



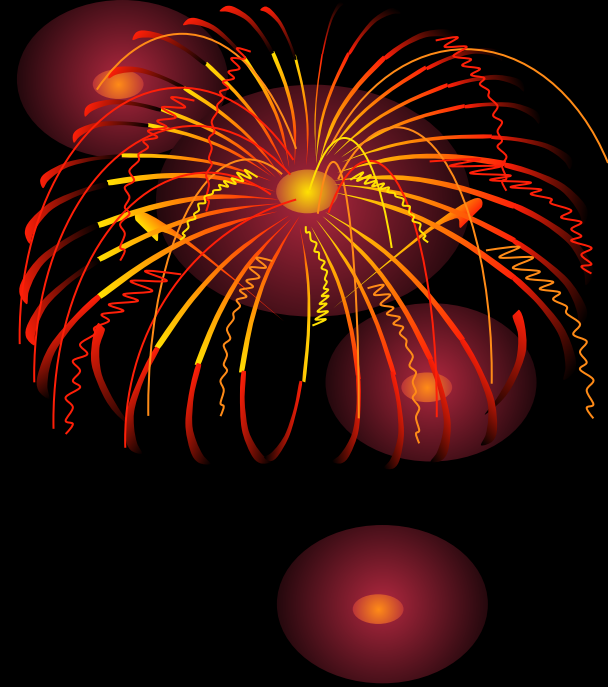
Теорема (площадь
ортогональной проекции.)



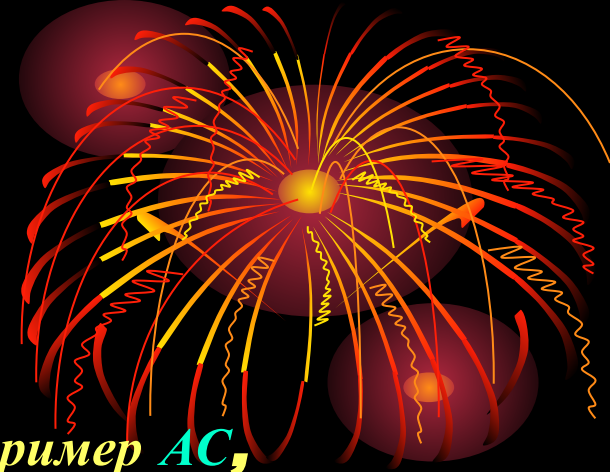
теорема

Площадь ортогональной проекции
многоугольника на плоскость равна
площади проектируемого
многоугольника, умноженной на
косинус угла между плоскостью
многоугольника и плоскостью
проекции.

- Док-во
- Док-во (площади проекции многоугольника).



