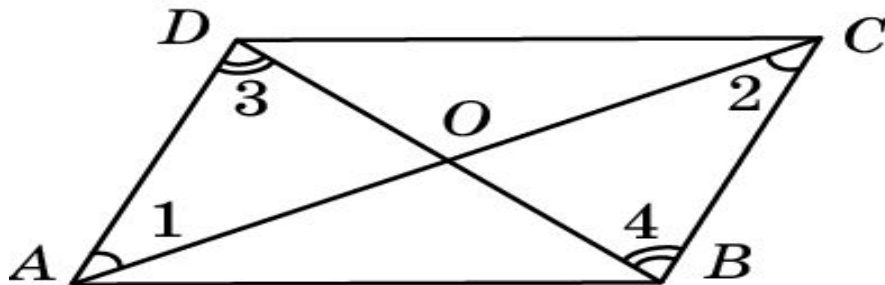


**Свойство 2.** В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.



**Доказательство.** Пусть  $ABCD$  – параллелограмм. Диагональ  $AC$  разбивает его на два треугольника  $ABC$  и  $CDA$ , которые равны по второму признаку равенства треугольников ( $AC$  – общая сторона,  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$ , как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому  $AB=CD$ ,  $BC=AD$  и  $\angle B = \angle D$ . Кроме этого,  $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$ .

**Свойство 3.** Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



**Доказательство.** Пусть  $ABCD$  – параллелограмм,  $O$  – точка пересечения его диагоналей.  $\triangle AOD = \triangle COB$  по второму признаку равенства треугольников ( $AD = BC$  по свойству 2,  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$ , как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому  $AO = OC$  и  $BO = OD$ .

# Вопрос 1

Какой четырехугольник называется параллелограммом?

**Ответ:** Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

## Вопрос 2

Чему равна сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне.

Ответ:  $180^\circ$ .

## Вопрос 3

Что можно сказать о противоположных: а) сторонах; б) углах параллелограмма?

**Ответ:** В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

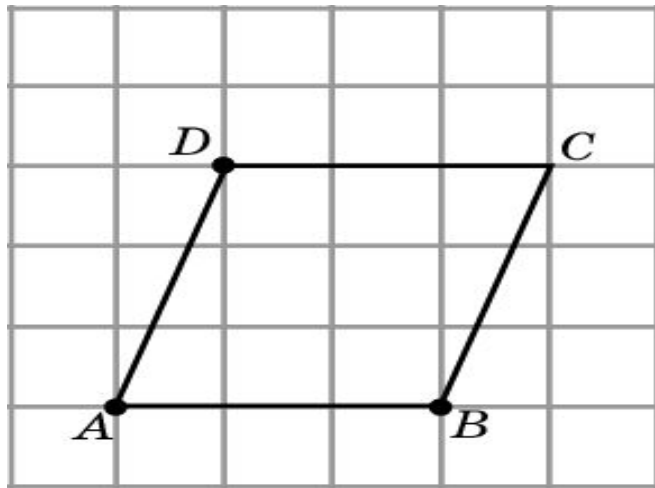
## Вопрос 4

Что можно сказать о диагоналях параллелограмма?

**Ответ:** Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

# Упражнение 1

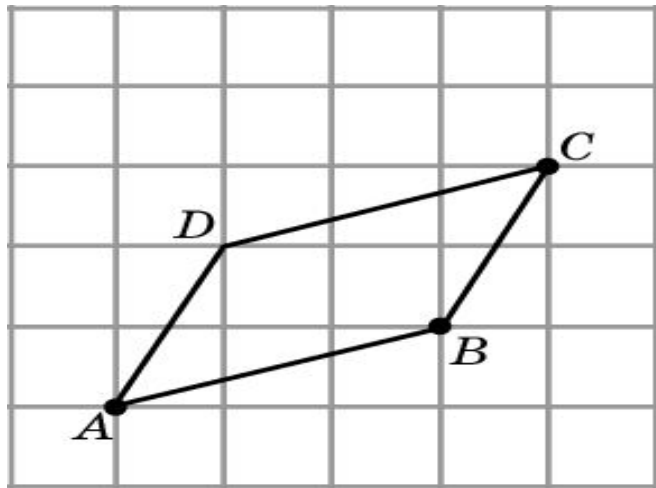
Изобразите параллелограмм  $ABCD$ , три вершины которого даны на рисунке.



