



Планиметрические задачи в КИМах ЕГЭ (базовый уровень)

Виды задач по планиметрии в ЕГЭ базового уровня:

- Равнобедренный треугольник: вычисление углов;
- Равнобедренный треугольник: вычисление элементов;

Равнобедренный треугольник: вычисление углов

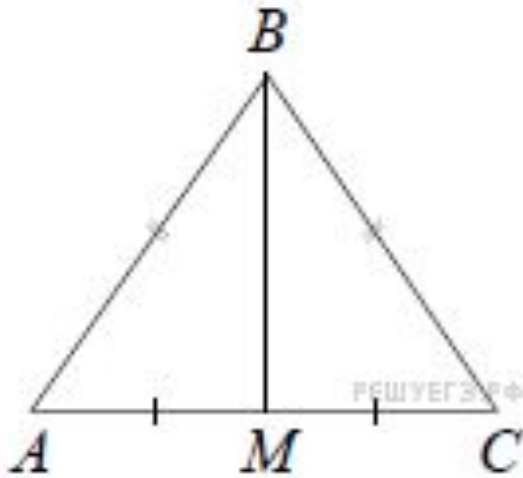
Задача №1

В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны $AB = BC = 5$, медиана $BM = 4$. Найдите

Решение.

В равнобедренном треугольнике медиана опущенная на основание является высотой и биссектрисой. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM . По теореме Пифагора найдём AM : $AM=3$. Найдём $\cos \angle BAC$:

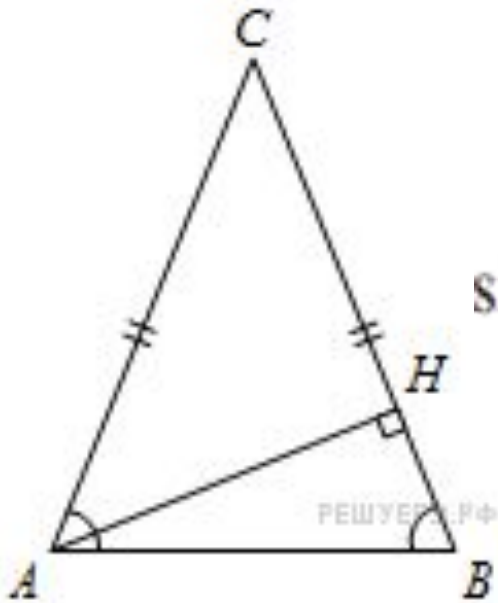
$$\cos A = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \cos A = \frac{3}{5} = 0,6.$$



Задача №2

В треугольнике ABC $AB=BC$, AH – высота, $\sin \angle BAC = 7/5$. Найдите $\sin \angle BAH$.

Решение. Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.



$$\begin{aligned} \sin \angle BAH &= \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{HB} \cos \angle ABH = \cos \angle BAC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 0,96 \end{aligned}$$

Задача №3

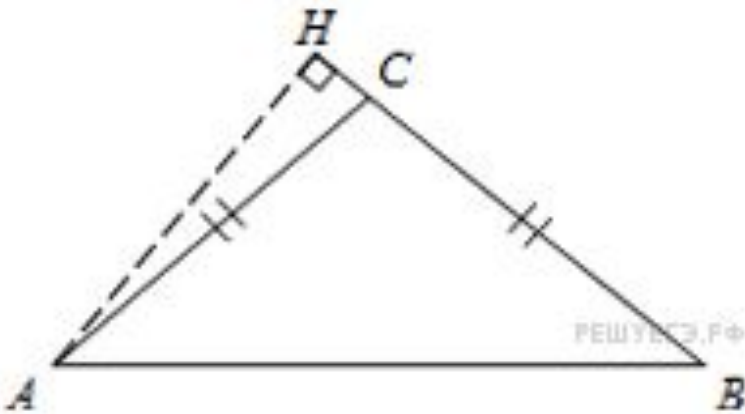
В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC=8$,
высота AH равна 4. Найдите $\sin ACB$.

Решение.