Доказательство-1. Площадь проекции треугольника

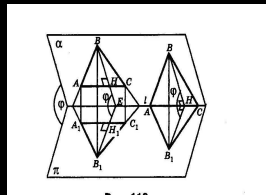


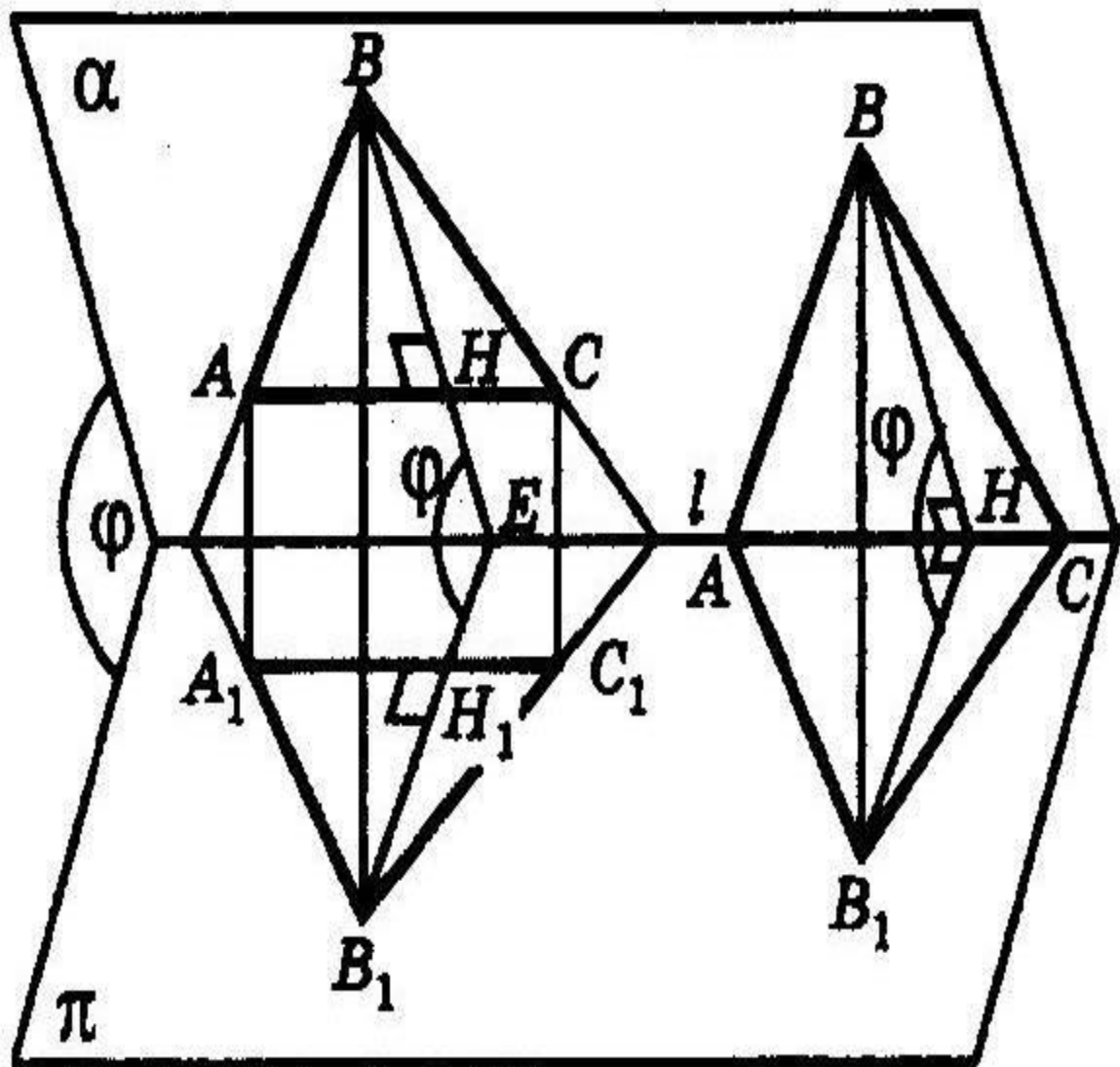
1. а) пусть одна из сторон, например AC , проектируемого треугольника ABC параллельна прямой $L \parallel \alpha \cap \pi$ Или лежит на ней. Тогда его высота BH перпендикулярна прямой L , а площадь равна $\frac{1}{2} AC \cdot BH$. На основании выше рассмотренных свойств ортогональной проекции отрезка имеем: $AC \parallel L \Rightarrow A_1C_1 \parallel L$; $AC = A_1C_1$; $B_1H_1 = BH \cdot \cos \phi$.

По теореме о трех перпендикулярах прямая B_1H_1 – ортогональная проекция прямой BH – перпендикулярна прямой L , следовательно, отрезок B_1H_1 – высота треугольника $A_1B_1C_1$.

Поэтому $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1H_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BH \cdot \cos \phi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \phi$. Таким образом,

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \phi. \quad (2)$$





б) Ни одна из сторон проектируемого треугольника ABC не параллельна прямой L .

Проведем через каждую вершину треугольника прямую, параллельную прямой L . Одна из этих прямых лежит между двумя другими и, следовательно, разбивает треугольник ABC на треугольники ABD и ACD с высотами соответственно BH и CE , проведенными к их общей стороне AD (или ее продолжению), которая параллельна L .

