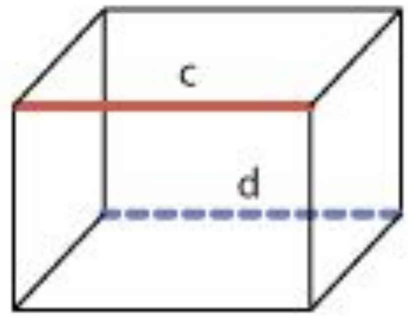
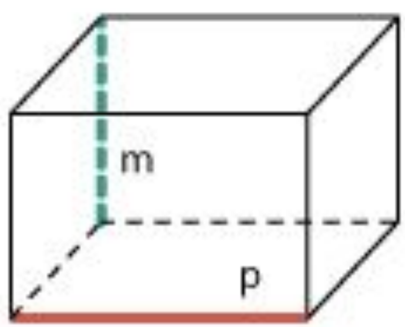
Прямые в пространстве. Угол между прямыми.

гимназия 64
учитель математики
Котельникова Н. В.

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



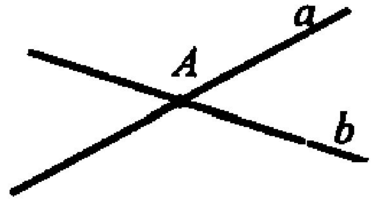
Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.



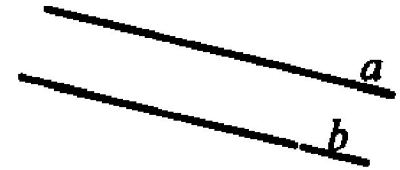
Одна дорога проходит по эстакаде, а другая под эстакадой

Прямые на плоскости

а) $a = b$

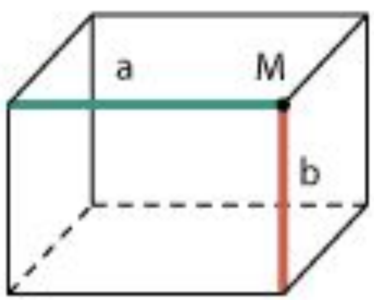


б) $a \cap b = A$



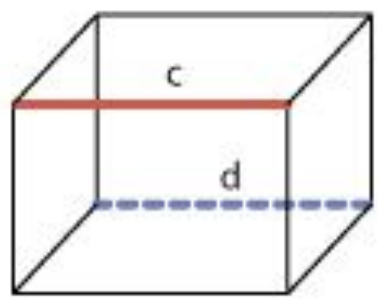
в) $a \| b$

Прямые в пространстве



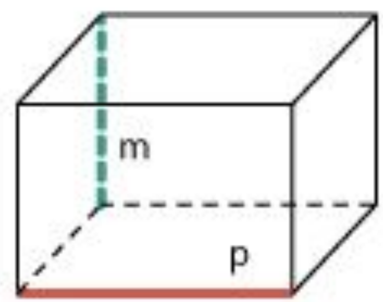
пересекаются

$a \cap b = M$



параллельны

$c \| d$



скрещиваются

$m \dot{-} p$

Теорема (признак скрещивающихся прямых)

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Дано:

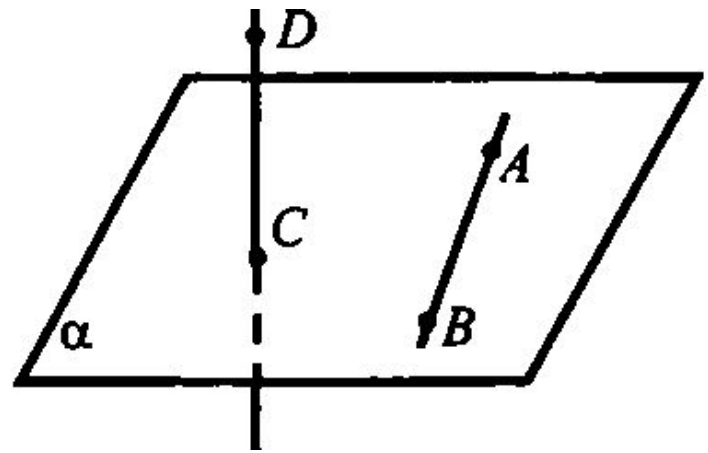
$AB \subset \alpha$, $CD \cap \alpha = C$, $C \notin AB$

Доказать,

AB скрещивается с CD.

