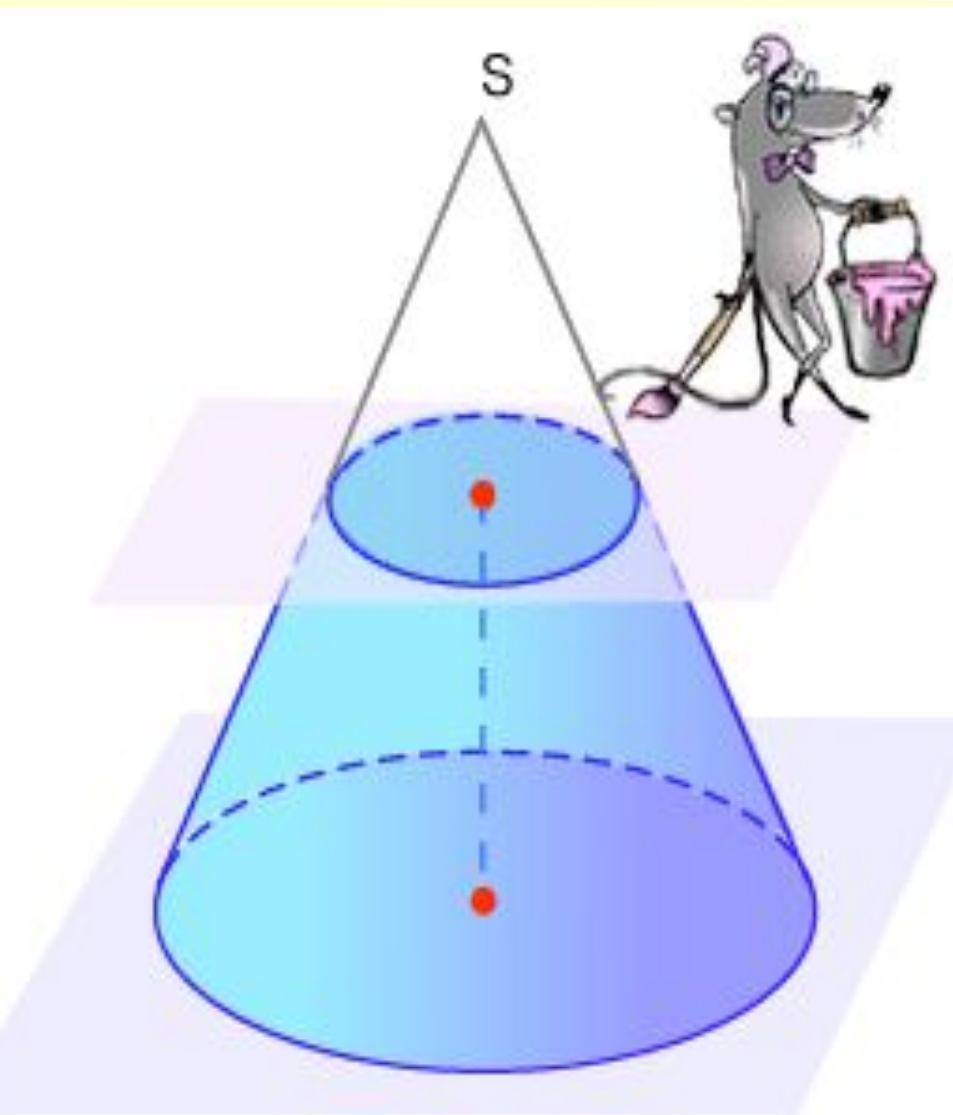
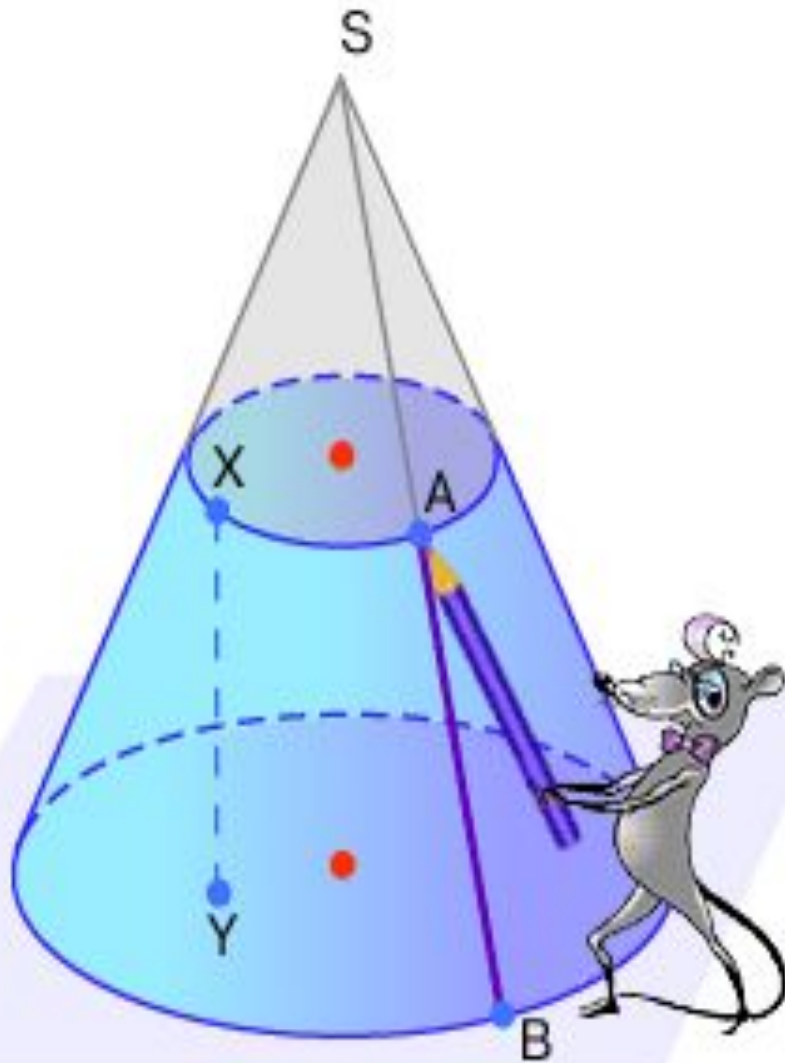


Усеченный конус.





Усеченным конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

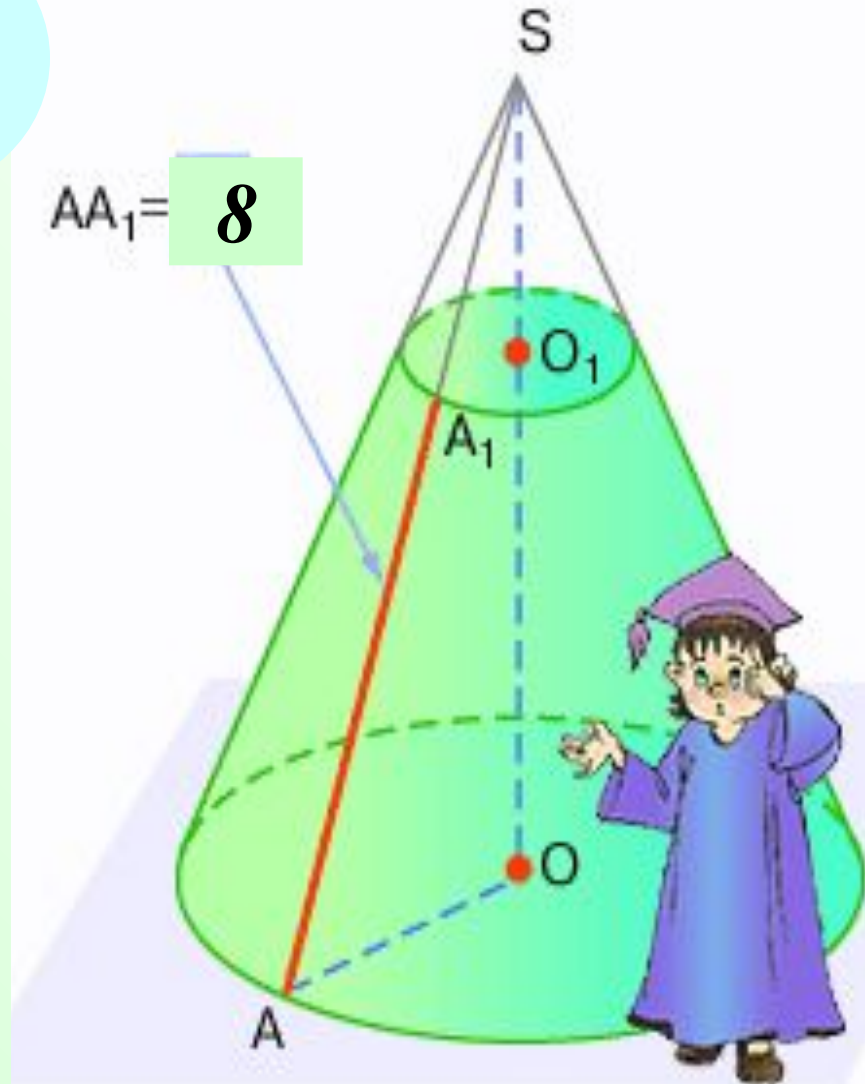


Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

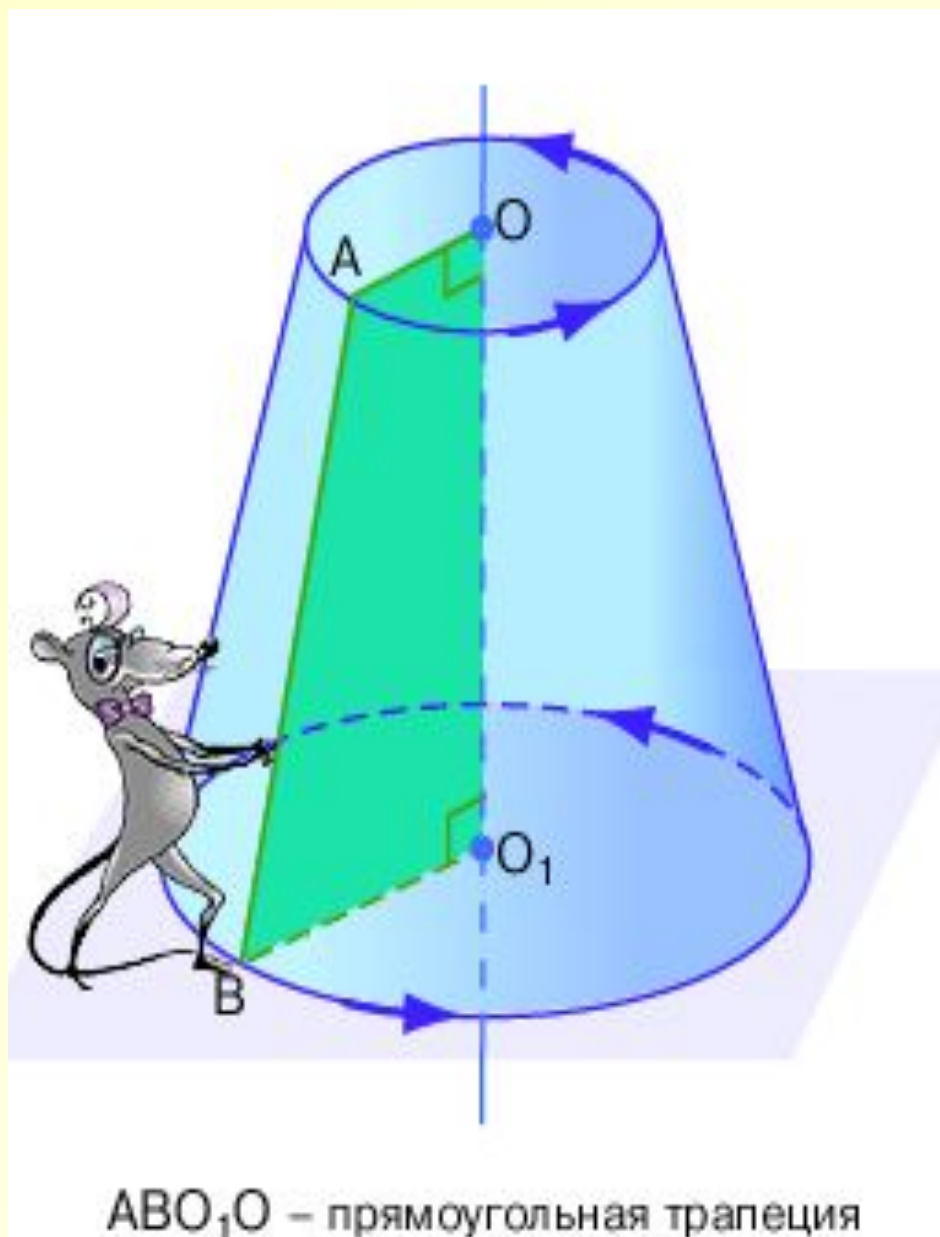
Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?



