Планиметрические задачи в КИМах ЕГЭ (базовый уровень)

Виды задач по планиметрии в ЕГЭ базового уровня:

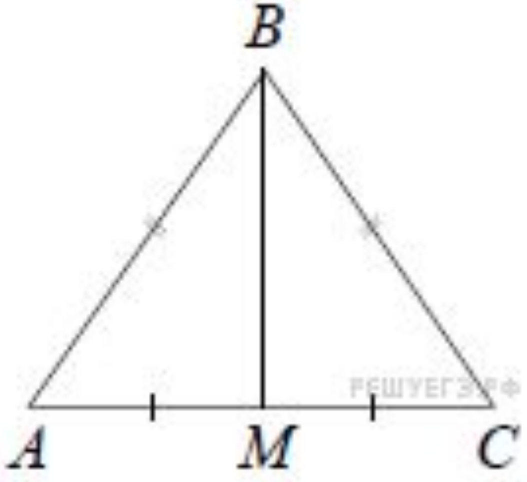
- Равнобедренный треугольник: вычисление углов;
- Равнобедренный треугольник: вычисление элементов;

Равнобедренный треугольник: вычисление углов

Задача №1

В равнобедренном треугольнике *ABC* боковые стороны *AB = BC* = 5, медиана *BM* = 4. Найдите $\cos\angle BAC$.

Решение.



В равнобедренном треугольнике медиана опущенная на основание является высотой и биссектрисой. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM. По теореме Пифагора найдём AM:

$AM = 3$.

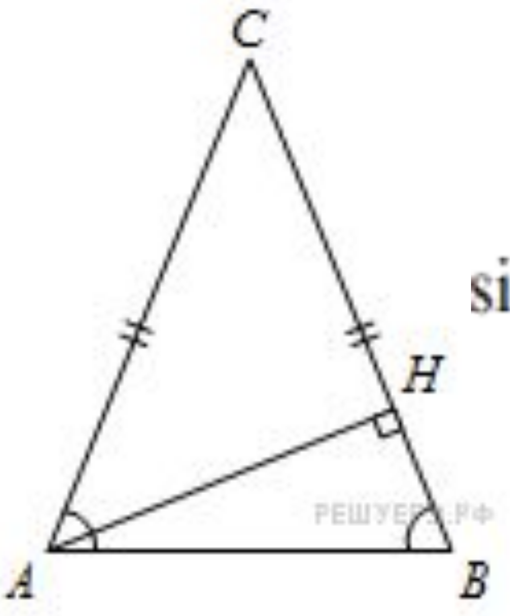
Найдём $\cos\angle BAC$:

$$\cos A = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \cos A = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Задача №2

В треугольнике ABC AB=BC, AH – высота, sinBAC=7/5. Найдите sinBAH.

<u>Решение.</u> Треугольник **ABC** равнобедренный, значит, углы **BAC** и **ABH** равны как углы при его основании.



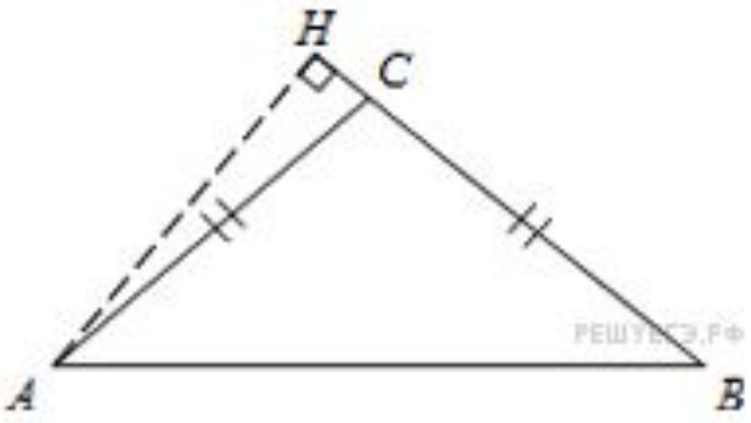
$$\sin\angle BAH = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{HB}\cos\angle ABH = \cos\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle BAC} =$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = 0,96$$

Задача №3

В тупоугольном треугольнике ABC AC=BC=8, высота AH равна 4. Найдите sinACB .