Ответ:

## Упражнение 2

Изобразите параллелограмм  $ABCD$ , три вершины которого даны на рисунке.

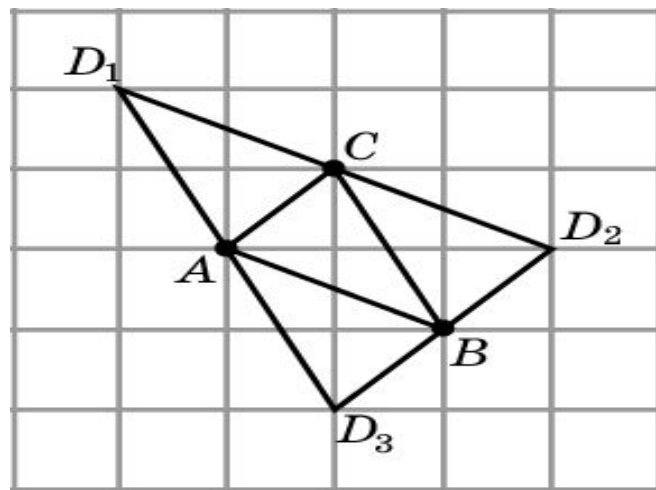


Ответ:



## Упражнение 3

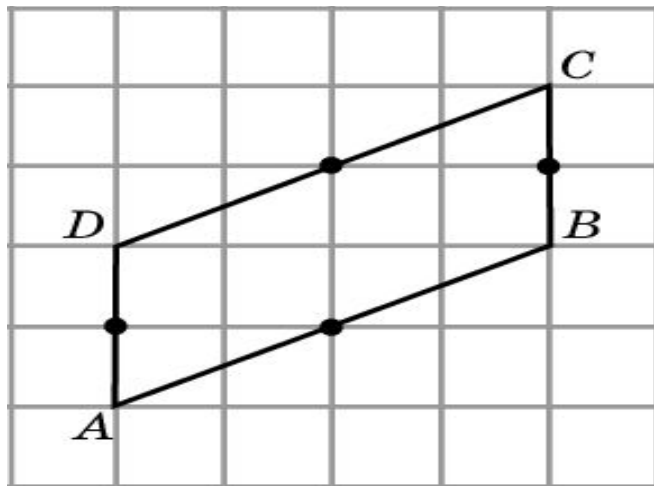
Изобразите параллелограмм, три вершины которого даны на рисунке. Сколько решений имеет задача?



Ответ: 3.

## Упражнение 4

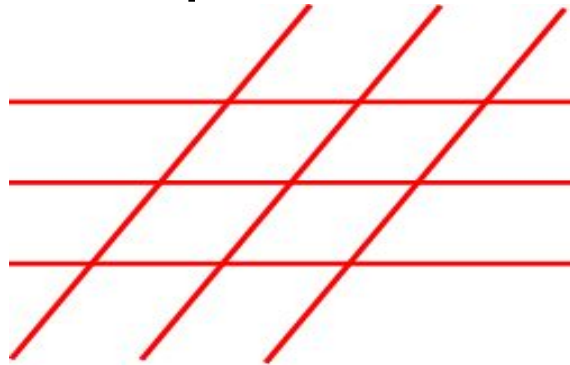
Изобразите параллелограмм  $ABCD$ , середины сторон которого даны на рисунке.



Ответ:

# Задача 1

Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько при этом получилось параллелограммов?



Ответ: 9.