$$SO=9$$

$$SO_1=3$$

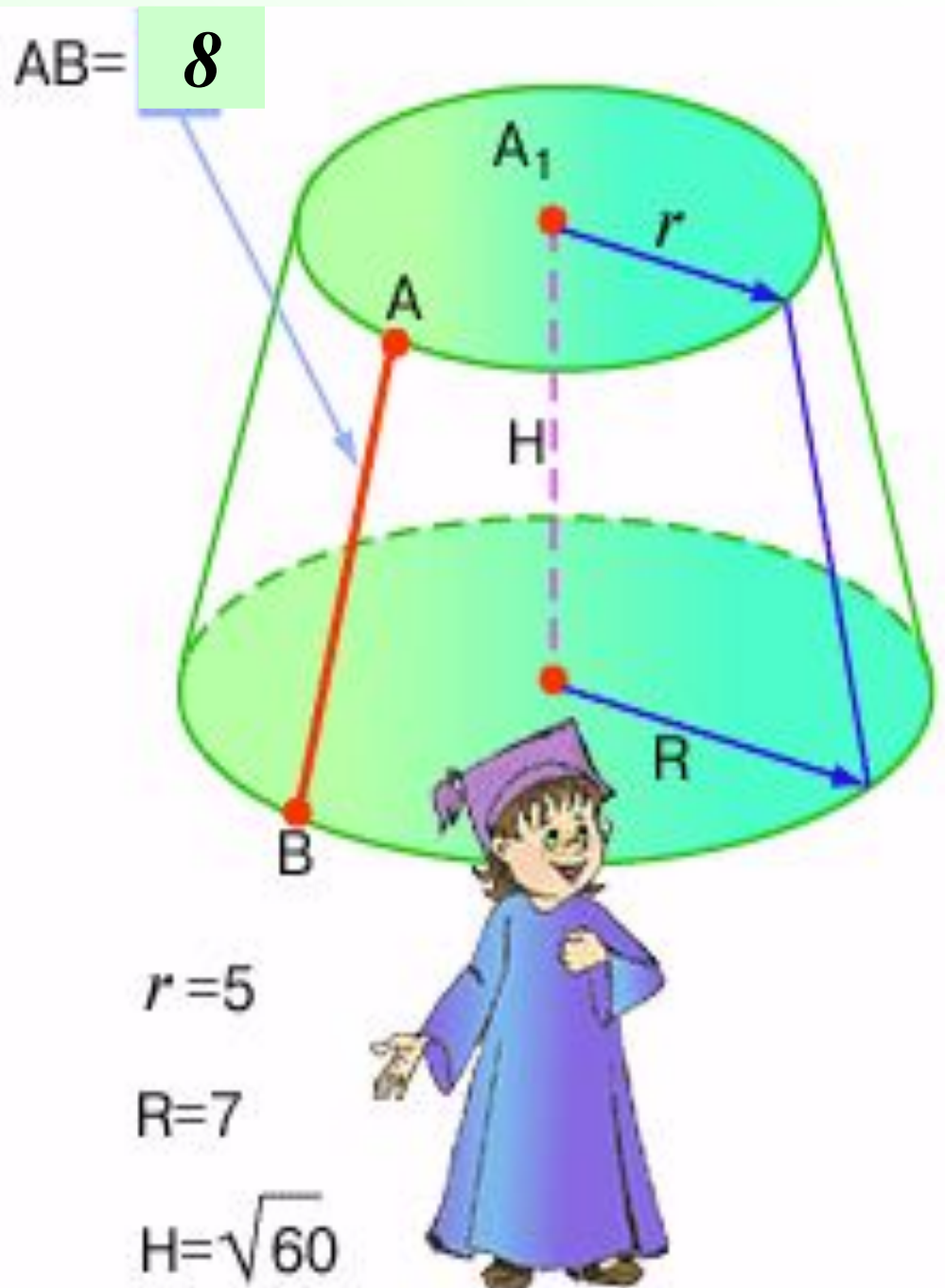
$$SA=12$$

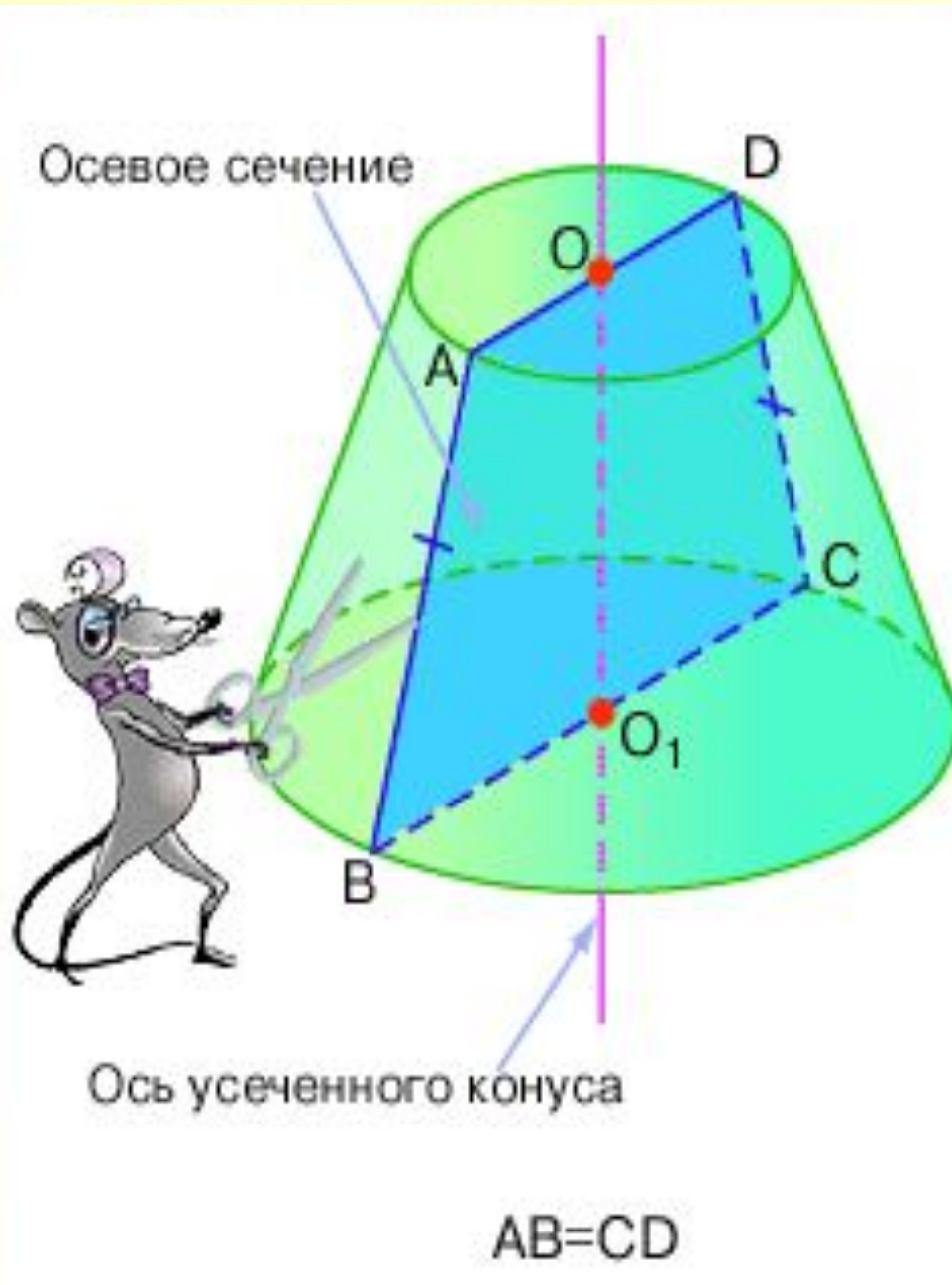


**Усеченный конус
можно
рассматривать как
тело, полученное при
вращении
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основанию.**



Пусть дан
усеченный конус,
радиусы оснований
и высота которого
известны. Найдите
образующую
усеченного конуса.

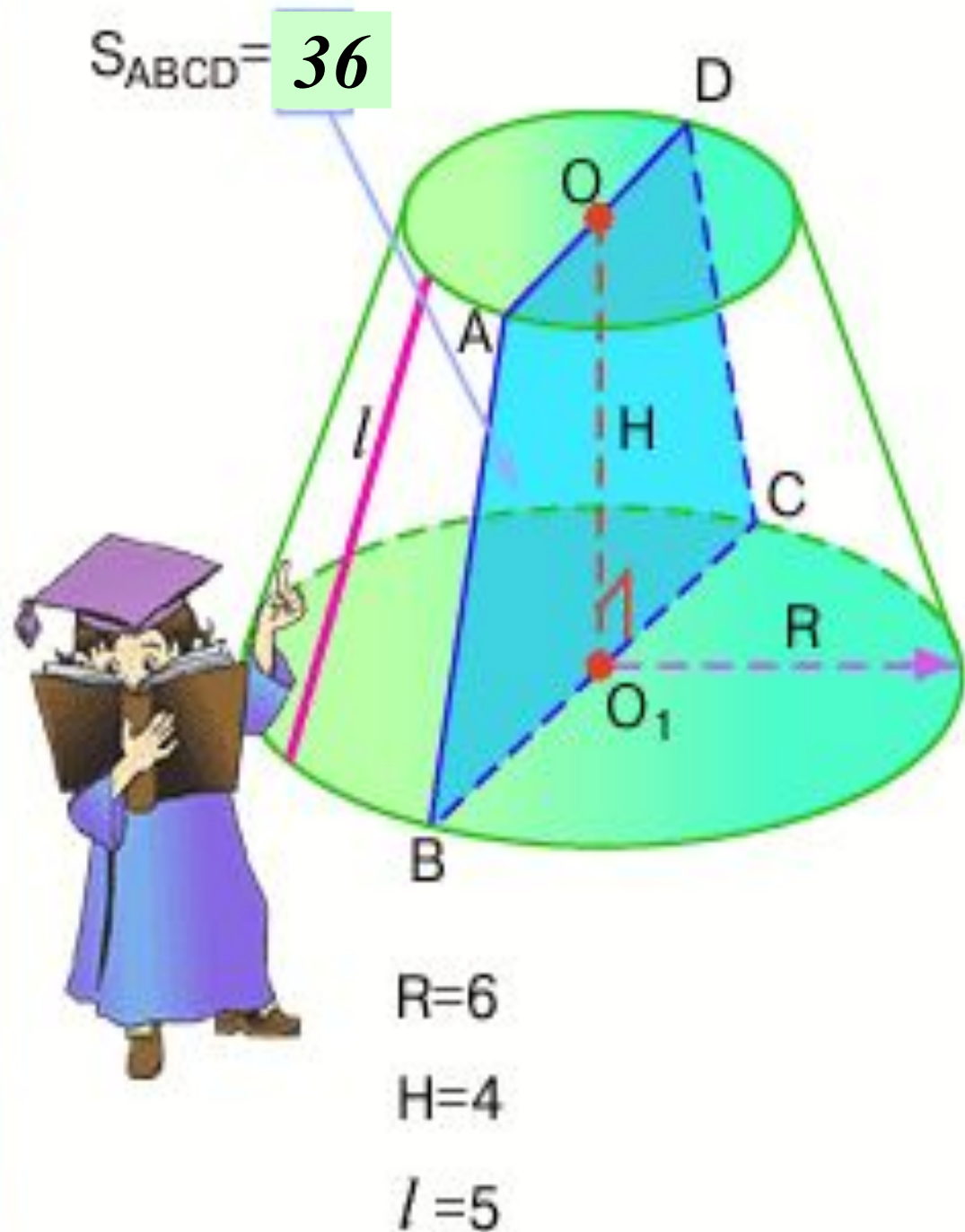




Прямая, соединяющая центры оснований, называется **осью** усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется **осевым**. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.

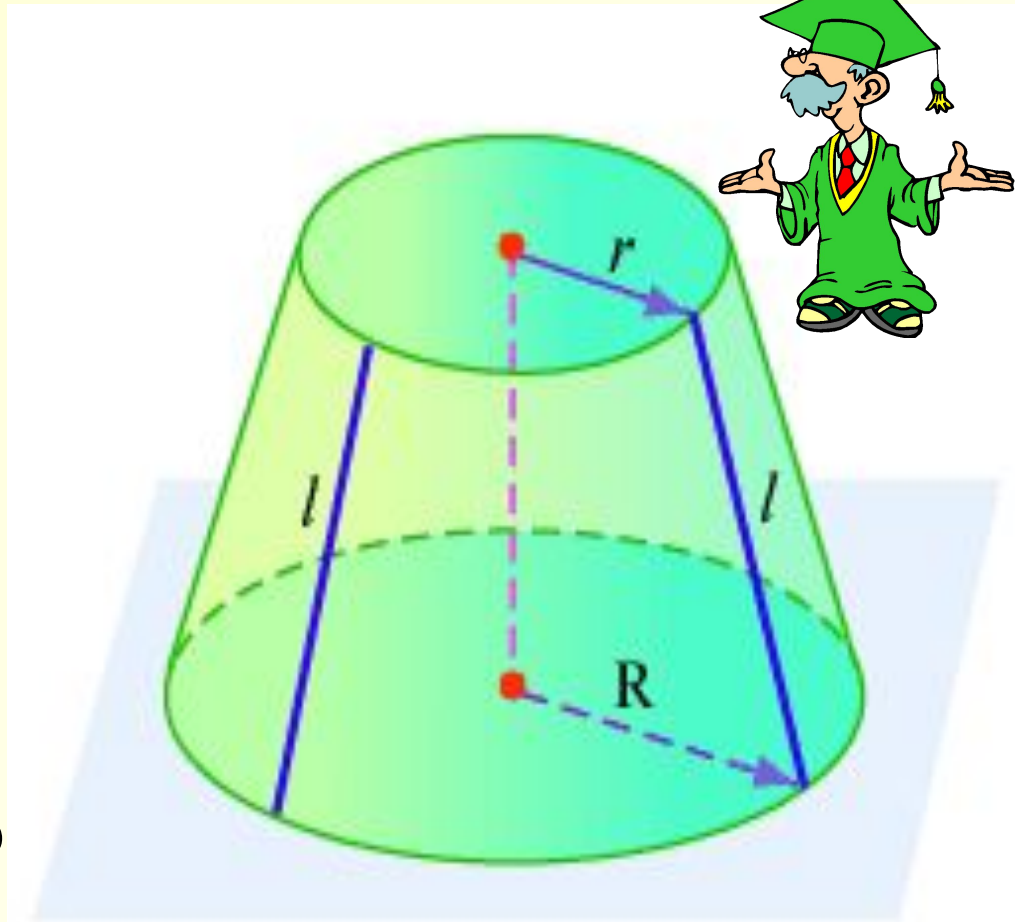


Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус нижнего основания, высота и образующая.