Выразим площадь треугольника двумя способами:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB \sin ACB,$$

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot CB$$



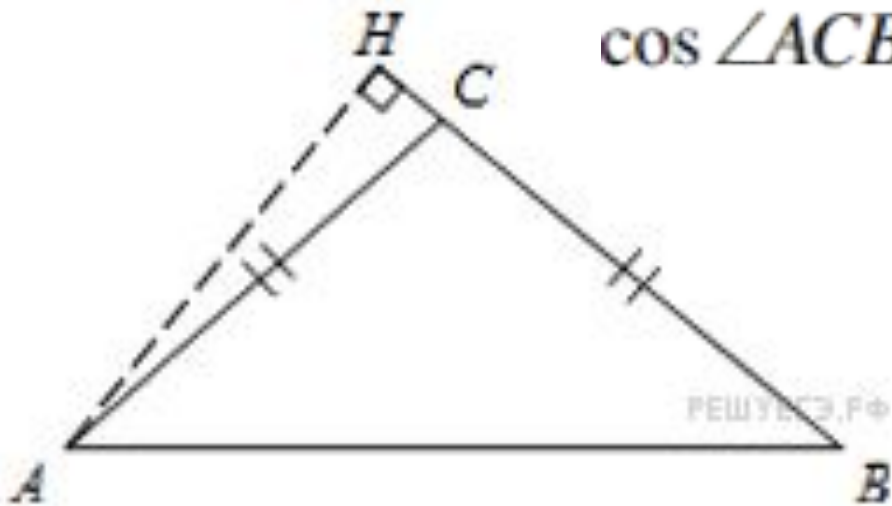
Значит

$$32 \sin ACB = 16 \Leftrightarrow \sin ACB = \frac{1}{2}.$$

Задача №4

В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC=25$, высота AH равна 20. Найдите $\cos ACB$.

Решение.



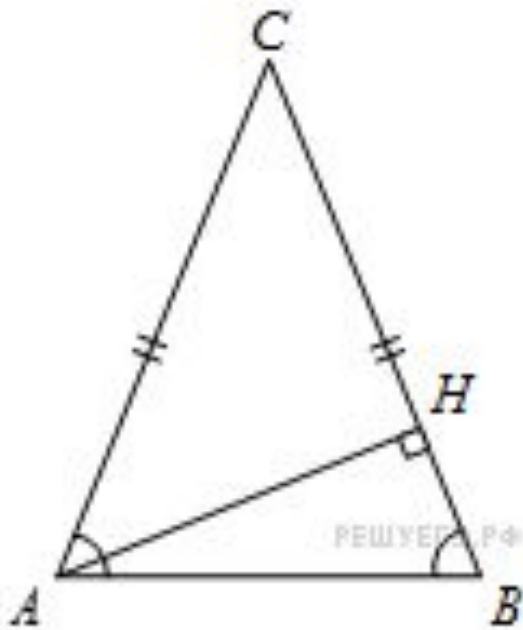
$$\begin{aligned}\cos \angle ACB &= \cos(\pi - \angle ACH) = -\cos \angle ACH = -\frac{HC}{AC} = \\ &= -\frac{\sqrt{AC^2 - AH^2}}{AC} = -\frac{15}{25} = -0,6\end{aligned}$$

Задача №5

В треугольнике ABC $AC=BC$, высота AH равна 24, $BH=7$. Найдите $\cos \angle BAC$.

Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.