<u>Решение.</u>



Выразим площадь треугольника двумя способами:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB \sin ACB,$$

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot CB$$

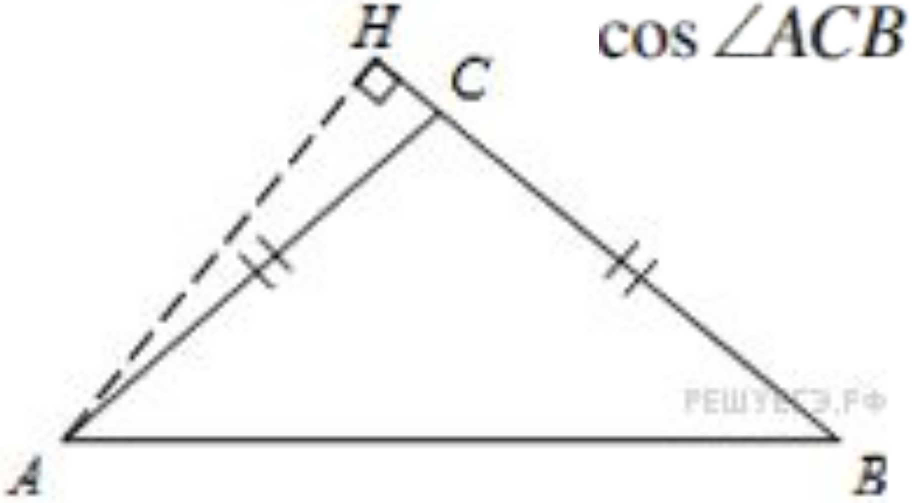
Значит

$$32 \sin ACB = 16 \Leftrightarrow \sin ACB = \frac{1}{2}.$$

Задача №4

В тупоугольном треугольнике ABC AC=BC=25, высота AH равна 20. Найдите cosACB .

Решение.



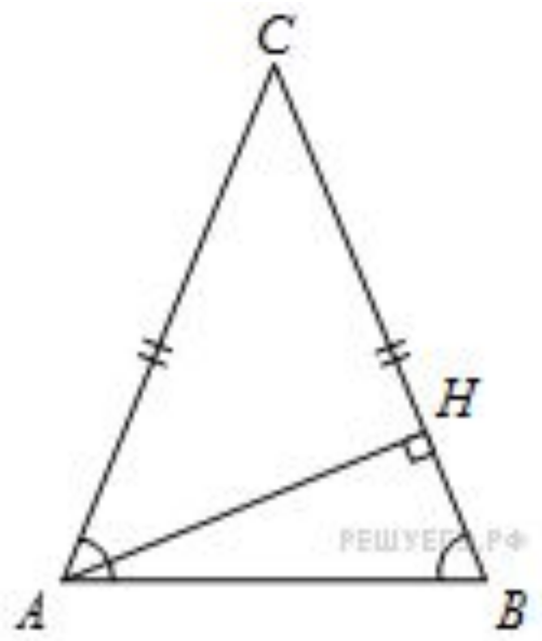
$$\cos\angle ACB = \cos(\pi - \angle ACH) = -\cos\angle ACH = -\frac{HC}{AC} =$$

$$= -\frac{\sqrt{AC^2 - AH^2}}{AC} = -\frac{15}{25} = -0,6$$

Задача №5

В треугольнике ABC AC=BC, высота AH равна 24, BH=7. Найдите cosBAC.

Решение.



Треугольник **ABC** равнобедренный, значит, углы **BAC и ABH** равны как углы при его основании.

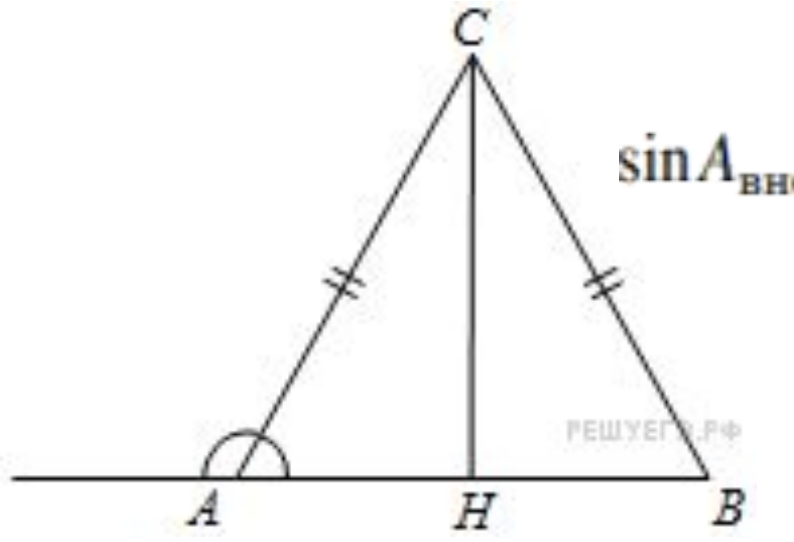
$$\cos\angle BAC = \cos\angle ABH = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{\sqrt{AH^2 + HB^2}} = \frac{7}{\sqrt{625}} = 0{,}28$$