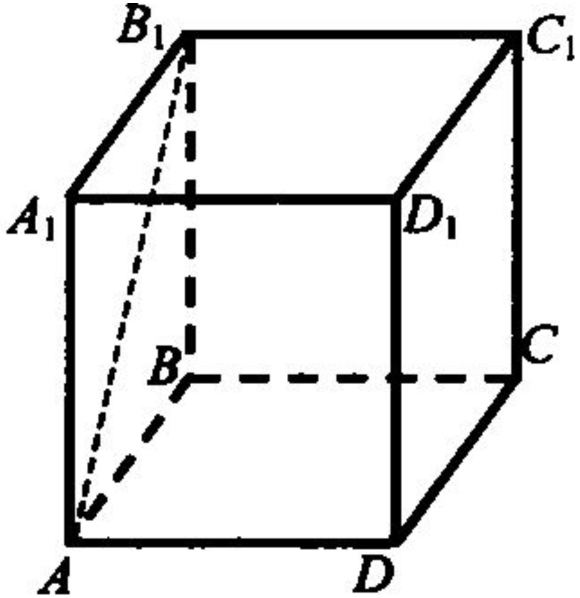
Доказательство:

Допустим, что CD и AB лежит в одной плоскости β.



$$\left.\begin{array}{l} C \in \alpha \text{ и } C \in \beta \\ AB \subset \alpha \text{ и } AB \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \equiv \beta.$$

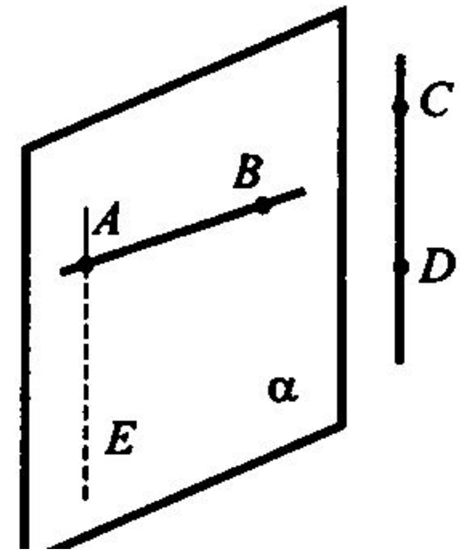
Плоскости совпадают, чего быть не может, так как прямая CD пересекает α. Плоскости, которой принадлежат AB и CD не существует и следовательно по определению скрещивающихся прямых AB скрещивается с CD.



1. Определить взаимное расположение прямых AB_1 и DC.
2. Указать взаимное расположение прямой DC и плоскости AA_1BB_1.
3. Является ли прямая AB_1 параллельной плоскости DD_1CC_1?

Теорема:

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна.



Дано: AB скрещивается CD

Построить α: $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$.

Доказать, что α – единственная.

Доказательство:

1. Через точку A проведем прямую AE, $AE \parallel CD$.
2. Прямые AE и AB пересекаются и образуют плоскость α. $AB \subset \alpha$ (по построению), $CD \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости). α – искомая плоскость.
3. Докажем, что α – единственная плоскость. α – единственная по следствию из аксиом. Любая другая плоскость, которой принадлежит AB, пересекает AE и, следовательно, прямую CD.

Теорема.

Если стороны двух углов сонаправленны, то такие углы равны.

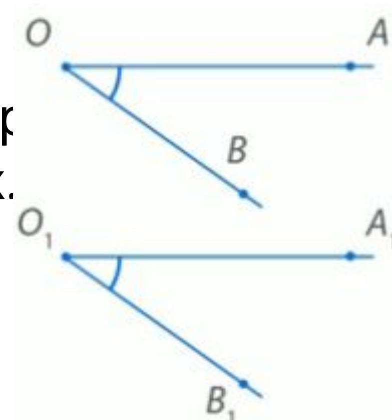
Дано:

углы AOB и $A_1O_1B_1$, стороны котор

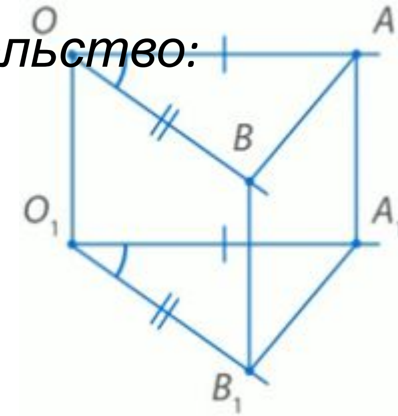
лежат на сонаправленных лучах.

Доказать:

углы AOB и $A_1O_1B_1$ *равны.*



зательство:



отметим точки A_1 и B_1 такие, что $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$.