**Боковая поверхность
усеченного конуса.
Площадь боковой
поверхности
усеченного конуса.**

**Площадь боковой
поверхности усеченного
конуса равна
произведению
полусуммы длин
окружностей оснований
на образующую.**

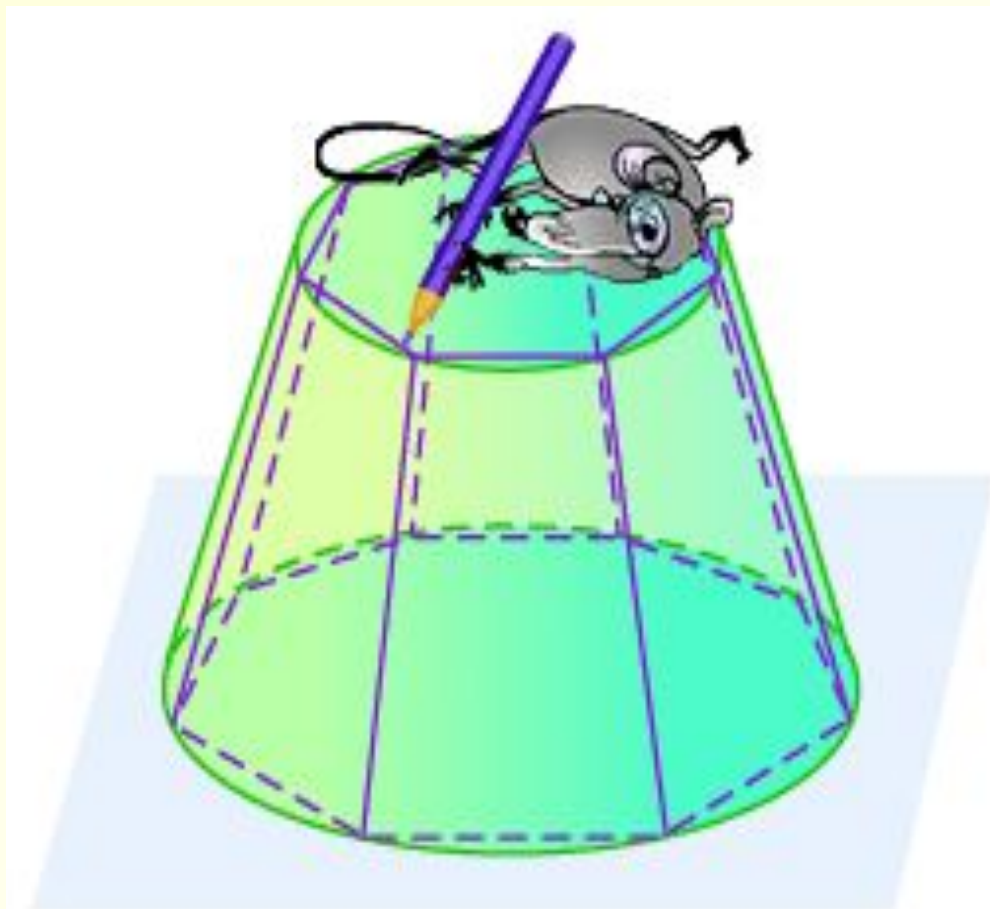


Дано: r – радиус меньшего основания
 R – радиус большего основания
 l – образующая

Докажем: $S_{\text{бок}} = \pi(R + r) \cdot l$

Доказательство:

Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.



$S_{\text{бок. пирамиды}}$



$S_{\text{бок. конуса}}$

Доказательство:

Впишем в конус
правильную пирамиду.
Ее боковая
поверхность состоит из
трапеций.

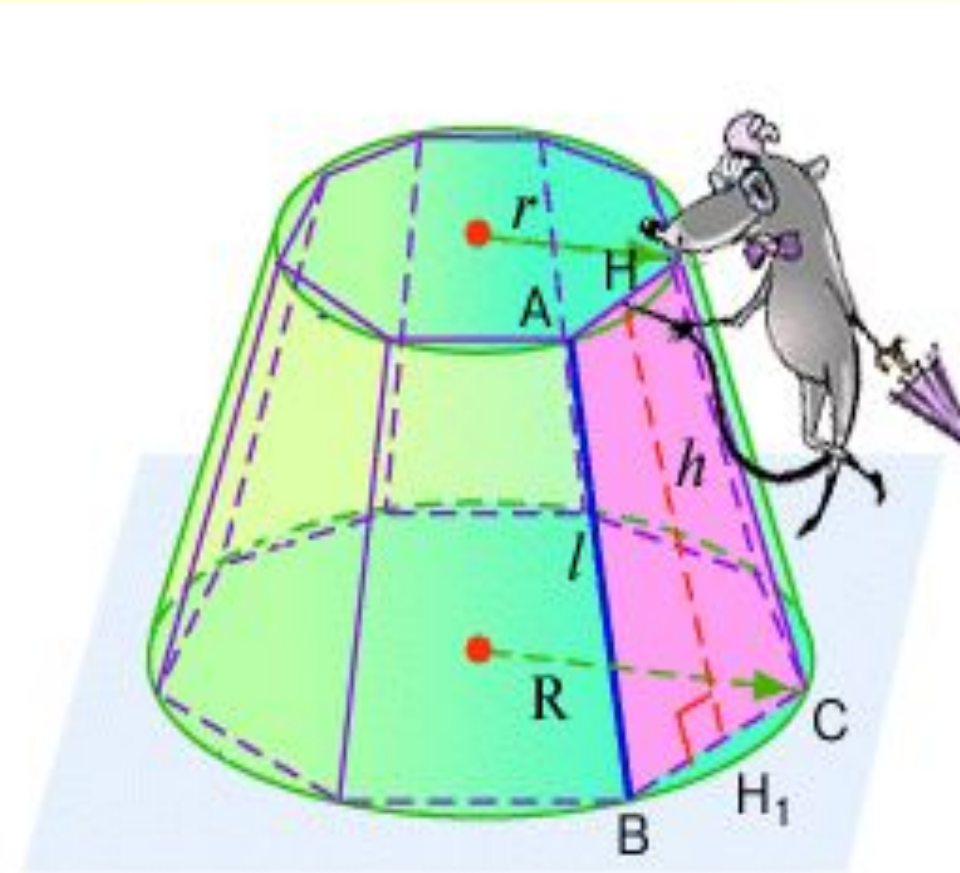
$$S_{\text{бок.пир}} = \frac{(p + P)}{2} h$$

$$S_{\text{бок.пир}} \rightarrow S_{\text{бок.кон}}$$

$$p \rightarrow c \quad P \rightarrow C \quad h \rightarrow l$$

$$c = 2\pi r \quad C = 2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R + r)}{2} l = \underline{\underline{\pi(R + r)l}}$$

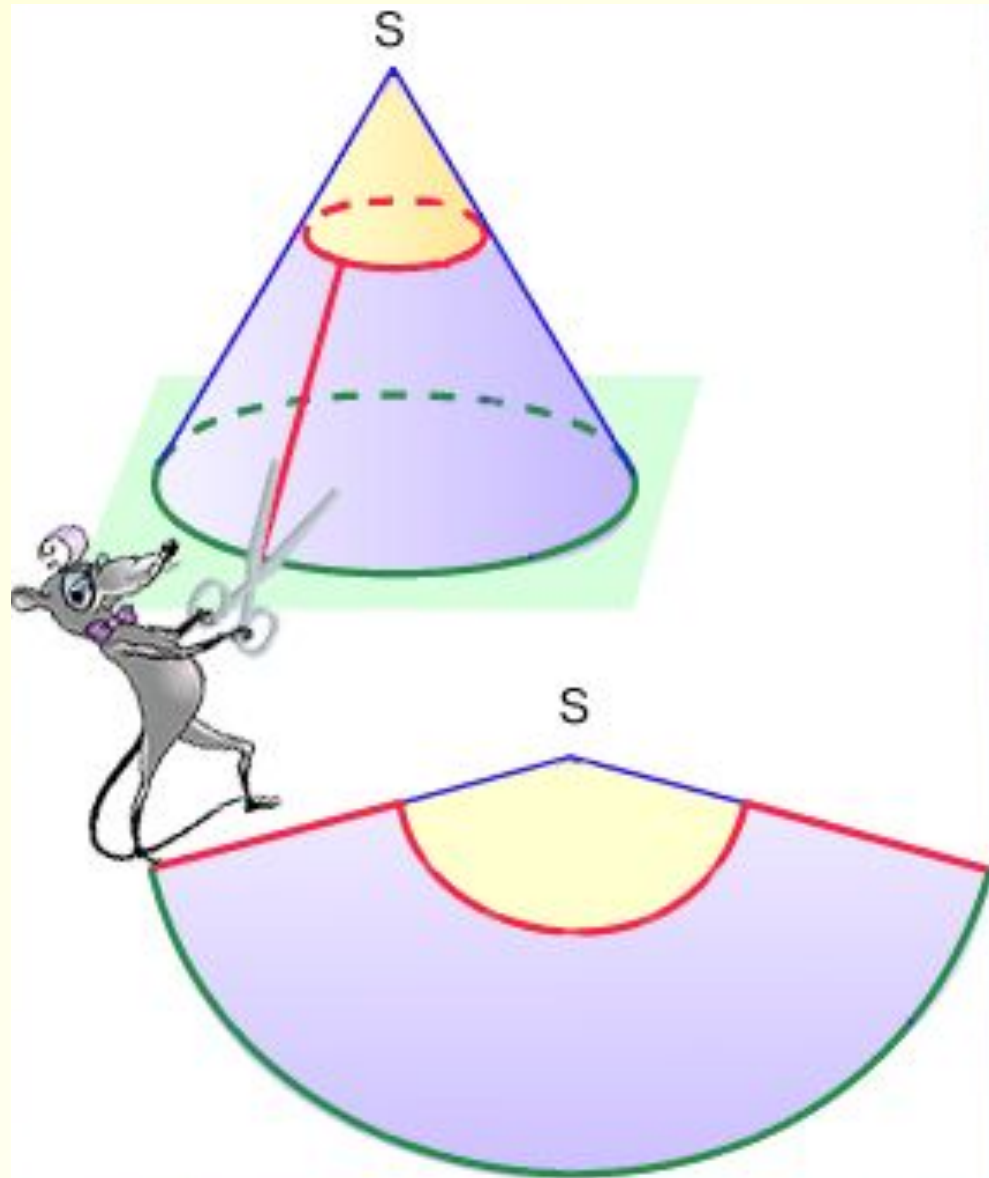


p – периметр меньшего основания

P – периметр большего основания

Замечание:

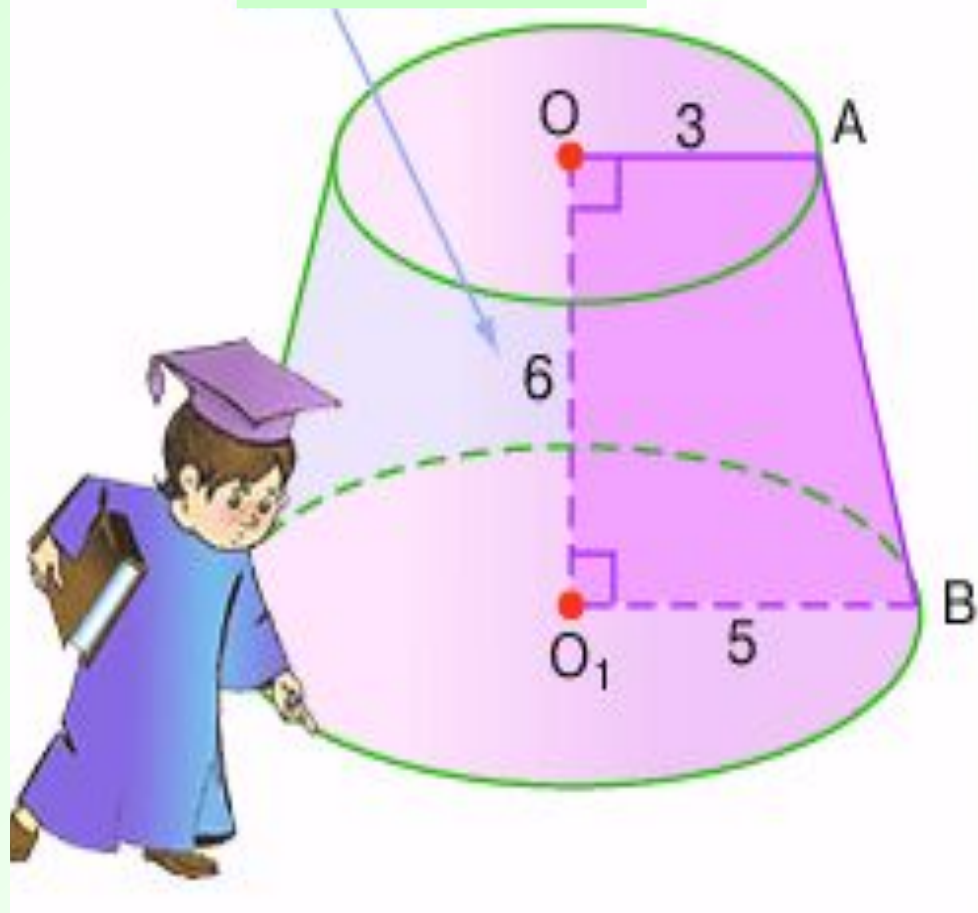
Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть круглого кольца.



?