Задача №6

В треугольнике ABC AC=BC=25, AB=40. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

Решение.

Синусы смежных углов равны, поэтому

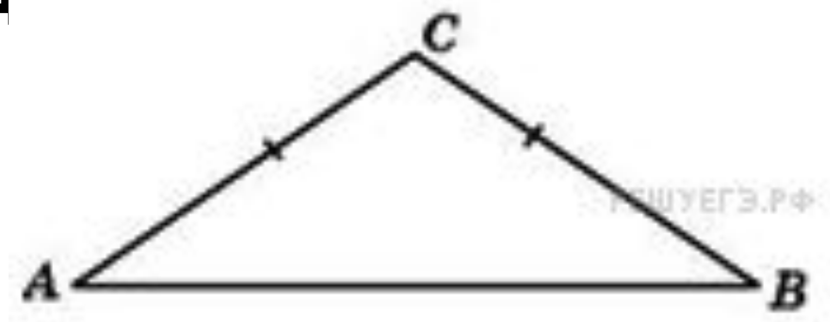


$$\sin A_{\text{внеш}} = \sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}{AC} = \frac{\sqrt{625-400}}{25} = 0{,}6.$$

Задача №7

Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах

Решение.



Т.к. треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны.

Обозначим за **x** меньший угол, тогда больший угол равен **(x+90).**

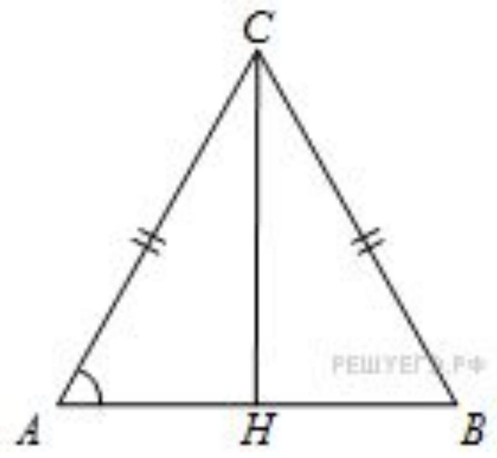
Значит **2x+(x+90)=180** => **3x=90** ; **x=30**

Равнобедренный треугольник: вычисление элементов

Задача №1

В треугольнике ABC AC=BC =5, sinA=7/25.
Найдите AB .

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам.

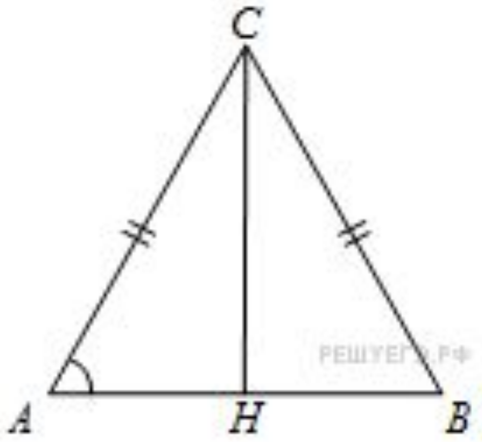
$$AB = 2AH = 2AC\cos A = 2AC\sqrt{1-\sin^2 A} =$$

$$= 2 \cdot 5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = 10 \cdot \frac{24}{25} = 9{,}6$$

Задача №2

В треугольнике ABC AC=BC=25, AB=40. Найдите sinA.

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам.