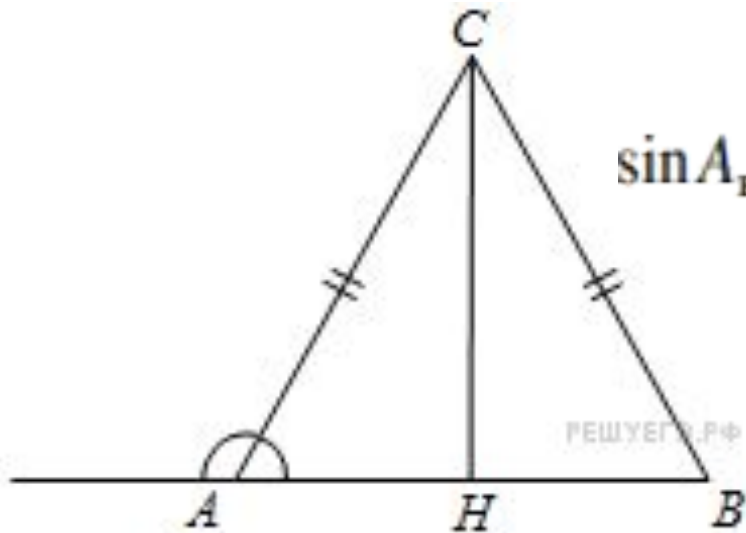
$$\cos \angle BAC = \cos \angle ABH = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{\sqrt{AH^2 + HB^2}} = \frac{7}{\sqrt{625}} = 0,28$$

Задача №6

В треугольнике ABC $AC=BC=25$, $AB=40$. Найдите синус внешнего угла при вершине A .

Решение.

Синусы смежных углов равны, поэтому

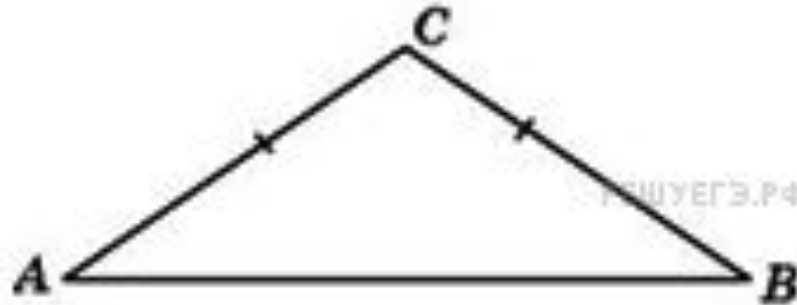


$$\sin A_{\text{внеш}} = \sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}{AC} = \frac{\sqrt{625 - 400}}{25} = 0,6.$$

Задача №7

Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол. Ответ

дайте в градусах
Решение.



Т.к. треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны. Обозначим за x меньший угол, тогда больший угол равен $(x+90)$.

$$\text{Значит } 2x+(x+90)=180 \Rightarrow 3x=90 ; \mathbf{x=30}$$

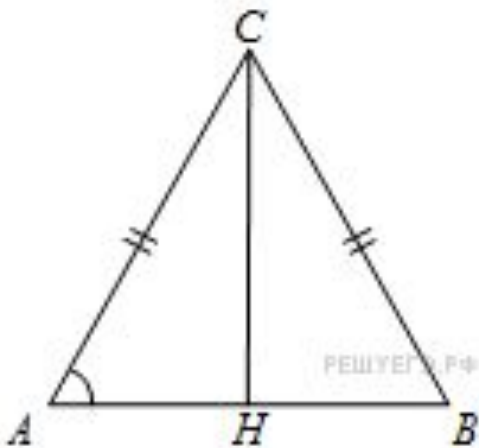
Равнобедренный треугольник: вычисление элементов

Задача №1

В треугольнике ABC $AC=BC=5$, $\sin A=7/25$.

Найдите AB .
Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам.



$$AB = 2AH = 2AC \cos A = 2AC \sqrt{1 - \sin^2 A} =$$
$$= 2 \cdot 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 10 \cdot \frac{24}{25} = 9,6$$

Задача №2

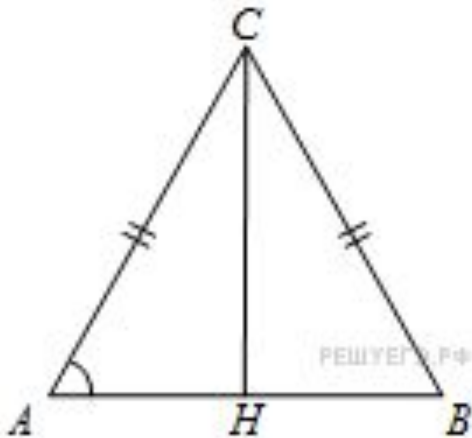
В треугольнике ABC $AC=BC=25$, $AB=40$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам.