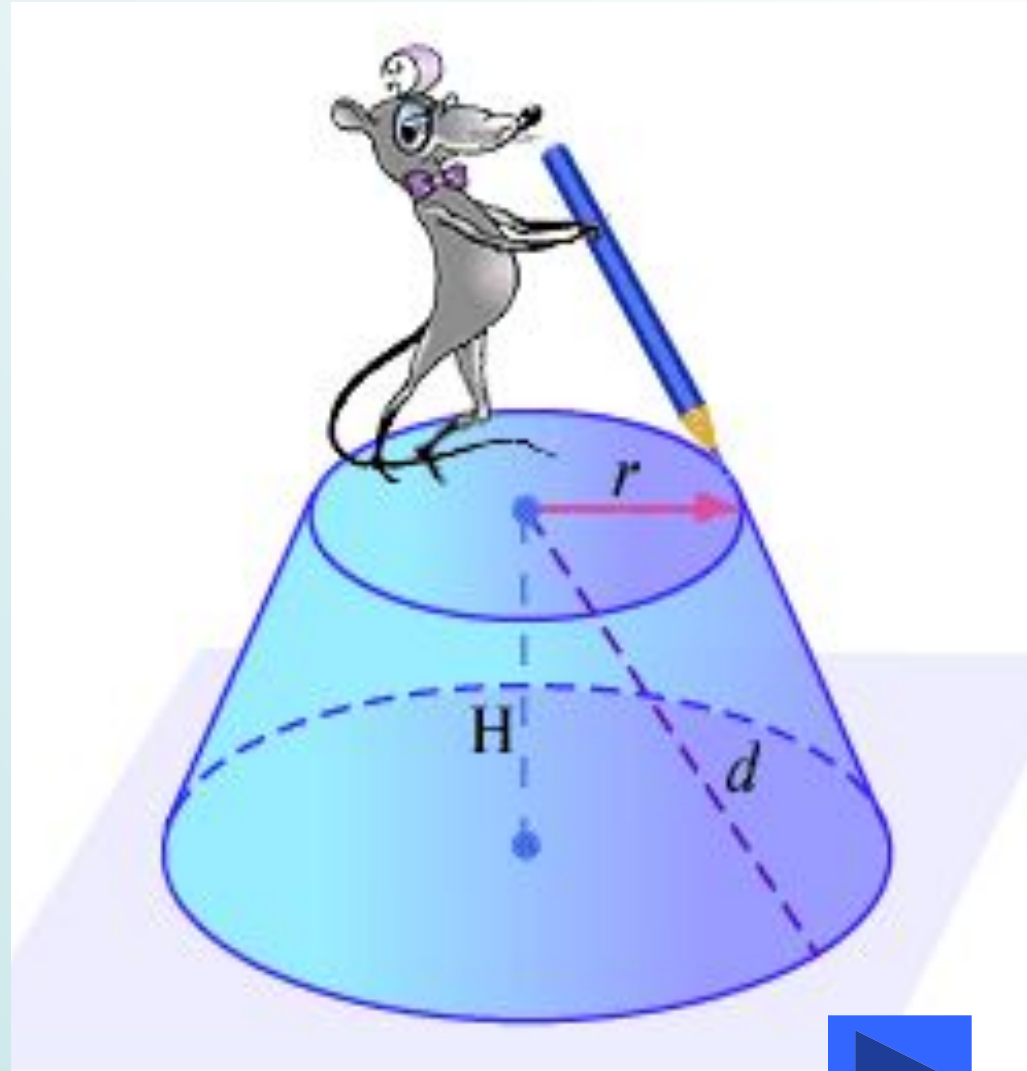
**Усеченный конус
получен от вращения
прямоугольной
трапеции вокруг
боковой стороны,
перпендикулярной
основаниям, Найдите
площадь боковой
поверхности усеченного
конуса, если известны
основания и боковая
сторона трапеции.**

$$S_{\text{бок. пов.}} = 16\sqrt{10} \cdot \pi$$



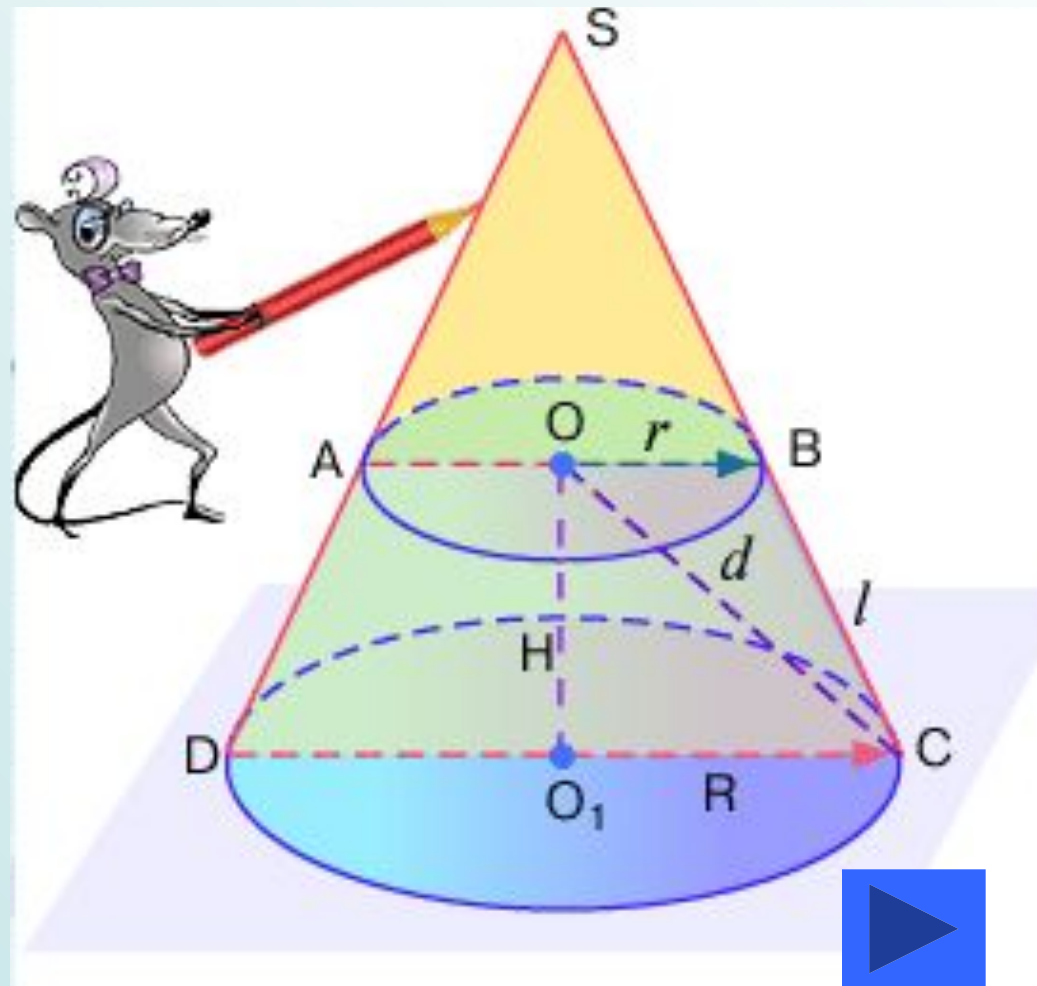
Задача.

- Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 5, высота равна 6, а расстояние от центра меньшего основания до окружности большего основания равно 10. Найдите площадь боковых поверхностей усеченного и полного конусов.



Решение:

Достроим
усеченный конус до
полного и проведем
осевое сечение.

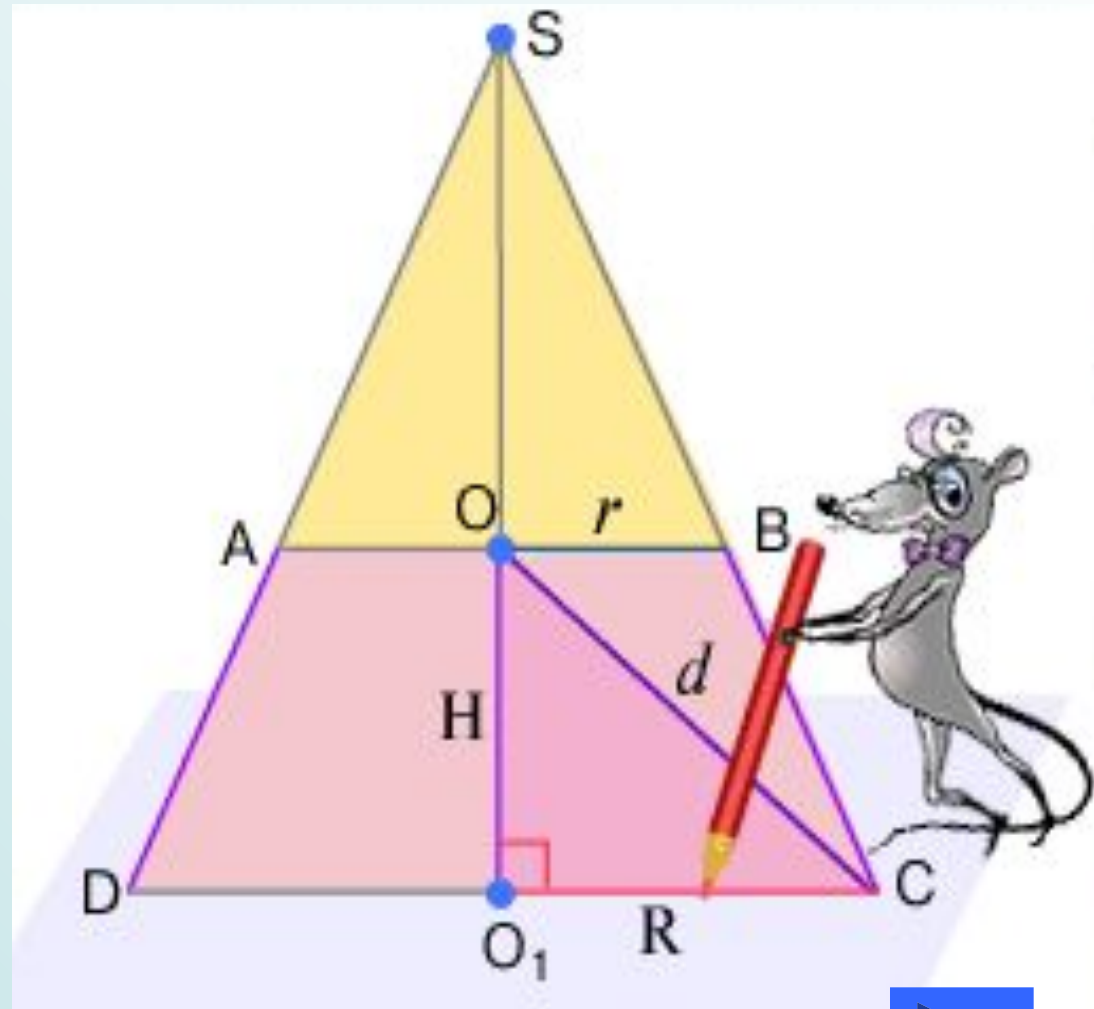


Решение:

1) Вычислим радиус большего основания.

ΔOO_1C :

$$d^2 = H^2 + R^2$$



$$R = \sqrt{d^2 - H^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$



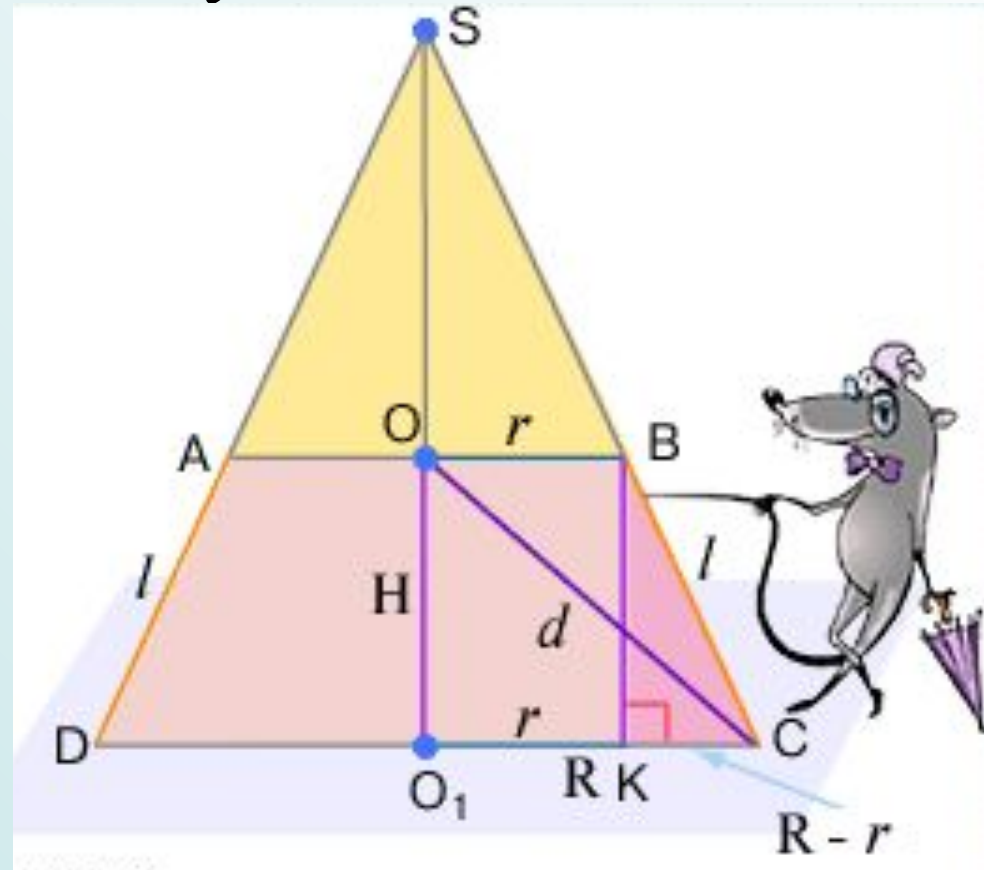
Решение:

2) Найдем боковую сторону трапеции – образующую усеченного конуса.