## Задача 2

Сколько различных параллелограммов можно получить из двух равных треугольников, прикладывая их друг к другу различным образом?

Ответ: 3.

## Задача 2

Сколько различных параллелограммов можно получить из двух равных треугольников, прикладывая их друг к другу различным образом?

Ответ: 3.

## Задача 3

У параллелограмма две стороны равны 10 см и 15 см. Чему равны две другие стороны?

Ответ: 10 см и 15 см

## Задача 2

Сколько различных параллелограммов можно получить из двух равных треугольников, прикладывая их друг к другу различным образом?

## Задача 3

У параллелограмма две стороны равны 10 см и 15 см. Чему равны две другие стороны?

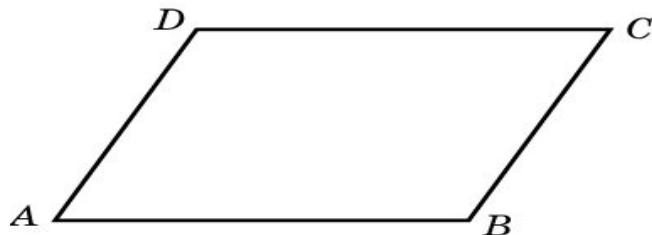
## Задача 2

У параллелограмма две стороны равны 10 см и 15 см. Чему равны две другие стороны?

**Ответ:** 10 см и 15 см.

## Упражнение 8

Найдите тупой угол параллелограмма, если его острый угол равен  $60^\circ$ .

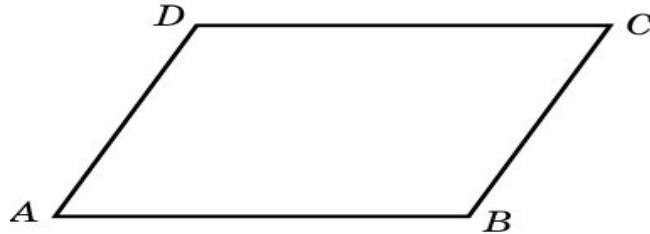


Ответ:  $120^\circ$ .



## Упражнение 9

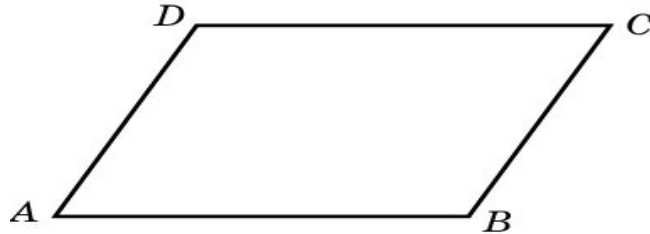
Один из внешних углов параллелограмма равен  $62^\circ$ .  
Найдите больший угол параллелограмма.



Ответ:  $118^\circ$ .

## Упражнение 10

Сумма двух углов параллелограмма равна  $80^\circ$ .  
Найдите один из оставшихся углов.



**Ответ:**  $140^\circ$ .

## Задача 1

Один угол параллелограмма больше другого на  $40^\circ$ .  
Найдите больший угол.

## Задача 2

Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы  $25^\circ$  и  $35^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.

## **Задача 1**

Один угол параллелограмма больше другого на  $40^\circ$ .  
Найдите больший угол.

**Решение:** пусть, тогда

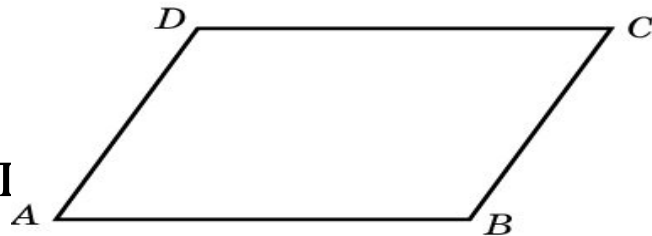
$\angle D = x + 40^\circ$ , по свойству параллел

$\angle A + \angle D = 180^\circ$ ;  $x + x + 40 = 180$

$2 \cdot x = 180 - 40$ ;  $2 \cdot x = 140$ ;  $x = 70^\circ$ ;

$\angle A = 70^\circ$  и  $\angle D = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$

**Ответ:**  $70^\circ$ ,  $110^\circ$



## Задача 1

Один угол параллелограмма больше другого на  $40^\circ$ .  
Найдите больший угол.