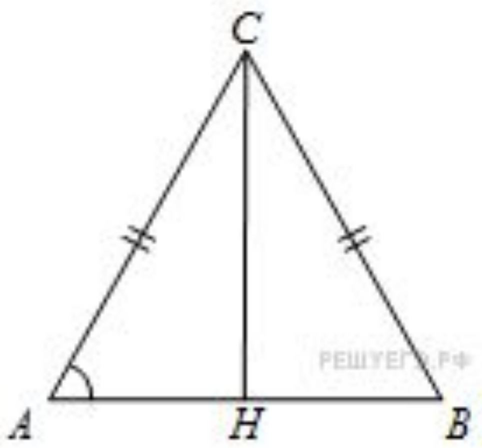
$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$

Значит по определению $\sin A = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{15}{25} = 0,6$

Задача №3

В треугольнике ABC AC=BC=8, sinA=0,5. Найдите CH.

Решение.

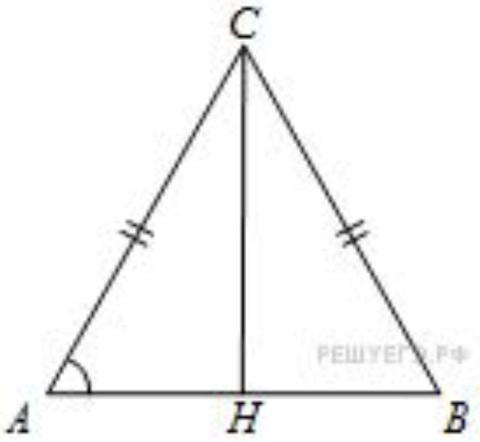


$$CH = AC\sin A = 8 \cdot 0,5 = 4$$

Задача №4

В треугольнике ABC AC=BC, CH=4, sinA=0,5. Найдите AC.

Решение.

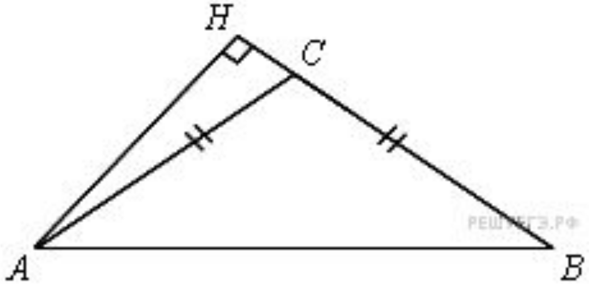


$$AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{4}{0,5} = 8$$

Задача №5

В треугольнике ABC AC=BC, AB=8, sinBAC=0,5. Найдите высоту AH.

Решение:



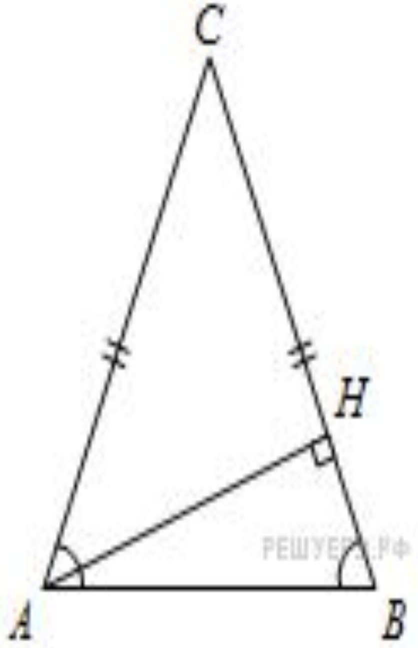
Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$AH = AB\sin\angle ABH = AB\sin\angle BAC = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$$

Задача №6

В треугольнике ABC AC=BC, AH-высота, AB=5, sinBAC=7/25. Найдите BH .

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

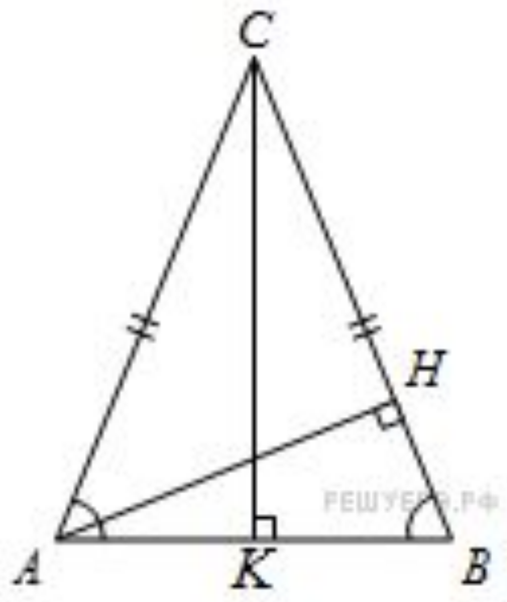
$$BH = AB\cos\angle ABH = AB\cos\angle BAC = AB\sqrt{1-\sin^2\angle BAC} =$$

$$= 5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5\cdot\frac{24}{25} = 4,8$$

Задача №7

В треугольнике ABC AC=BC=4√15, AH-высота, sinBAC=0,25. Найдите AH .