$\triangle BKC$:

$$CK = R - r = 3$$

$$BC^2 = BK^2 + CK^2$$



$$l = \sqrt{H^2 + CK^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$



Решение:

3) Используя подобие треугольников, найдем образующую полного конуса.

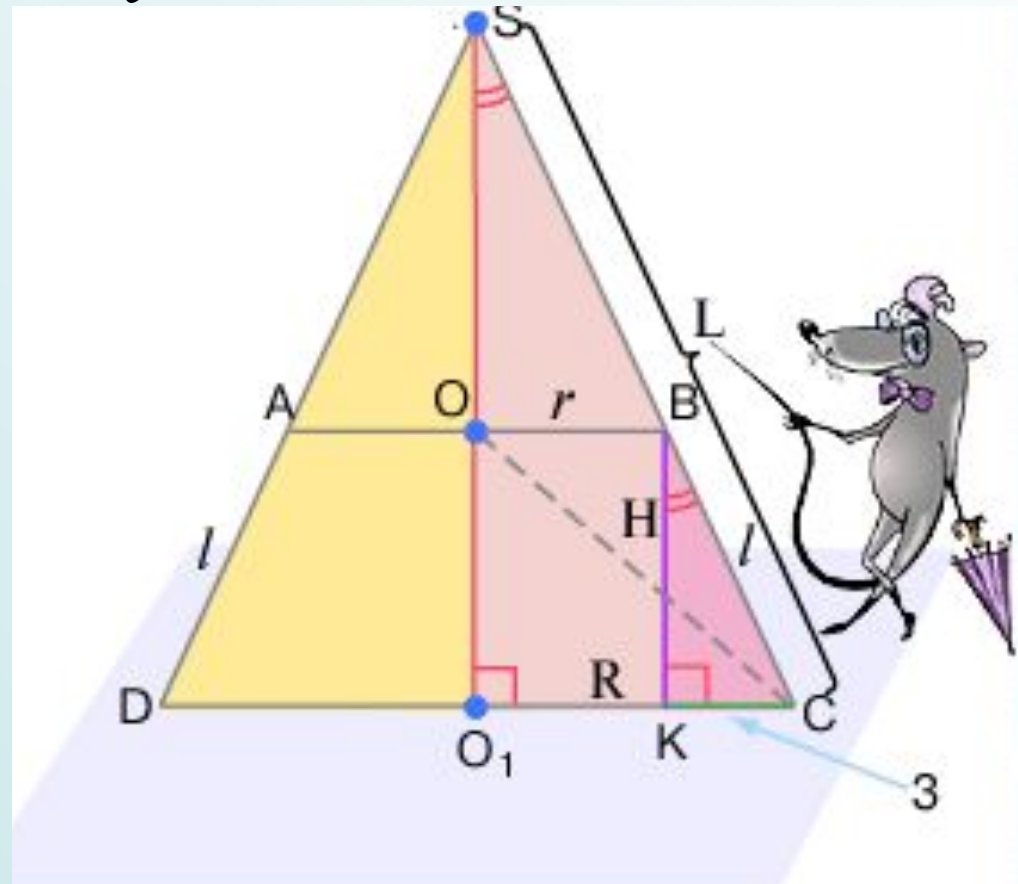
$$SC = L$$

$$\Delta SO_1C \sim \Delta BKC$$

$$\frac{SC}{BC} = \frac{O_1C}{KC}$$

$$\frac{L}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{3}$$

$$L = 8\sqrt{5}$$



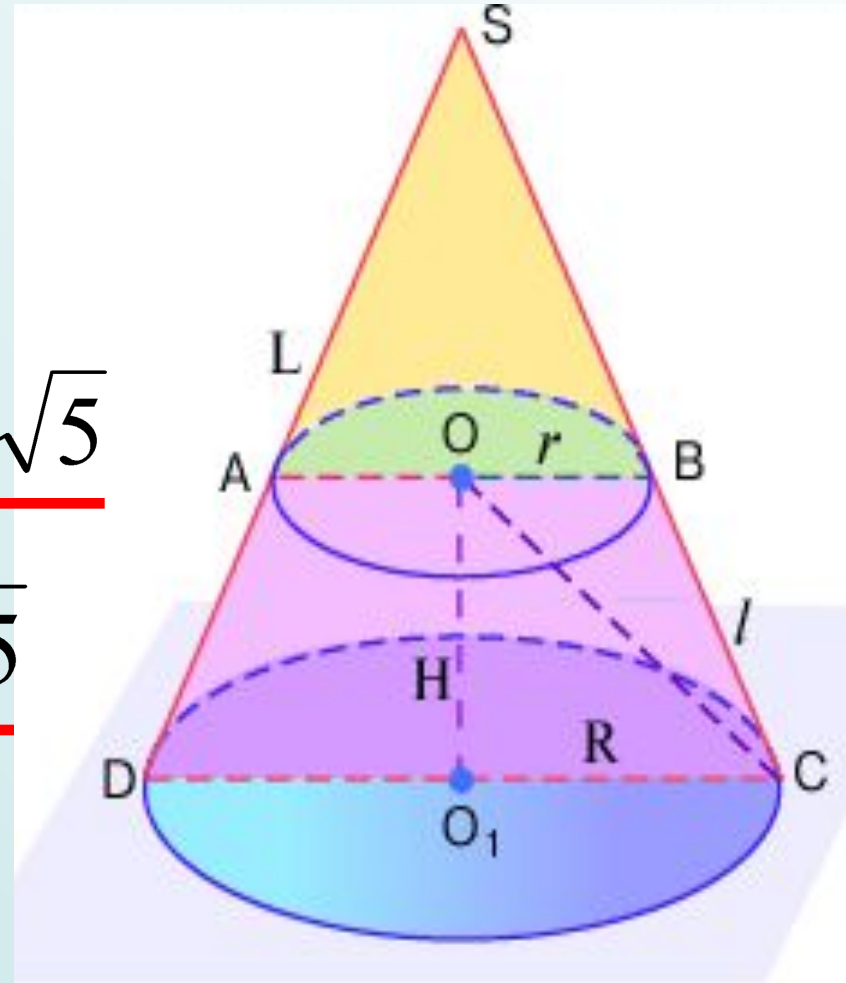
Решение:

4) Подставим найденные значения в формулы для площадей боковой поверхности полного и усеченного конусов.

$$L = 8\sqrt{5} \quad l = 3\sqrt{5}$$

$$S_{\text{усеч}} = \pi(R + r) \cdot l = \underline{\pi \cdot 39\sqrt{5}}$$

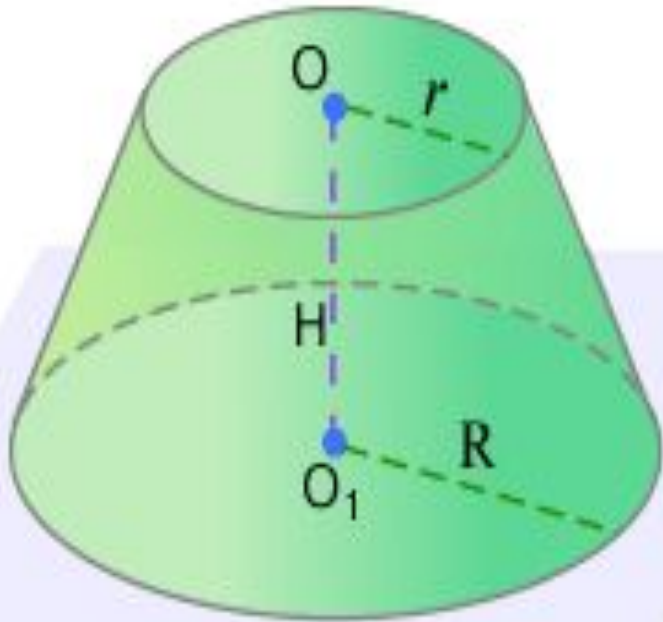
$$S_{\text{полн}} = \pi(RL) = \underline{\pi \cdot 64\sqrt{5}}$$



Формула объема усеченного конуса.

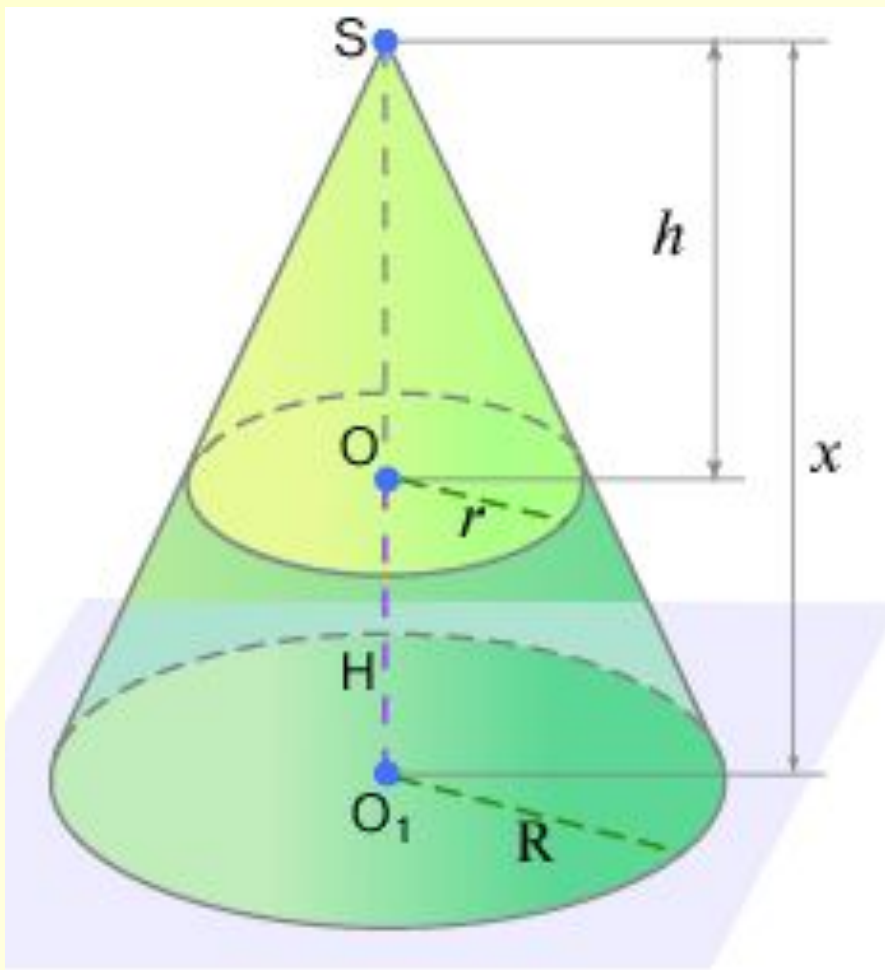


- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.



$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

Доказательство:

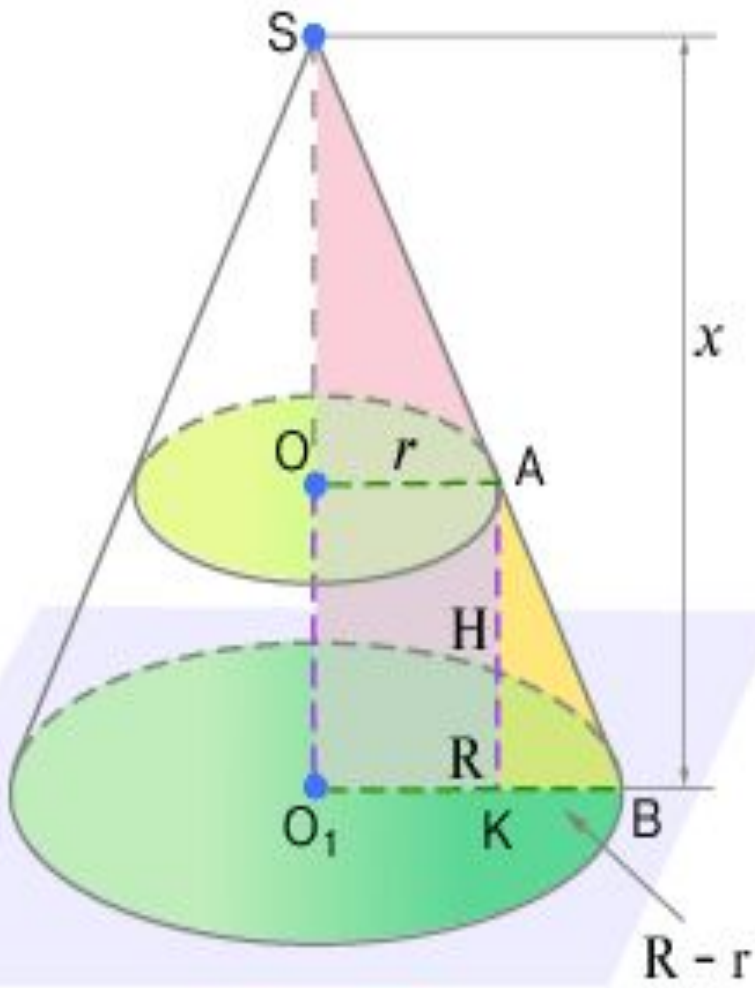


Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.

$$V_{\text{усеч.кон}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 x - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Доказательство:

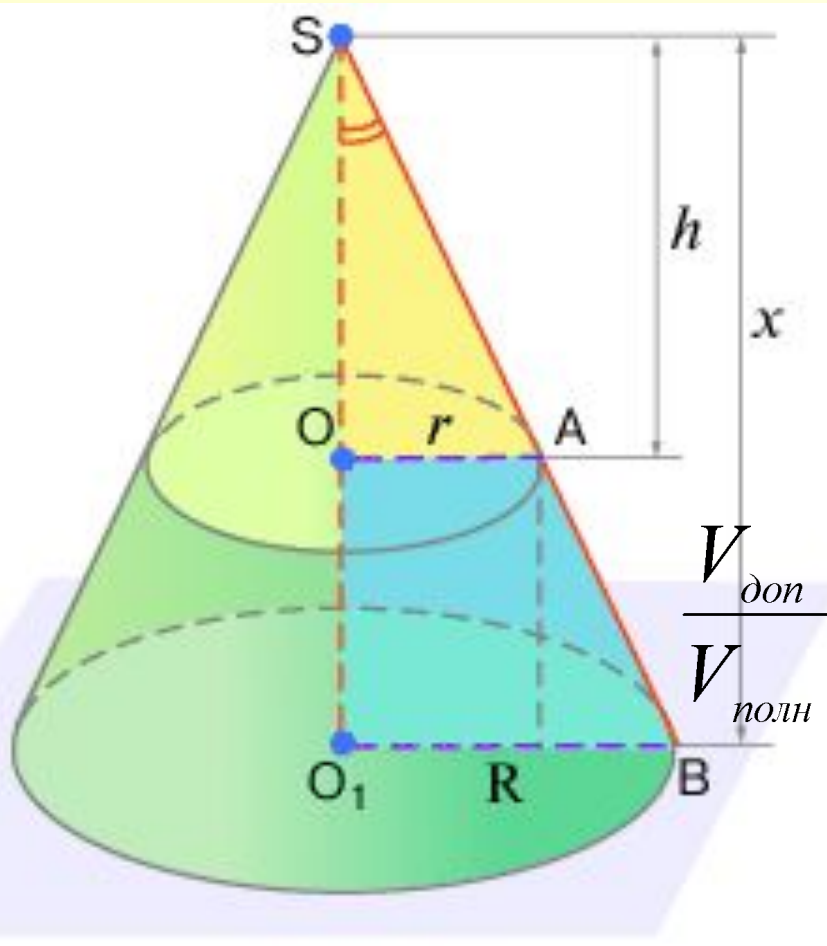
Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.



$$\triangle SO_1B \sim \triangle AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R - r}$$
$$x = H \frac{R}{R - r}$$

Доказательство:



$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

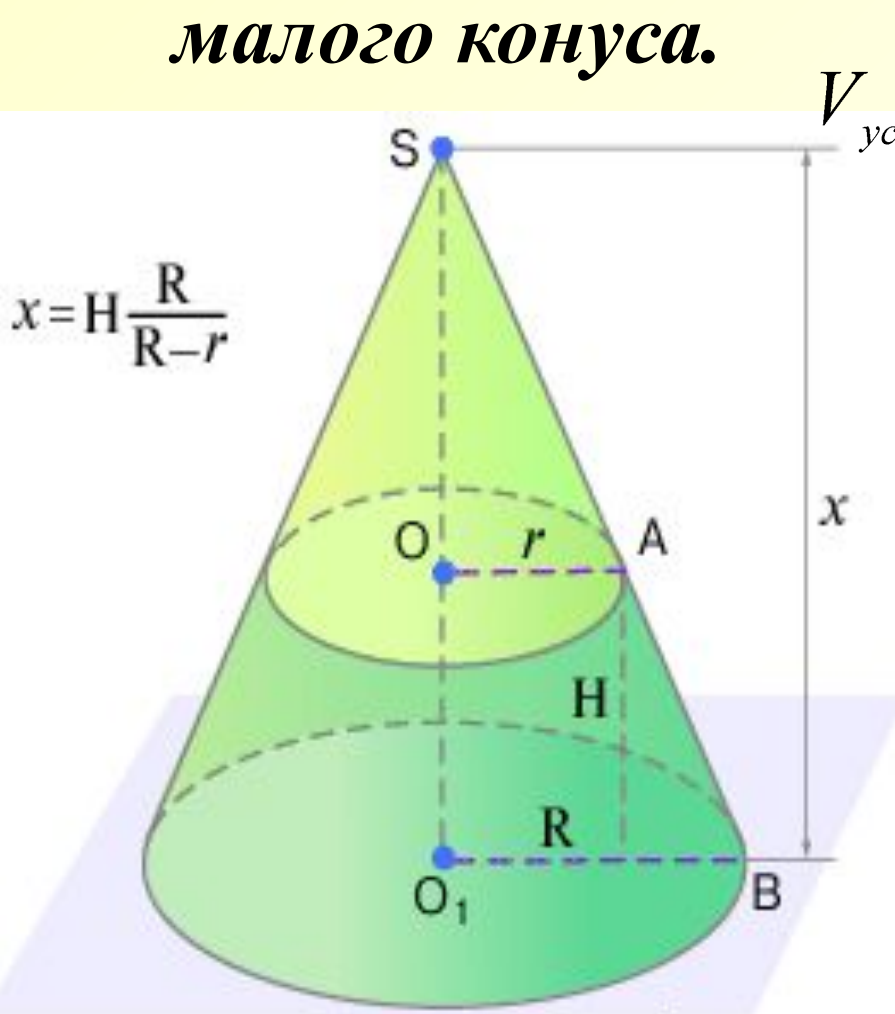
$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{\text{дон}}}{V_{\text{полн}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.

Доказательство:

Вычтем из объема большого конуса объем
малого конуса.



$$V_{\text{усеч}} = V_{\text{полн}} - V_{\text{дон}} = V_{\text{полн}} - \frac{r^3}{R^3} V_{\text{полн}} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 x \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) =$$

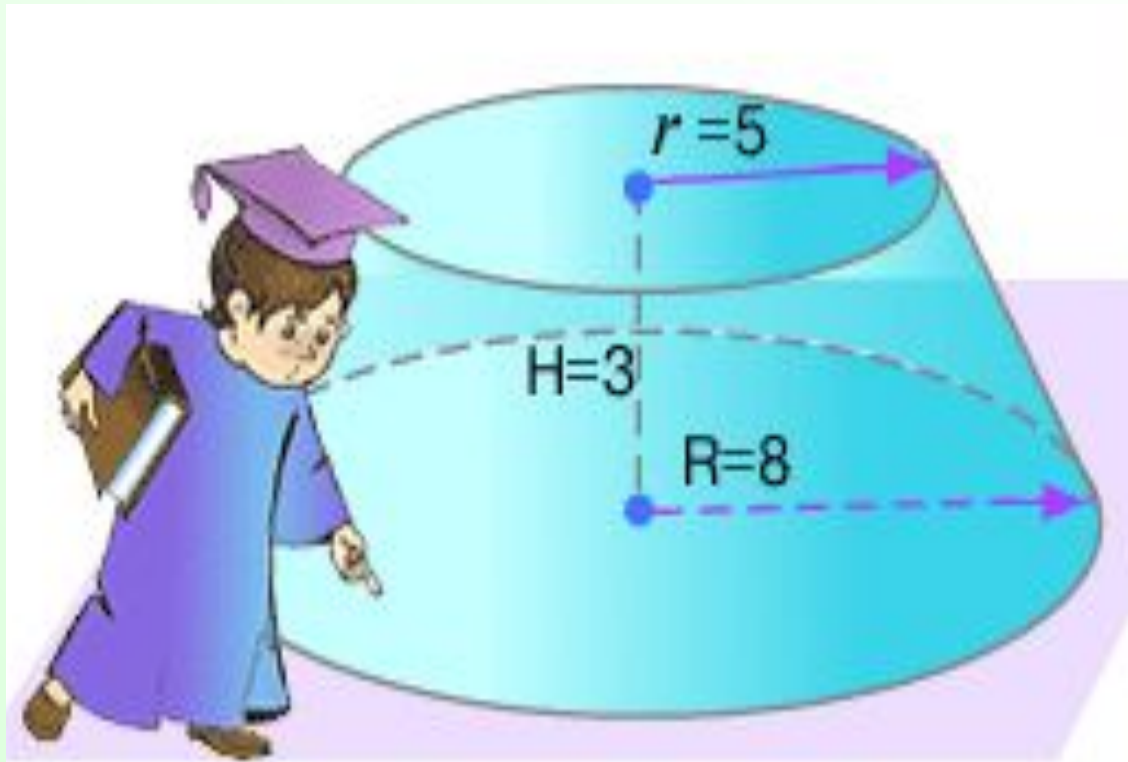
$$= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 H R}{R - r} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H \frac{(R - r)(R^2 + Rr + r^2)}{R - r} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

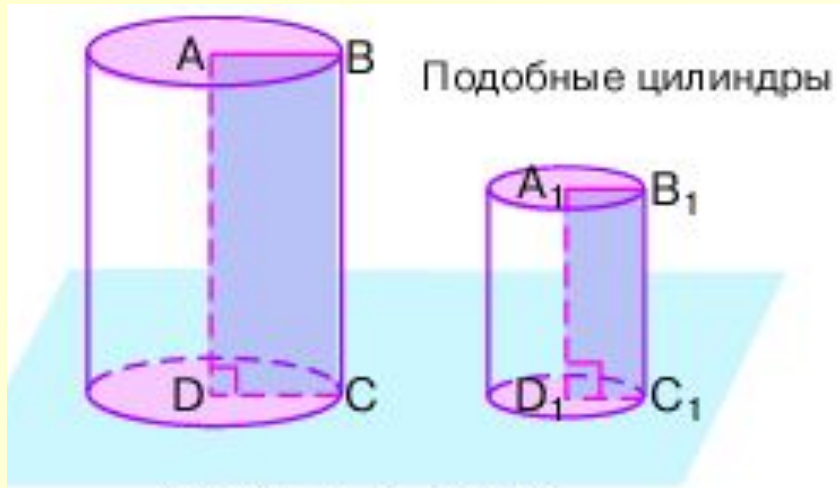


**Найдите объем
усеченного
конуса, если
известны его
высота и радиусы
оснований.**

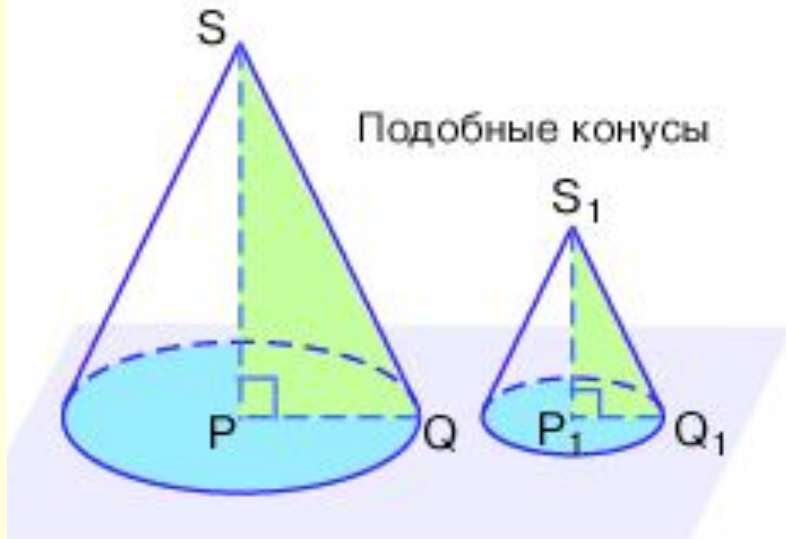


$$V_{\text{усеч.}} = 149\pi$$

Подобные цилиндры и конусы.



$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$

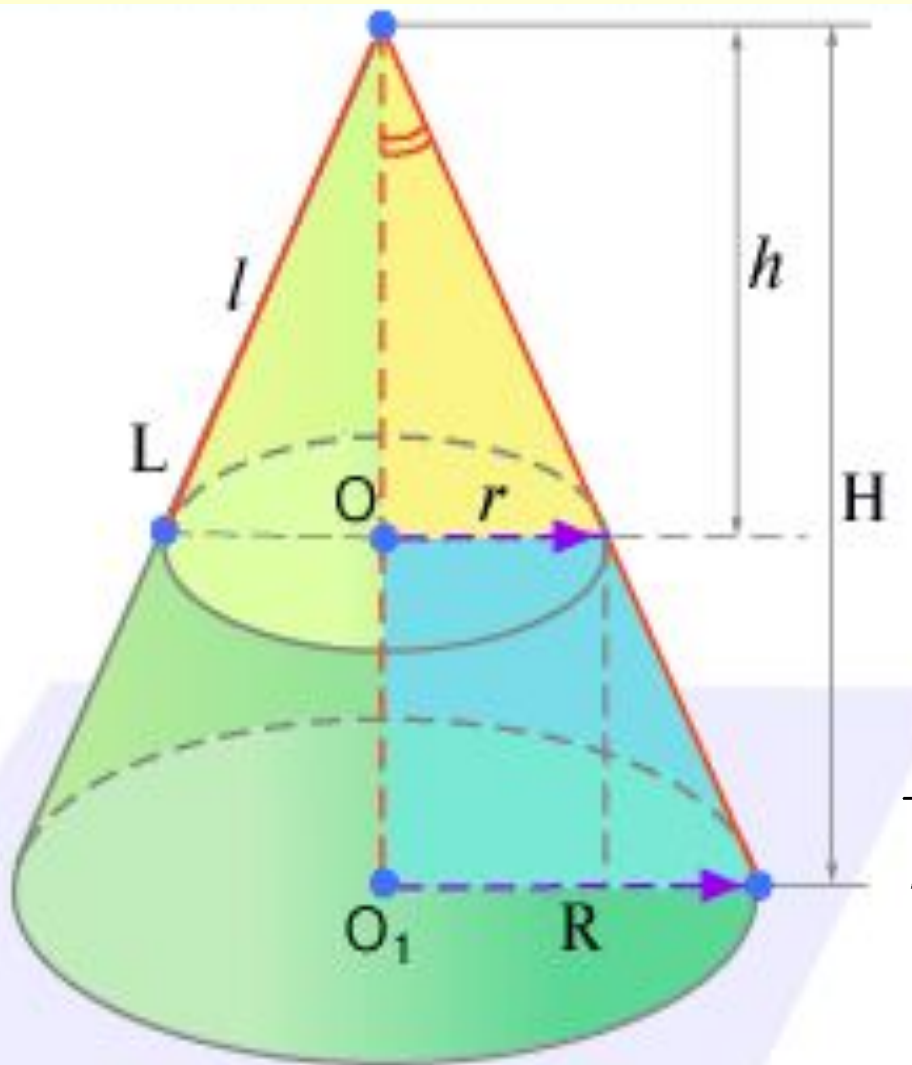


$$\triangle SPQ \sim \triangle S_1P_1Q_1$$



- **Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.**

Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.