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$

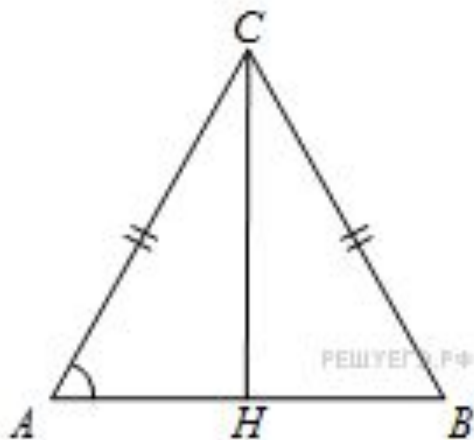
Значит по определению $\sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{15}{25} = 0,6$



Задача №3

В треугольнике ABC $AC=BC=8$, $\sin A=0,5$. Найдите CH .

Решение.



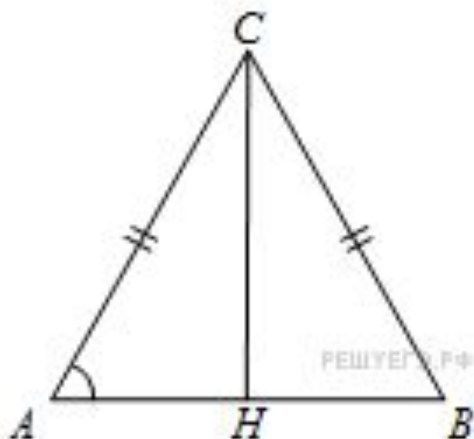
$$CH = AC \sin A = 8 \cdot 0,5 = 4$$

Задача №4

В треугольнике ABC $AC=BC$, $CH=4$, $\sin A=0,5$.

Найдите AC.

Решение.

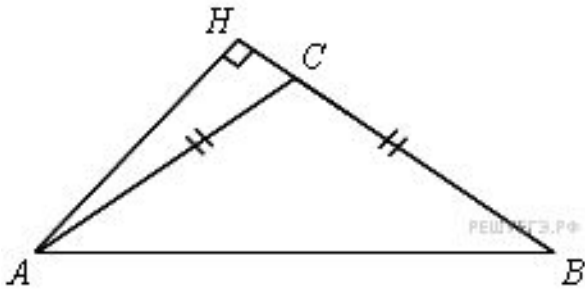


$$AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{4}{0,5} = 8$$

Задача №5

В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=8$, $\sin \angle BAC=0,5$.

Решение. Найдите высоту AH .



Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

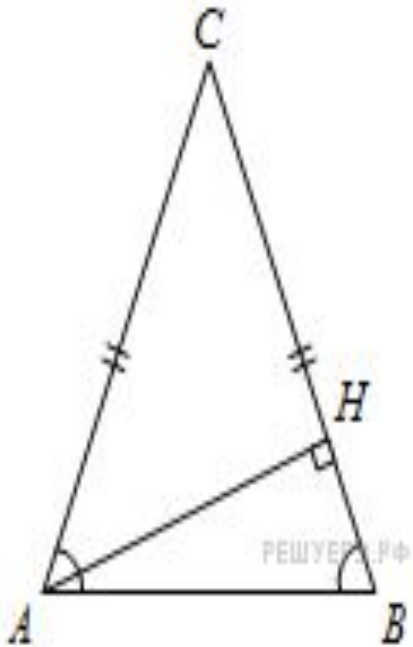
$$AH = AB \sin \angle ABH = AB \sin \angle BAC = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Задача №6

В треугольнике ABC $AC=BC$, AH -высота, $AB=5$, $\sin \angle BAC = 7/25$. Найдите BH .

Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

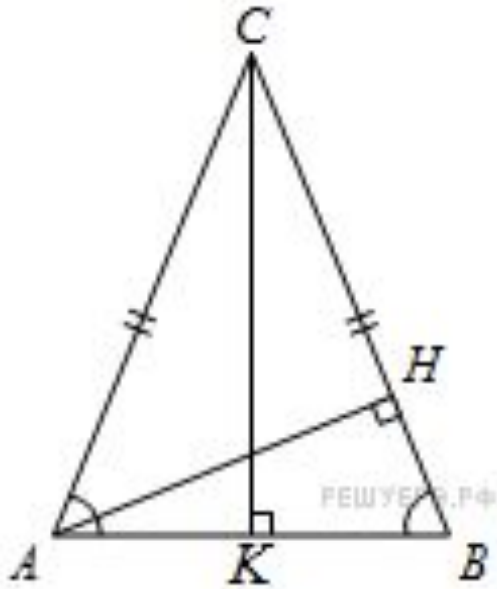


$$\begin{aligned} BH &= AB \cos \angle ABH = AB \cos \angle BAC = AB \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \\ &= 5 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5 \cdot \frac{24}{25} = 4,8 \end{aligned}$$

Задача №7

В треугольнике ABC $AC=BC=4\sqrt{15}$, AH-высота, $\sin \angle BAC = 0,25$. Найдите AH.

Решение.



Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании и высота, проведенная из точки C делит основание AB пополам.

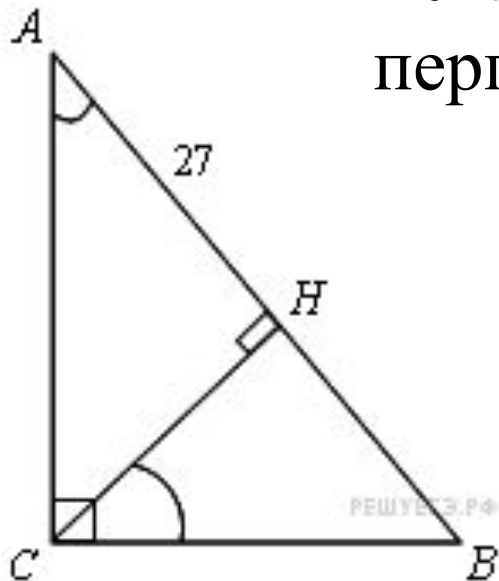
$$\begin{aligned}AH &= AB \cdot \sin \angle ABH = AB \cdot \sin \angle BAC = 2AK \cdot \sin \angle BAC = \\&= 2AC \cdot \cos \angle BAC \cdot \sin \angle BAC = 2AC \cdot \sin \angle BAC \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \\&= 2 \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{15}{2} = 7,5\end{aligned}$$

Задача №9

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $АН=27$, $\operatorname{tg}A=2/3$. Найдите BH.

Решение.

Углы **A** и **HCB** равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Значит

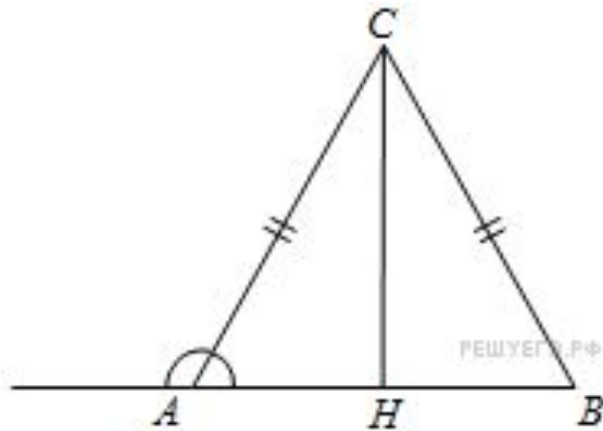


$$BH = CH \operatorname{tg} \angle HCB = CH \operatorname{tg} A = AH \operatorname{tg}^2 A = 27 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

Задача №10

В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=40$ \sin внешнего угла при вершине $A = 0,6$. Найдите AC .

Решение.