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании и высота, проведенная из точки C делит основание AB пополам.

$$AH = AB \cdot \sin\angle ABH = AB \cdot \sin\angle BAC = 2AK \cdot \sin\angle BAC =$$

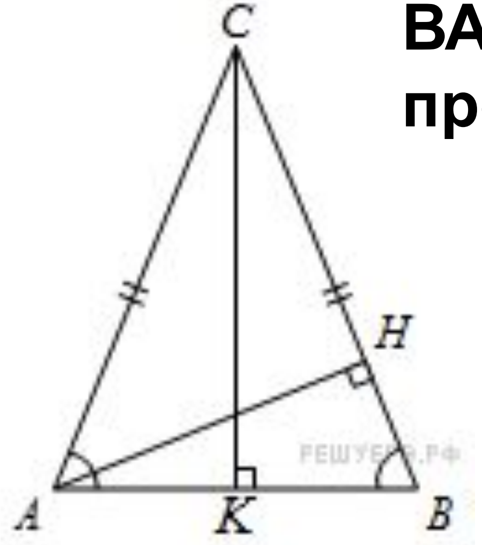
$$= 2AC \cdot \cos\angle BAC \cdot \sin\angle BAC = 2AC \cdot \sin\angle BAC \cdot \sqrt{1-\sin^2\angle BAC} =$$

$$= 2 \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Задача №8

В треугольнике ABC AC=BC=27, AH-высота, cosBAC=2/3. Найдите BH .

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании и высота, проведенная из точки C делит основание AB пополам.

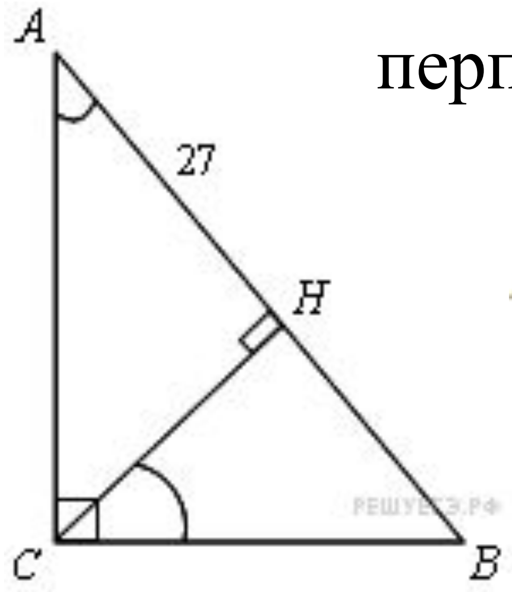
$$BH = AB\cos\angle ABH = AB\cos\angle BAC = 2AK\cos\angle BAC =$$

$$= 2AC\cos^2\angle BAC = 2\cdot 27\cdot\frac{4}{9} = 24$$

Задача №9

В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH— высота, AH=27, tgA=2/3. Найдите BH .

Решение.



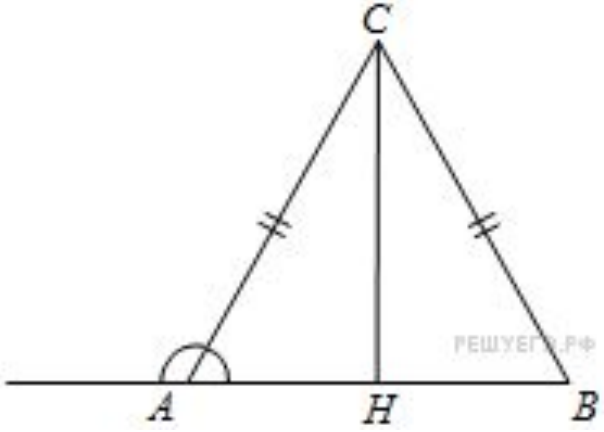
Углы **A** и **HCB** равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Значит

$$BH = CH\,\mathrm{tg}\,\angle HCB = CH\,\mathrm{tg}\,A = AH\,\mathrm{tg}^2 A = 27 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

Задача №10

В треугольнике ABC AC=BC, AB=40 sin внешнего угла при вершине A = 0,6. Найдите AC.