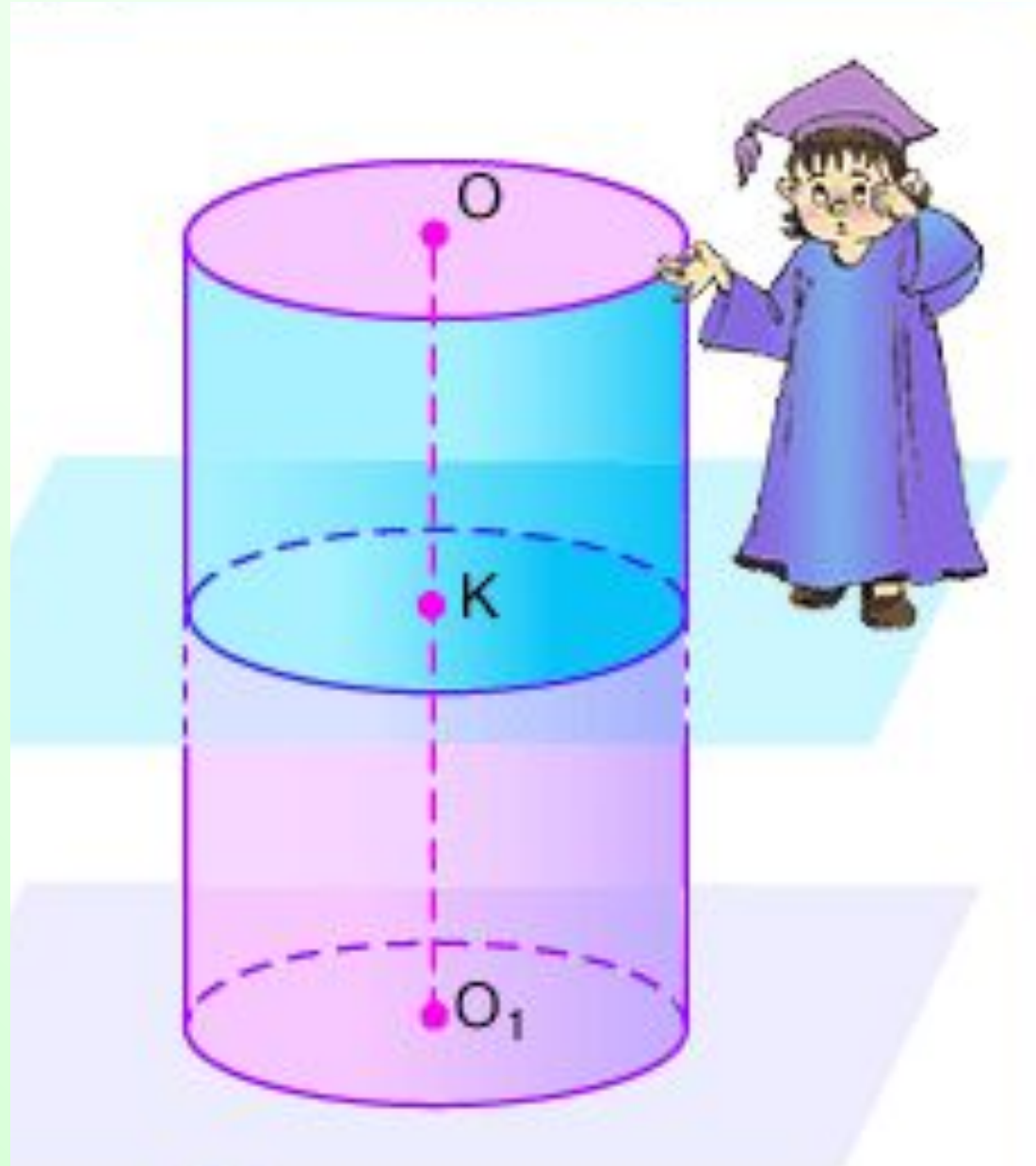
$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

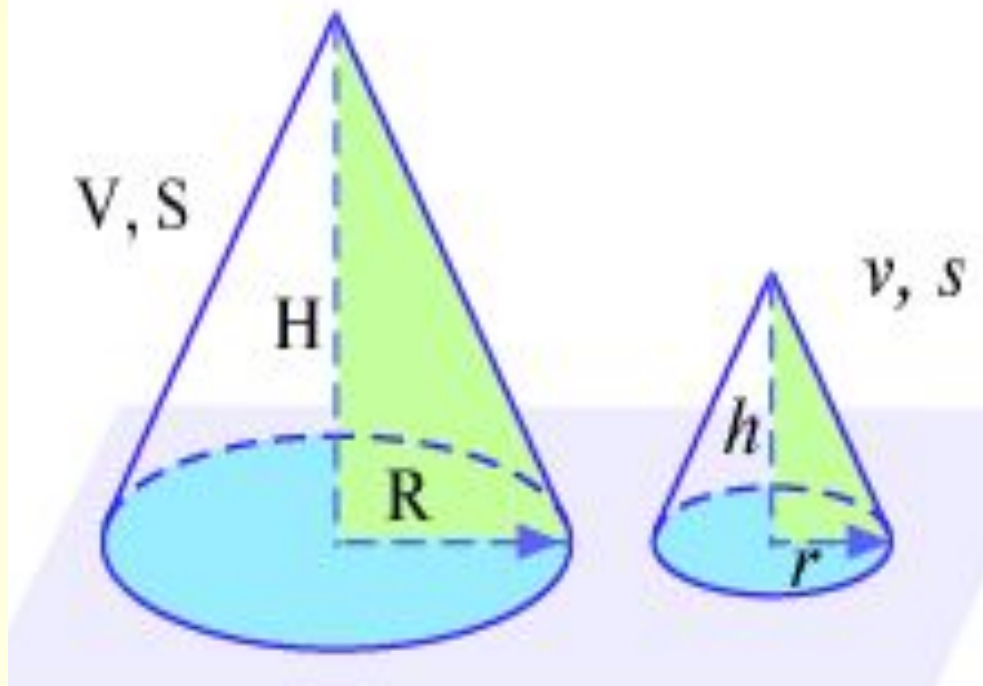
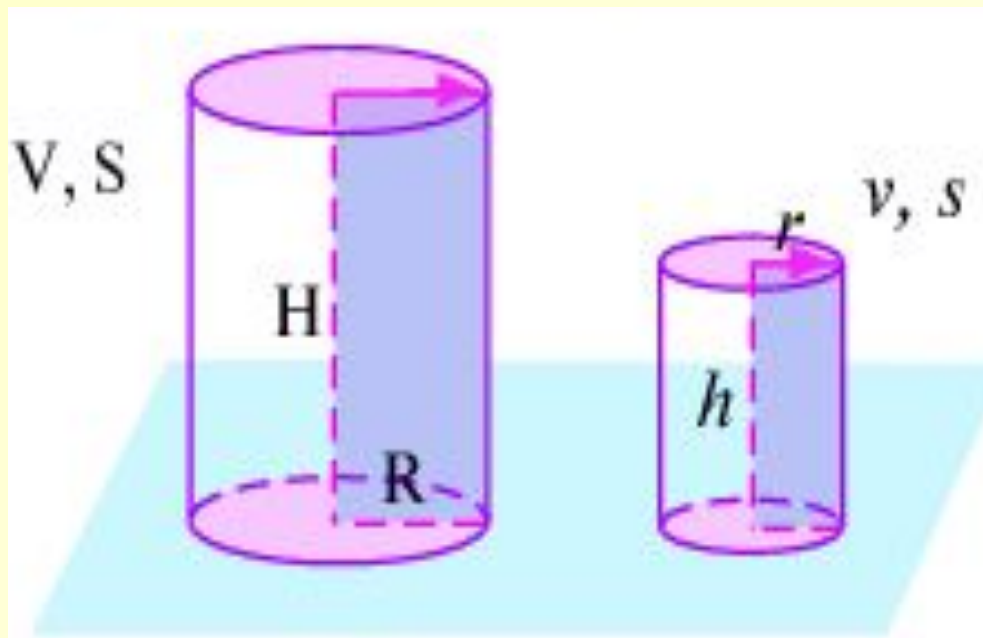
$$\frac{V_{\text{доп.}}}{V_{\text{полн.}}} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{\text{бок.доп}}}{S_{\text{бок.полн}}} = \frac{2\pi r l}{2\pi R L} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$



**В цилиндре
проведено сечение,
параллельное
основанию. Будет ли
малый цилиндр,
который отсекается
этим сечением,
подобен большому?**





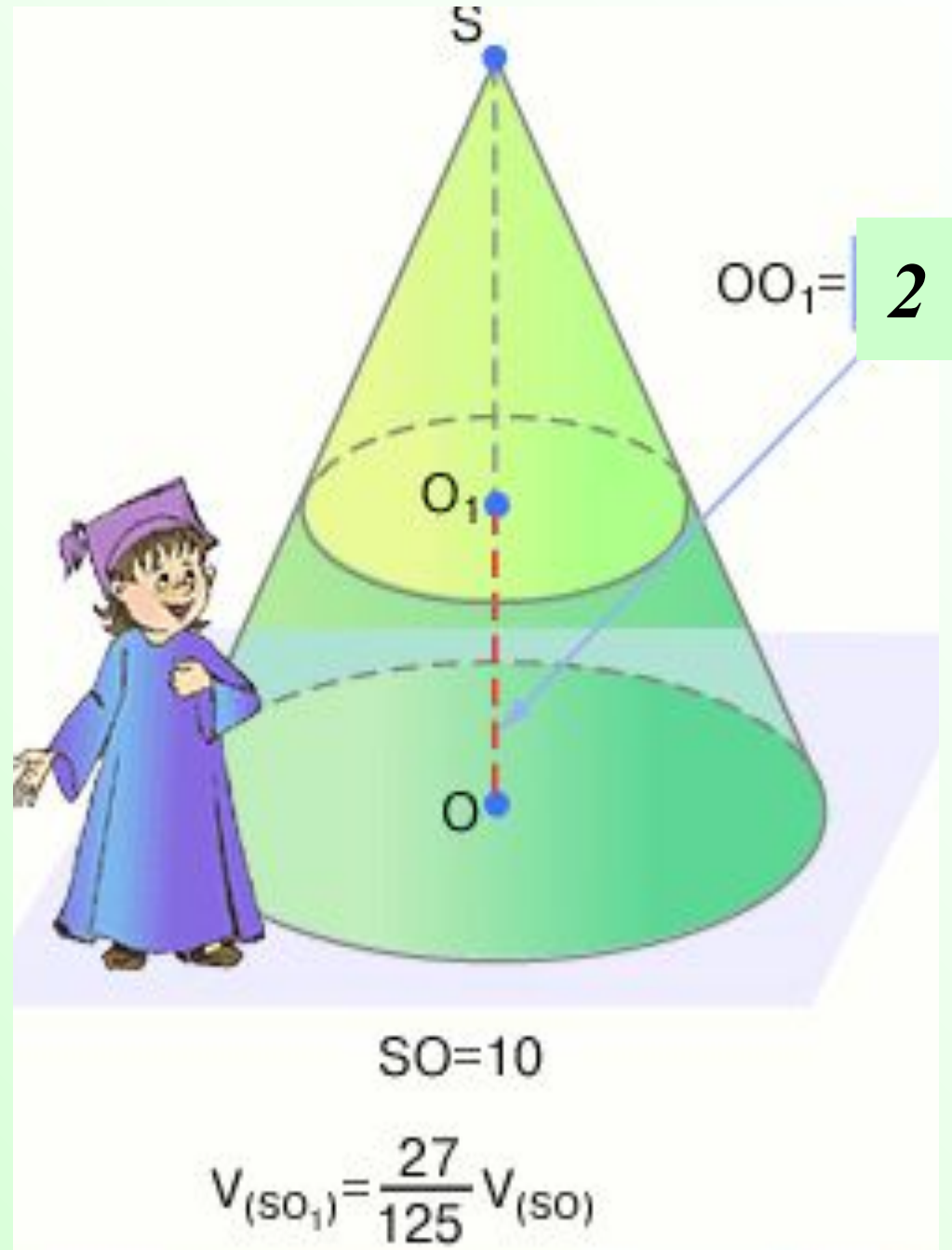
Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

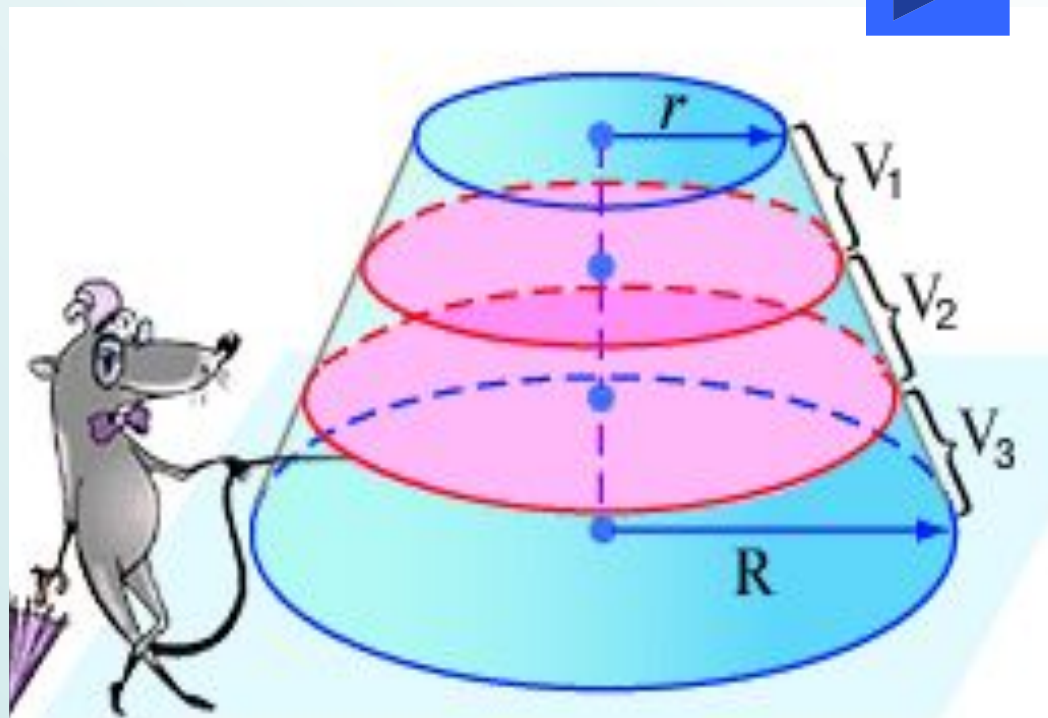


В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?