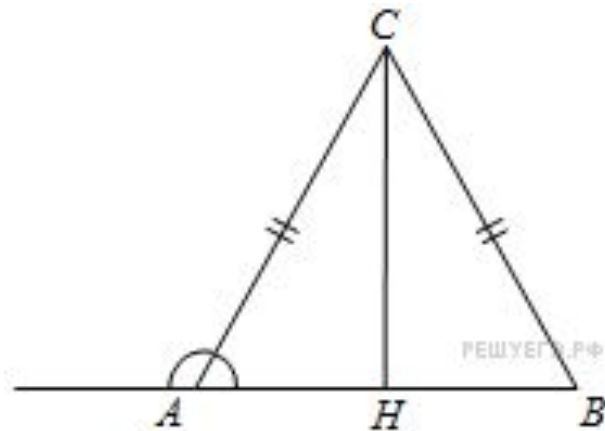


$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{AB}{2\sqrt{1 - \sin^2 A_{\text{внеш}}}} = \frac{20}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{20}{0,8} = 25.$$

Задача №11

В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=8$ \cos внешнего угла при вершине $A = -0,5$. Найдите AC .

Решение.



$$AC = \frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{2(-\cos A_{\text{внеш}})} = 8.$$

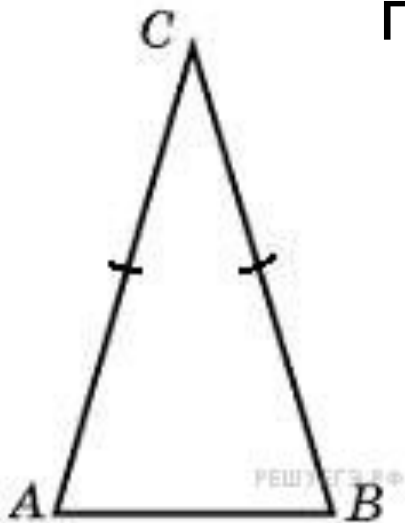
Задача №12

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° .

Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними.

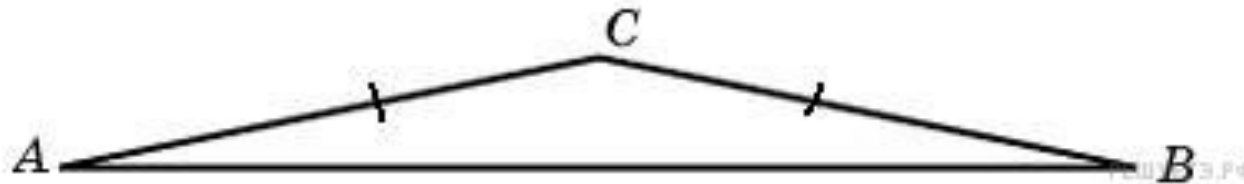


$$S = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sin 30^\circ = 25$$

Задача №13

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

Решение.



Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin 150^\circ = 200 \sin 30^\circ = 100$$

Задача №14

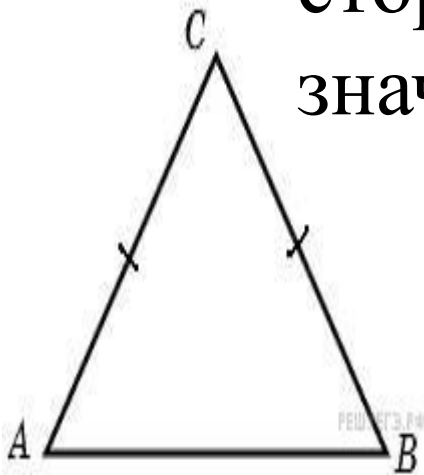
Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна

Решение.

Площадь равнобедренного треугольника равна половине произведения квадрата его боковой стороны и синуса угла между боковыми сторонами, значит,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 30^\circ = 25$$

где a — искомая боковая сторона треугольника. Поэтому **$a = 10$** .



Задача №15

В треугольнике ABC $AC=BC=4$, угол C равен 30° . Найдите высоту AH.