Решение.

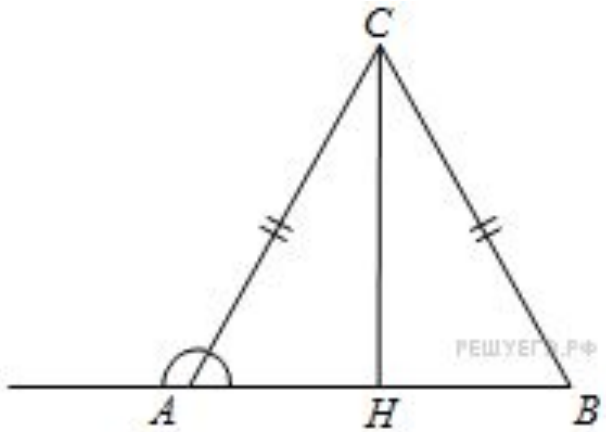


$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{AB}{2\sqrt{1-\sin^2 A_{\text{внеш}}}} = \frac{20}{\sqrt{1-0,36}} = \frac{20}{0,8} = 25.$$

Задача №11

В треугольнике ABC AC=BC, AB=8 cos внешнего угла при вершине A = - 0,5. Найдите AC.

Решение.



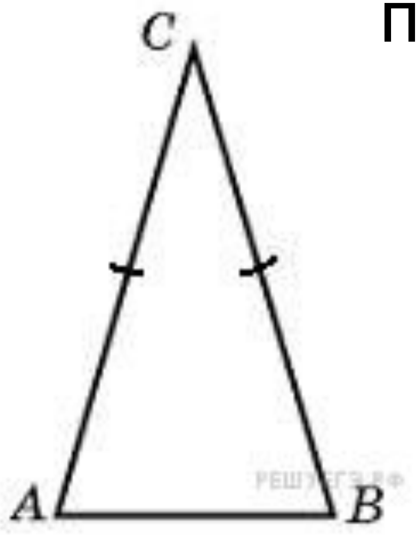
$$AC=\frac{AH}{\cos A}=\frac{AB}{2(-\cos A_{\text{внеш}})}=8.$$

Задача №12

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними.

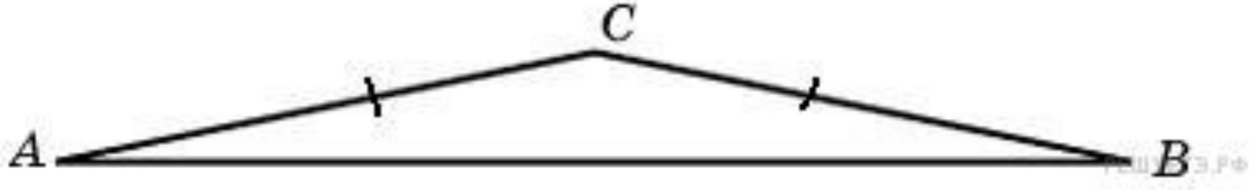


$$S = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sin 30^\circ = 25$$

Задача №13

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

<u>Решение.</u>



Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними.

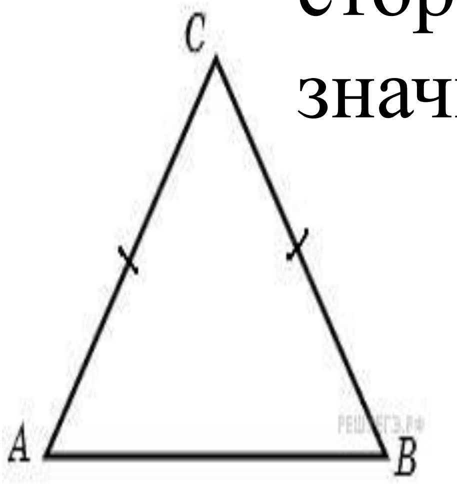
$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin 150^\circ = 200 \sin 30^\circ = 100$$

Задача №14

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 25.

Решение.