## Задача 2

Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы  $25^\circ$  и  $35^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.

## Задача 2

Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы  $25^\circ$  и  $35^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.

**Решение:** пусть  $\angle 3 = 35^\circ$ ,  $\angle 2 = 25^\circ$

так как  $AB \parallel DC$ , то  $\angle 3 = \angle 4 = 35^\circ$

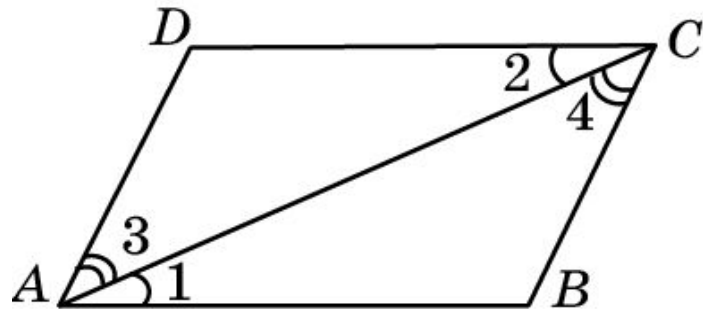
$\angle 1 = \angle 2 = 25^\circ$  как накрестлежащие углы при  $AB \parallel DC$  и секущей  $AC$ .

Тогда  $\angle DAB = \angle 3 + \angle 2 = 35^\circ + 25^\circ = 60^\circ$

По свойству параллелограмма

$\angle DAB + \angle CDA = 180^\circ$ , поэтому

$\angle CDA = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

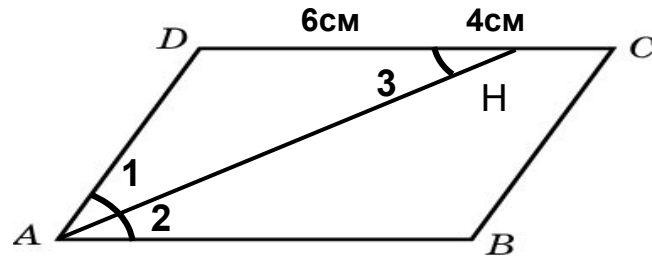


**Ответ:**  $60^\circ, 120^\circ$

## ЗАДАЧА В ФОРМАТЕ ОГЭ

В параллелограмме  $ABCD$  проведена биссектриса угла  $A$ . Она разбивает сторону  $BC$  на отрезки  $BH=6$  см и  $HC=4$  см. Найдите периметр параллелограмма

*Решение:*



## ЗАДАЧА В ФОРМАТЕ ОГЭ

В параллелограмме  $ABCD$  проведена биссектриса угла  $A$ . Она разбивает сторону  $BC$  на отрезки  $BH=6$  см и  $HC=4$  см. Найдите периметр параллелограмма

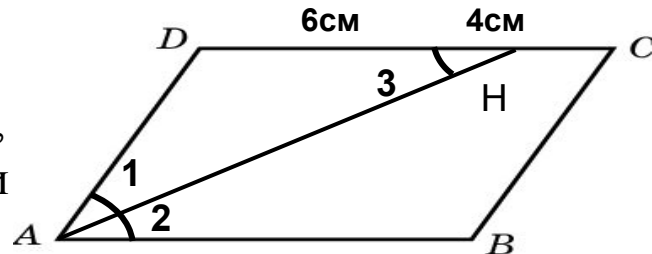
**Решение:**  $\angle 1 = \angle 2$  так как  $AH$  биссектриса угла  $A$ ,  
 $\angle 2 = \angle 3$  как накрест лежащие углы при  $AB \parallel DC$  и  
секущей  $AH$ . Следовательно  $\angle 1 = \angle 3$ , тогда  $\triangle$   
 $ADH$ -