Решение.

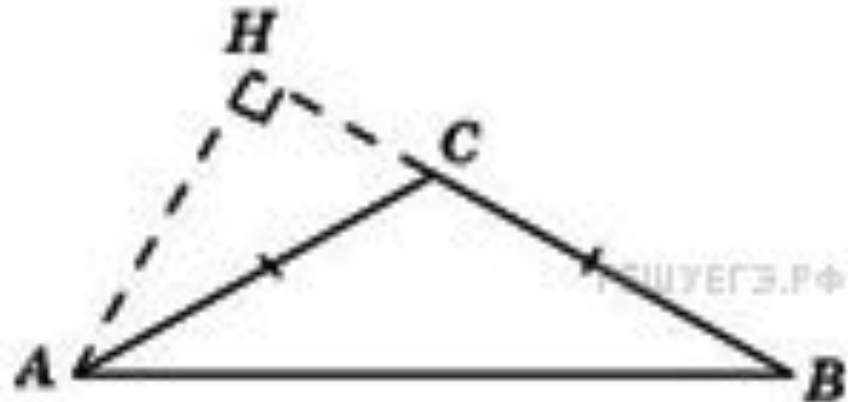


$$AH = AC \sin C = 4 \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Задача №16

В треугольнике ABC $AC=BC=2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите высоту AH .

Решение.

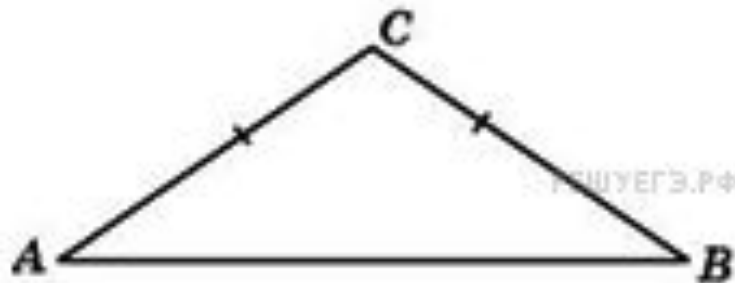


$$\begin{aligned}AH &= AC \sin \angle ACH = AC \sin(180^\circ - \angle C) = \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\end{aligned}$$

Задача №17

В треугольнике ABC $AC=BC$, угол C равен 120° . $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту $\triangle C$.

Решение.



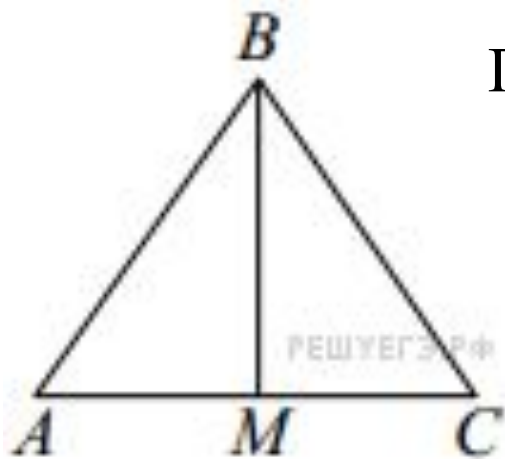
По теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 2AC^2(1 - \cos C)$$

$$AC = \sqrt{\frac{AB^2}{2(1 - \cos C)}} = \sqrt{\frac{12}{2(1 + 0,5)}} = 2$$

Задача №18

В треугольнике ABC известно, что $AB=BC$, медиана BM равна 6. Площадь треугольника ABC равна $12\sqrt{7}$. Найдите длину стороны AB .



Площадь треугольника ABM равна половине площади ABC , тогда:

$$S_{ABM} = 12\sqrt{7} : 2 = 6\sqrt{7}$$

$$AM = S_{ABM} : \left(\frac{1}{2} \cdot BM\right) = 6\sqrt{7} : \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right) = 6\sqrt{7} : 3 = 2\sqrt{7}$$

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{28 + 36} = \sqrt{64} = 8$$