Радиусы оснований
усеченного конуса
относятся как 2:3.
Высота конуса
разделена на три
равные части, и
через точки
деления проведены
плоскости,
параллельные
основаниям.
Найти, в каком
отношении
разделился объем
усеченного конуса.

Задача.



Дано: $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

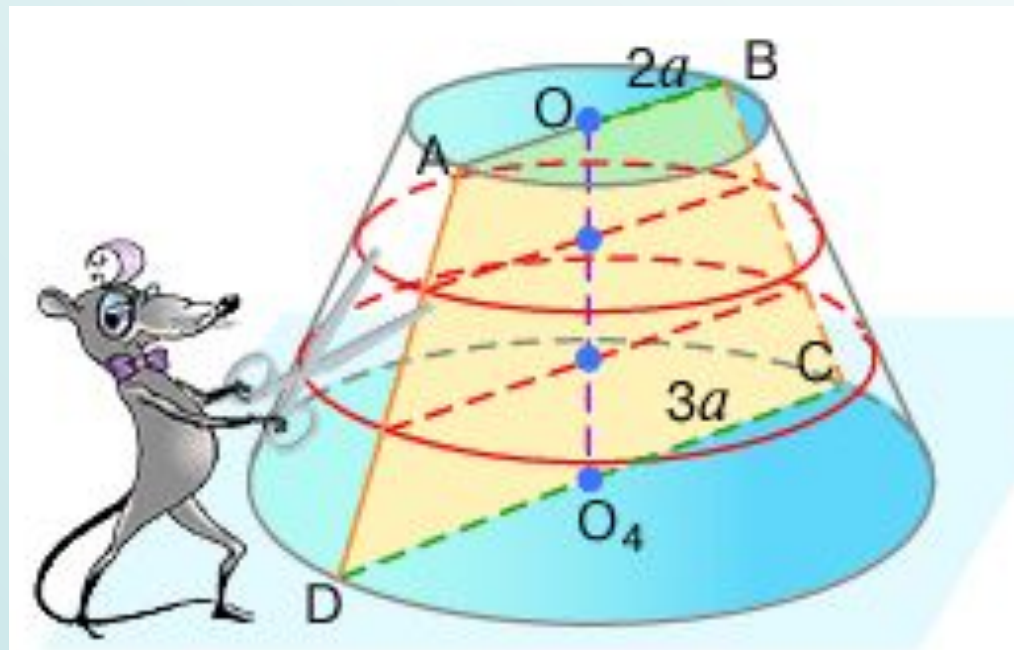
Н разделена на 3 части

V_1, V_2, V_3 – объемы слоев

Найти: $V_1 : V_2 : V_3$

Решение:

Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как $2a$ и $3a$ и рассмотрим осевое сечение конуса.



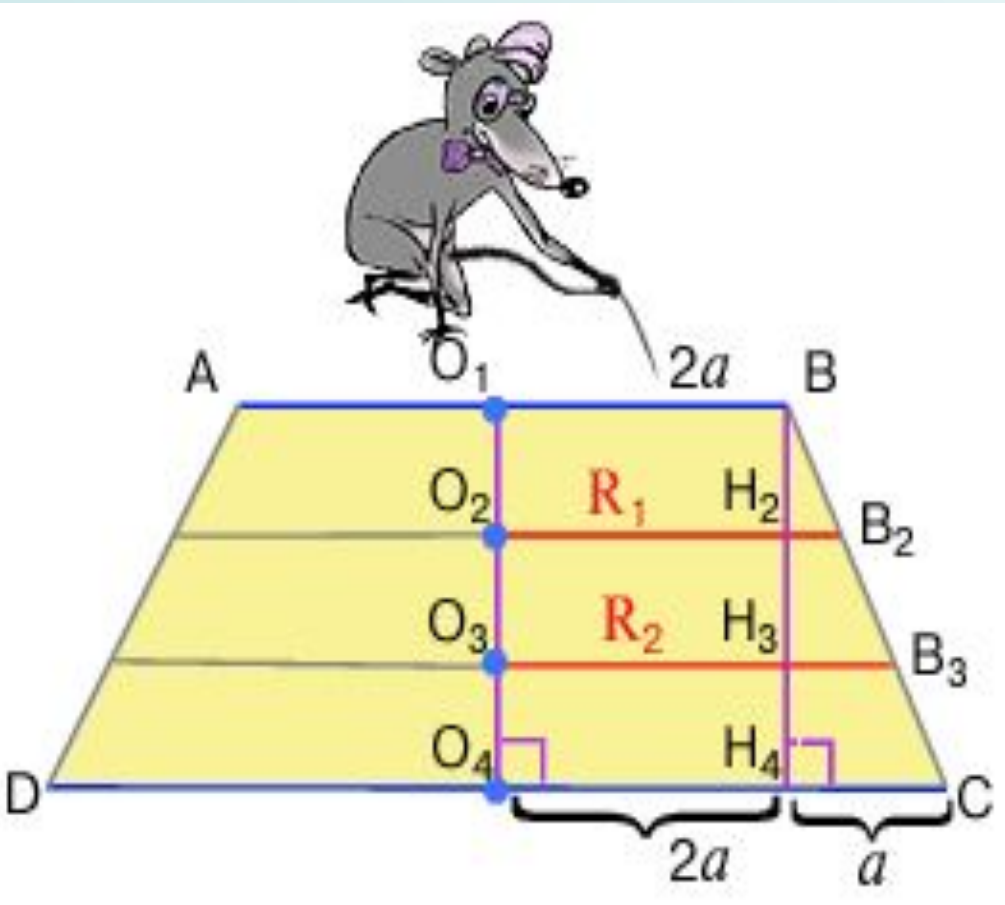
$$r : R = 2 : 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r &= 2a \\ R &= 3a \end{aligned}$$

ABCD – осевое сечение



Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.



$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2B_2 = \frac{1}{3}CH_4 = \frac{a}{3}$$

$$H_3B_3 = \frac{2}{3}CH_4 = \frac{2a}{3}$$

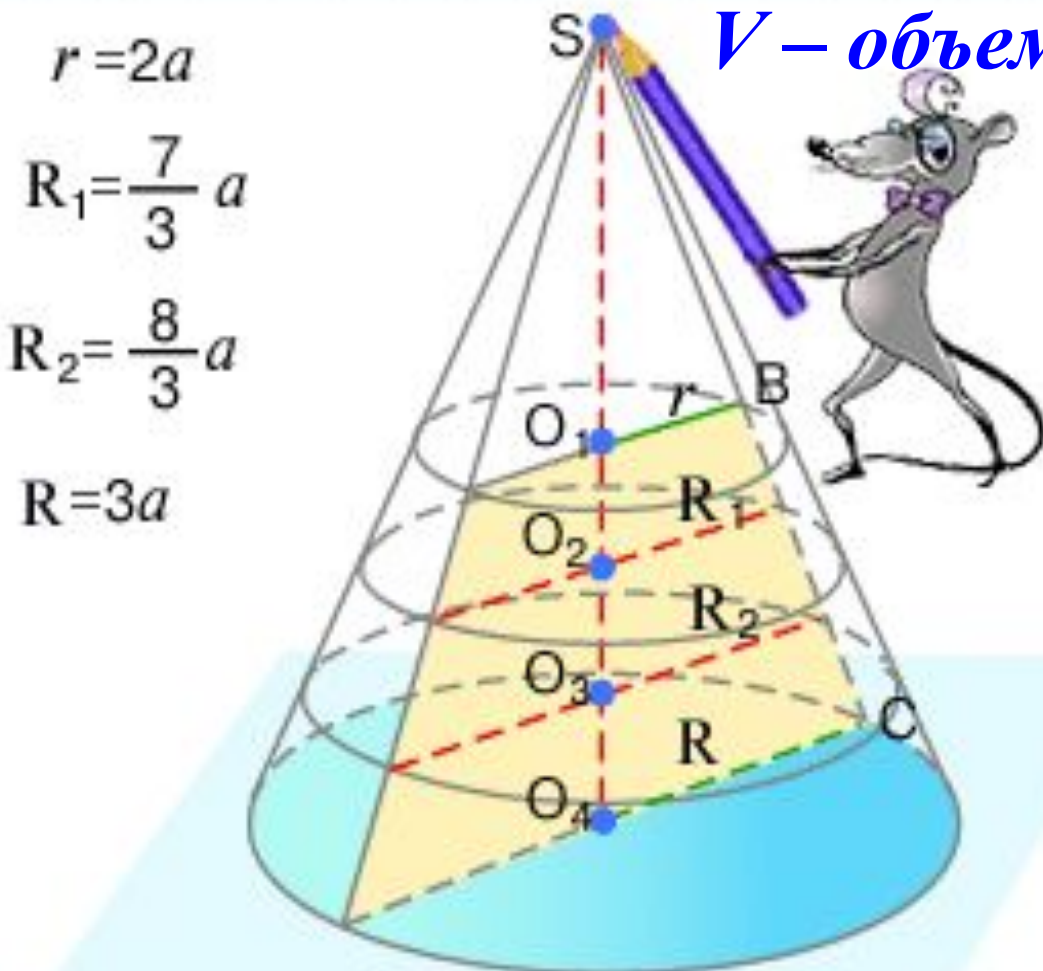
$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$



Решение:

2) Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.



$$\frac{V_{(SO_1)}}{V} = \frac{(2a)^3}{(3a)^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{6^3}{9^3}$$

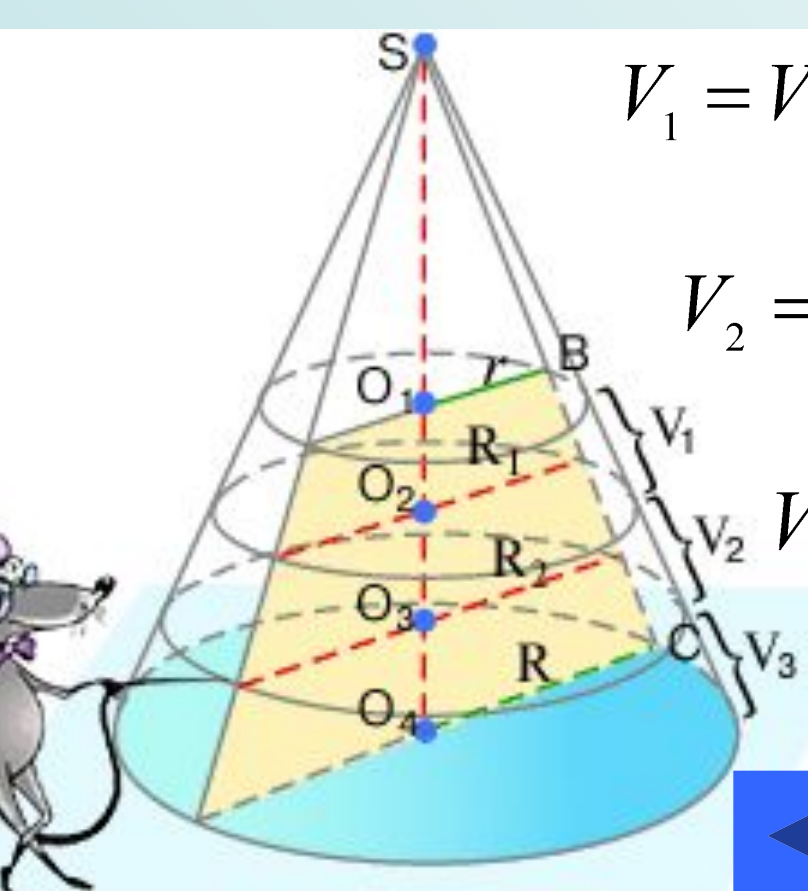
$$\frac{V_{(SO_2)}}{V} = \frac{\left(\frac{7}{3}a\right)^3}{(3a)^3} = \frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V} = \frac{\left(\frac{8}{3}a\right)^3}{(3a)^3} = \frac{8^3}{9^3}$$



Решение:

3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.



$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3} V = \frac{127}{9^3} V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3} V = \frac{169}{9^3} V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3} V = \frac{217}{9^3} V$$

Ответ:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$$