Площадь равнобедренного треугольника равна половине произведения квадрата его боковой стороны и синуса угла между боковыми сторонами, значит,



$$S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 30^\circ = 25$$

где *a* — искомая боковая сторона треугольника. Поэтому ***a* = 10.**

Задача №15

В треугольнике ABC AC=BC=4, угол C равен 30°. Найдите высоту AH.

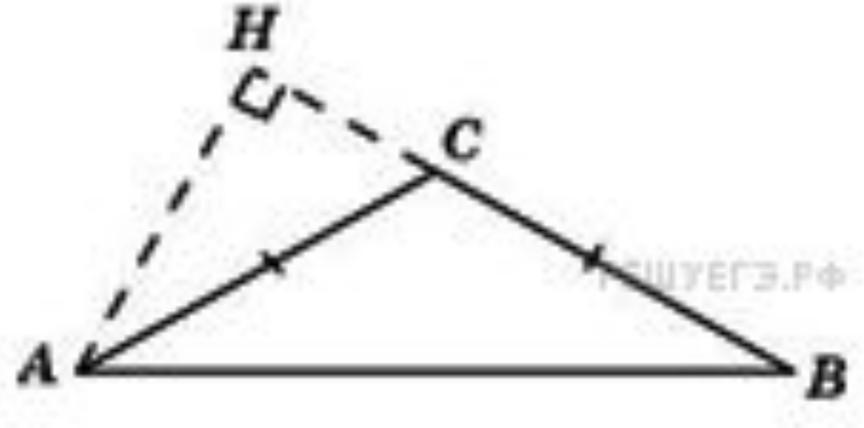
Решение.

$$AH = AC \sin C = 4 \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Задача №16

В треугольнике ABC AC=BC=2√3, угол C равен 120°. Найдите высоту AH.

<u>Решение.</u>

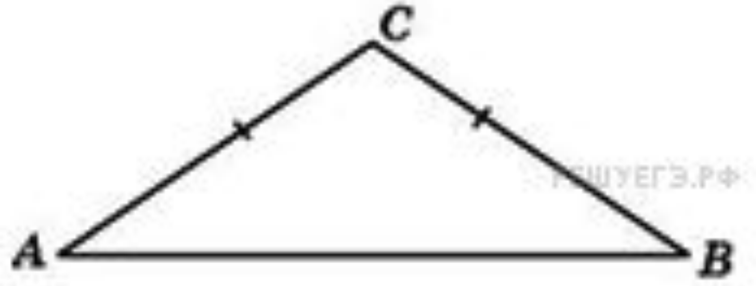


$$AH = AC\sin\angle ACH = AC\sin(180^\circ - \angle C) =$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Задача №17

В треугольнике ABC AC=BC, угол C равен 120°. AB =2√3. Найдите высоту AC



Решение.

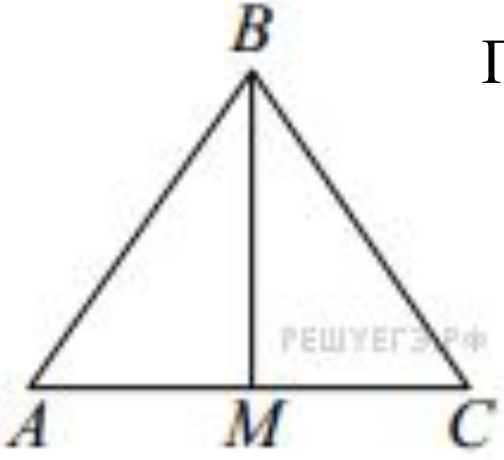
По теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 2AC^2(1 - \cos C)$$

$$AC = \sqrt{\frac{AB^2}{2(1-\cos C)}} = \sqrt{\frac{12}{2(1+0,5)}} = 2$$

Задача №18

В треугольнике *ABC* известно, что *AB=BC,* медиана *BM* равна 6. Площадь треугольника *ABC* равна 12√7. Найдите длину стороны *AB*.



Площадь треугольника ABM равна половине площади ABC, тогда:

$$S_{ABM} = 12\sqrt{7} : 2 = 6\sqrt{7}$$

$$AM = S_{ABM} : (\frac{1}{2} \cdot BM) = 6\sqrt{7} : (\frac{1}{2} \cdot 6) = 6\sqrt{7} : 3 = 2\sqrt{7}$$

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{28 + 36} = \sqrt{64} = 8$$