1. *Рассмотрим* OAA_1O_1. $\left.\begin{matrix} OA \parallel O_1A_1 \\ OA = O_1A_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$ OAA_1O_1 – параллелограмм (по признаку). Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

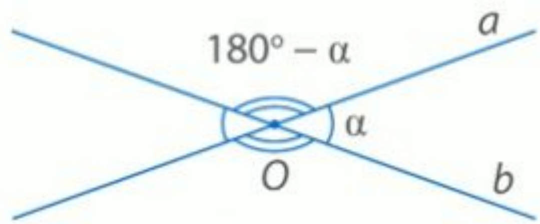
2. *Рассмотрим* OBB_1O_1. $\left.\begin{matrix} OB \parallel O_1B_1 \\ OB = O_1B_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OBB_1O_1$ – параллелограмм (по признаку). Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.

Вывод: $AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1 \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = OO_1$ и $BB_1 = OO_1 \Rightarrow AA_1 = BB_1$. Следовательно, четырехугольник AA_1BB_1 – параллелограмм (по признаку). Следовательно, $AB = A_1B_1$.

3. *Рассмотрим* ΔABO и $\Delta A_1B_1O_1$. $\Delta ABO = \Delta A_1B_1O_1$ (по трем сторонам).

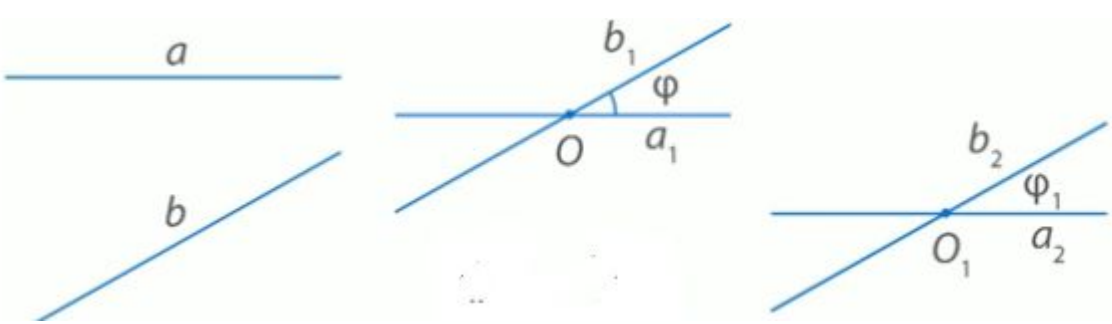
Вывод: $\angle O = \angle O_1$.

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется **углом между прямыми.**

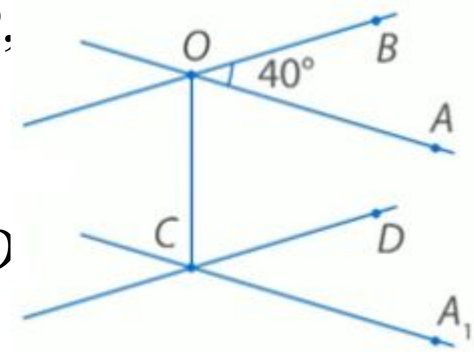


Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.



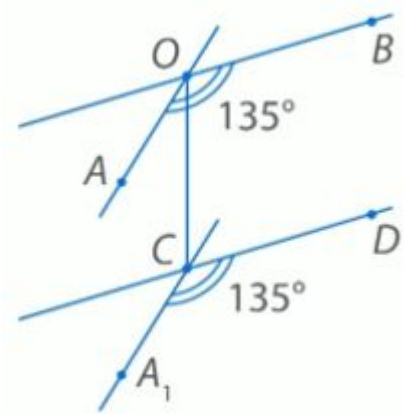
Прямые OB и CD параллельны, OA и CD скрещиваются. Найдите угол между прямыми OA и CD, если:



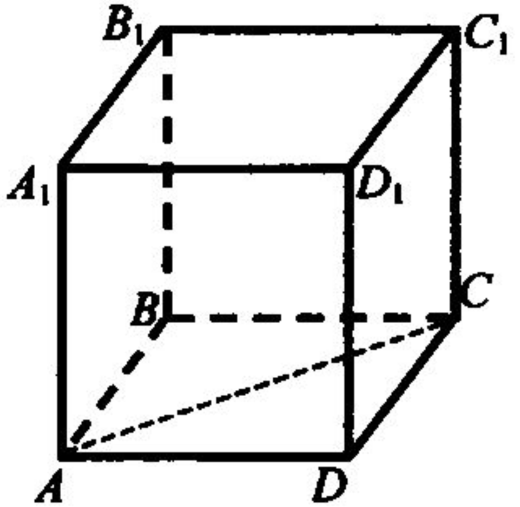
1) $\angle AOB = 40°$.