Равнобедренный  $AD=AH=6$  см. По свойству  
параллелограмма  $AD=BC=6$  см,

$$DC=DH+HC=6+4=10 \text{ см}$$

$$P=2 \cdot (10+6)=32 \text{ см}$$

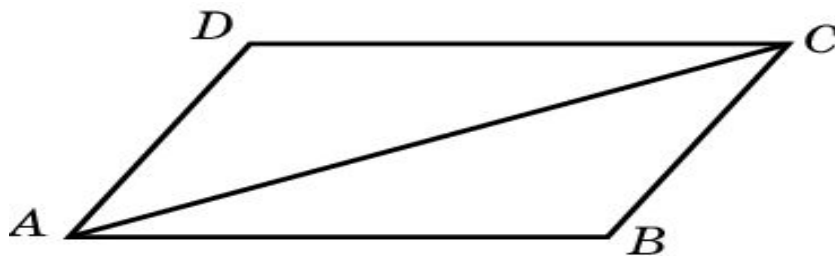
**Ответ: 32 см**





## Упражнение 12

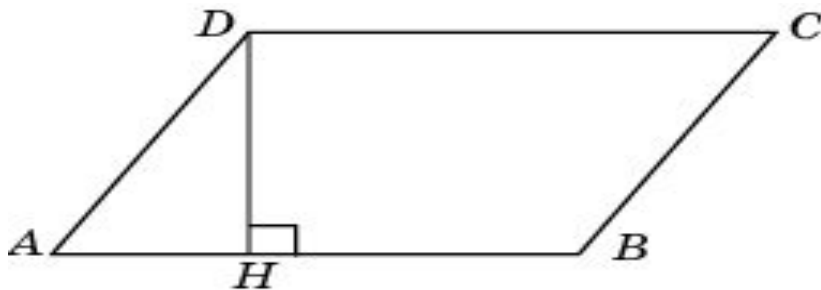
Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы  $25^\circ$  и  $35^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.



**Ответ:**  $120^\circ$ .

## Упражнение 13

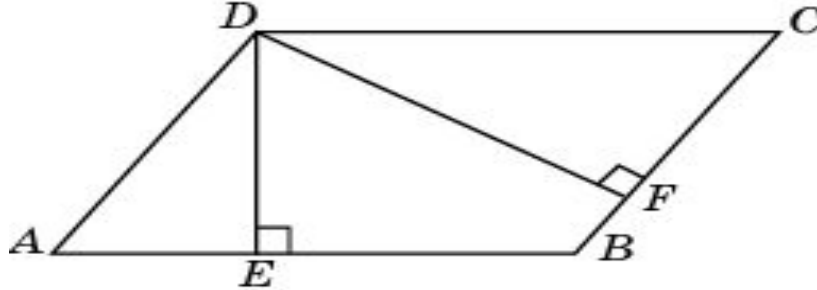
Высота параллелограмма образует с его стороной угол  $28^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.



Ответ:  $118^\circ$ .

## Упражнение 14

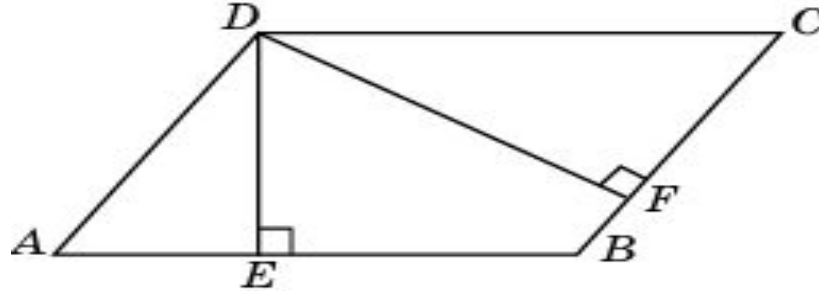
Острый угол параллелограмма равен  $60^\circ$ . Найдите угол между высотами этого параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла.



Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 15

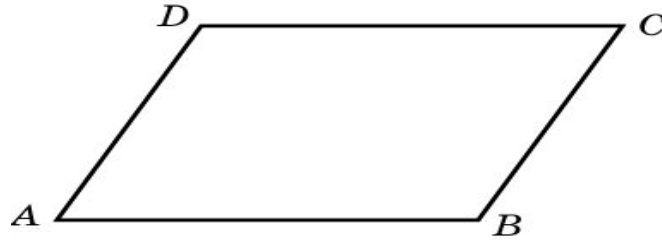
Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен  $50^\circ$ .  
Найдите острый угол параллелограмма.



Ответ:  $50^\circ$ .

## Упражнение 16

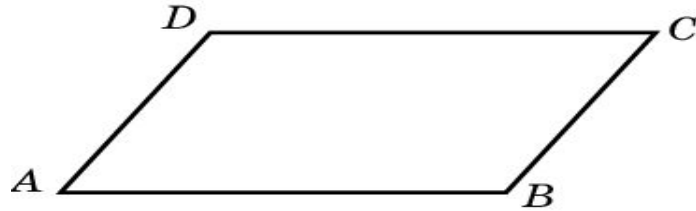
Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3:7.



Ответ: 54.

## Упражнение 17

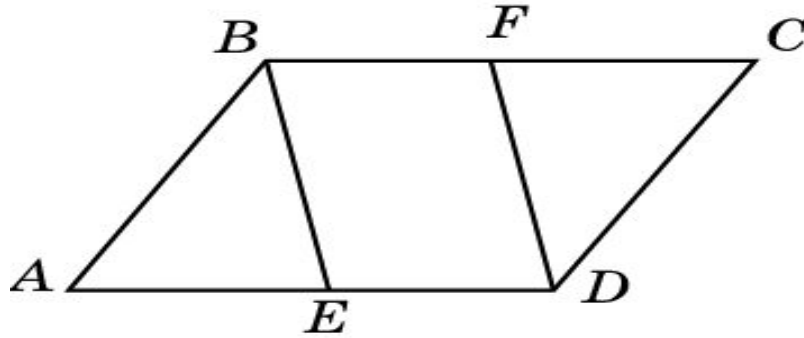
Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащими к одной стороне.



Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 18

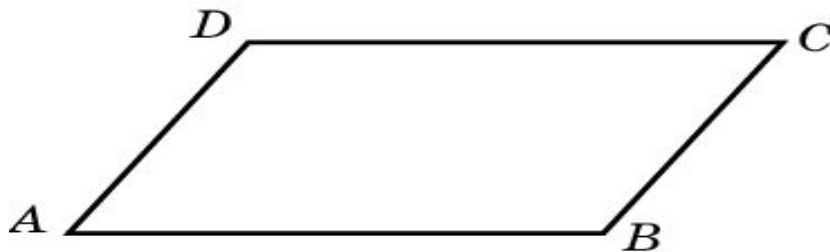
На рисунке  $ABCD$  – параллелограмм,  $BE \parallel DF$ . Какой фигурой является четырехугольник  $BFDE$ ?



**Ответ:** Параллелограммом.

## Упражнение 19

Как расположены биссектрисы углов параллелограмма (с неравными сторонами), смежных друг другу?



**Ответ:** Параллельны.



## Упражнение 20

Существует ли параллелограмм, в котором две стороны и одна диагональ соответственно равны:

а) 5 см, 2 см, 2 см; б) 7 см, 4 см, 11 см; в) 2 см, 3 см, 4 см; г) 3 см, 8 см, 10 см?