Выберем точку C. Через нее проходи прямая CD. Проведем CA_1 параллельно OA . Тогда угол A_1CD – угол между скрещивающимися прямыми OA и CD. По теореме об углах с сонаправленными сторонами, угол A_1CD равен углу AOB, то есть 40°.

2) $\angle AOB = 135°$.



Сделаем то же самое построение . Тогда угол между скрещивающимися прямыми OA и CD равен 45°, так как он наименьший из углов, которые получаются при пересечении прямых CD и CA_1.

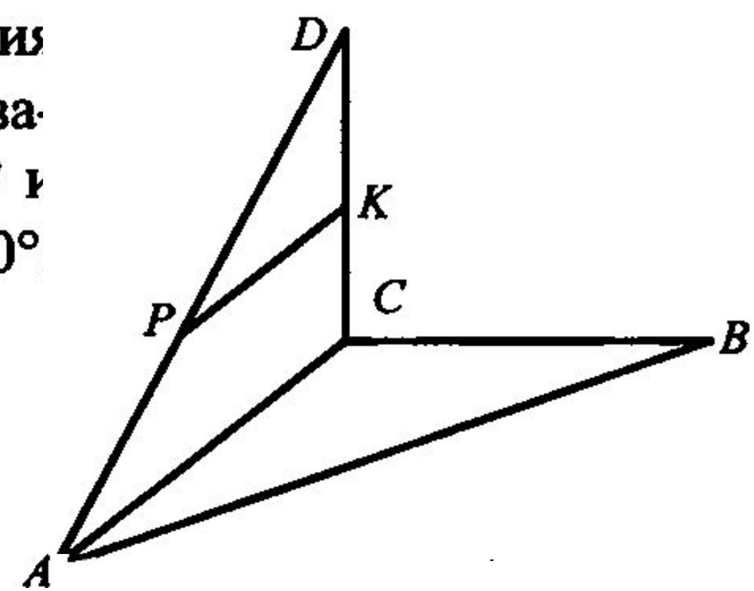


1. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

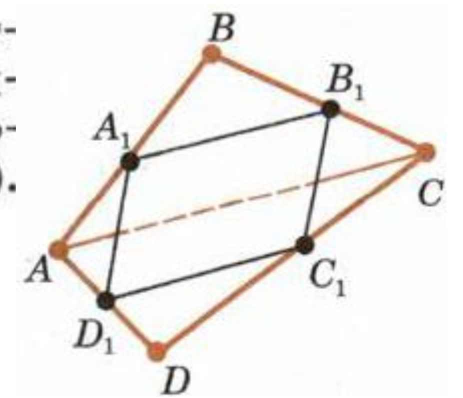
Найдите угол между прямыми. 1) BC и CC_1

2) AC и BC 3) D_1C_1 и BC 4) A_1B_1 и AC

2. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия ΔADC с основанием AC. Определить взаимное расположение прямых PK и AB и найти угол между ними, если $\angle C = 80°$, $\angle B = 40°$.

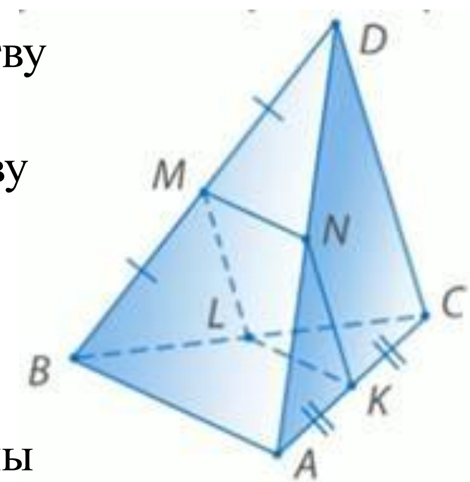


Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).



Доказательство

Пусть нам дан пространственный четырехугольник *ABCD*. *M, N, K, L* – середины ребер *BD, AD, AC, BC* соответственно. Нужно доказать, что *MNKL* – параллелограмм.



Рассмотрим треугольник *ABD*. *MN* – средняя линия. По свойству средней линии, *MN* параллельна *AB* и равняется ее половине.

Рассмотрим треугольник *ABC*. *LK* – средняя линия. По свойству средней линии, *LK* параллельна *AB* и равняется ее половине.

И *MN*, и *LK* параллельны *AB*. Значит, *MN* параллельна *LK* по теореме о трех параллельных прямых.

Получаем, что в четырехугольнике *MNKL* – стороны *MN* и *LK* параллельны и равны, так как *MN* и *LK* равны половине *AB*. Значит, по признаку параллелограмма, четырехугольник *MNKL* – параллелограмм, что и требовалось доказать.