**Ответ:** а) Нет;  
б) нет;  
в) да;  
г) да.

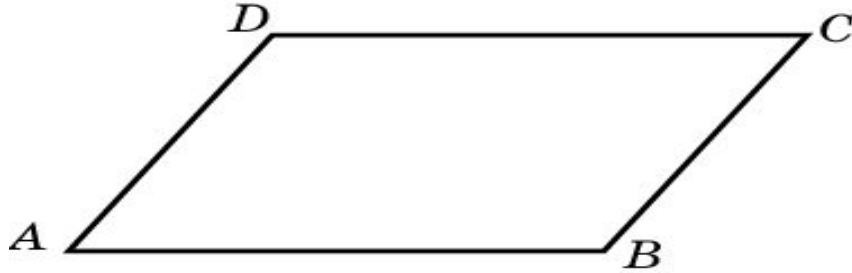
## Упражнение 21

Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 2 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.

**Ответ:** а) 11 см, 13 см, 11 см, 13 см;  
б) 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см;  
в) 8 см, 16 см, 8 см, 16 см.

## Упражнение 22

Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны параллелограмма.



**Ответ:** 0,6 м, 0,8 м, 0,6 м, 0,8 м.

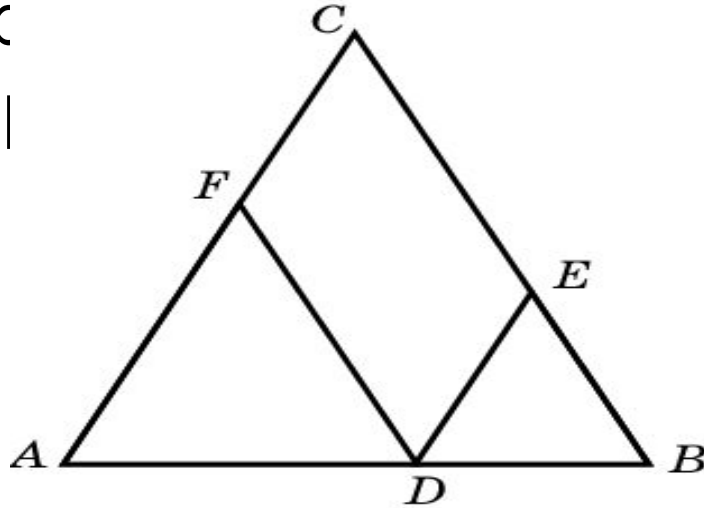
## Упражнение 23

Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см и 4 см. Найдите расстояния от нее до двух других вершин?

**Ответ:** 3 см и 4 см.

## Упражнение 24

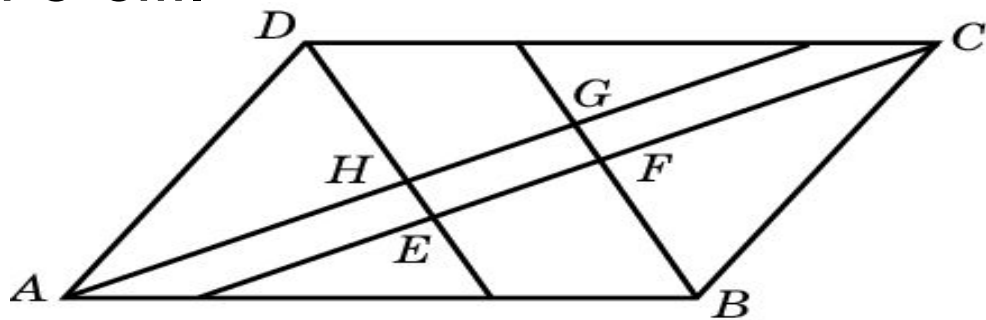
Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам, периметр получившегося па



**Ответ:** 10 м.

## Упражнение 25

Найдите диагонали четырехугольника, образованного биссектрисами углов параллелограмма, соседние стороны которого равны 3 см и 5 см.



Ответ: 2 см.