Прямая m_1 – ортогональная проекция прямой m – также разбивает треугольник $A_1B_1C_1$ – ортогональная проекция треугольника ABC – на треугольники $A_1B_1D_1$

и $A_1C_1D_1$, где $A_1D_1 \parallel L$, $B_1H_1 \perp A_1D_1$, $C_1E_1 \perp A_1D_1$. Принимаем во внимание (1) и (2), получаем $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta A_1B_1D_1} + S_{\Delta A_1C_1D_1} = S_{\Delta ABD} \cdot \cos \phi + S_{\Delta ACD} \cdot \cos \phi = (S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}) \cdot \cos \phi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \phi$. Итак, для произвольно

расположенного в плоскости α треугольник ABC выполняется

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \phi. \quad (3)$$

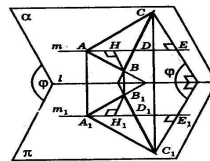


Рис. 111

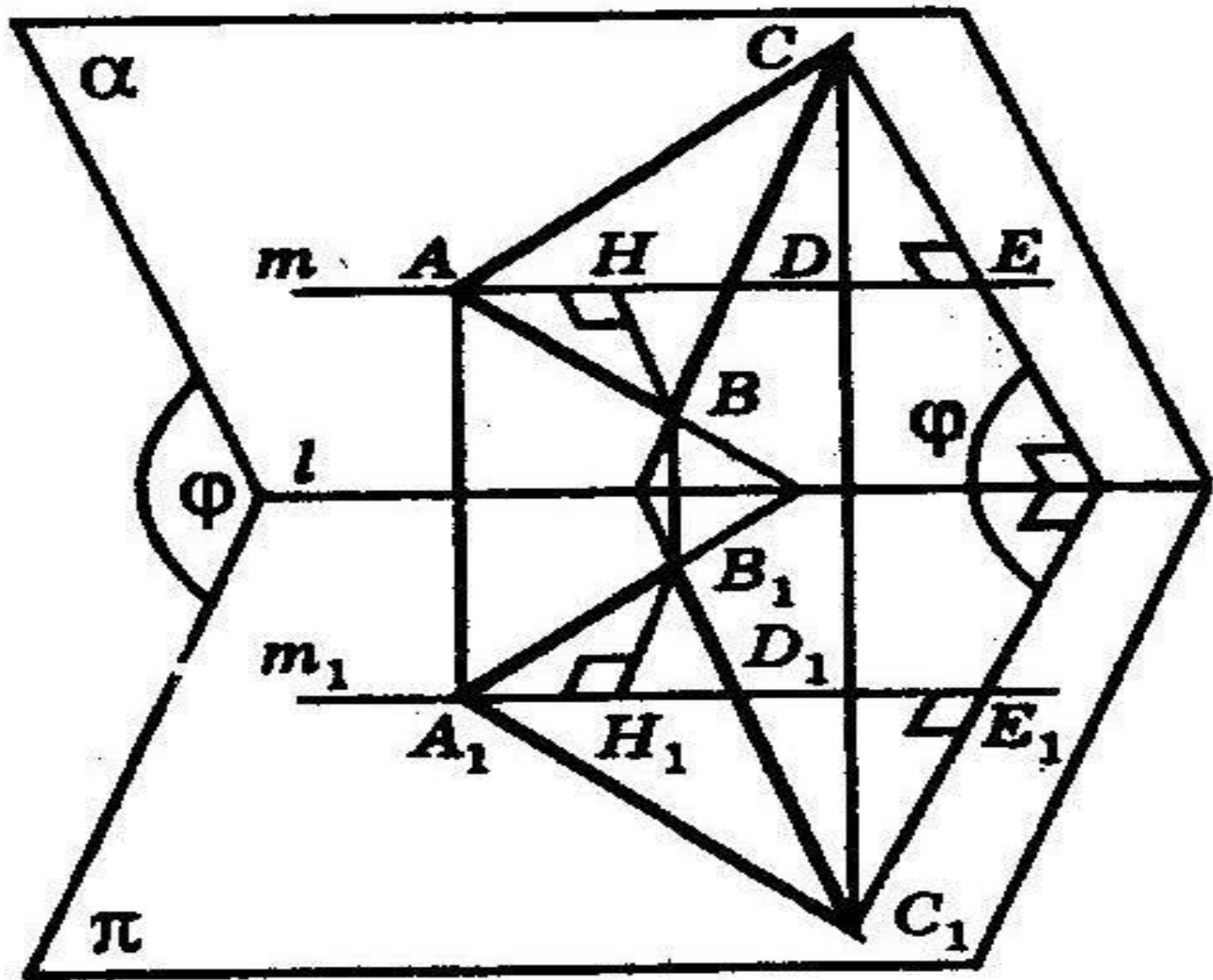
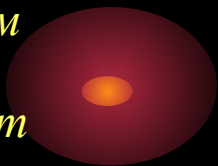


Рис. 111

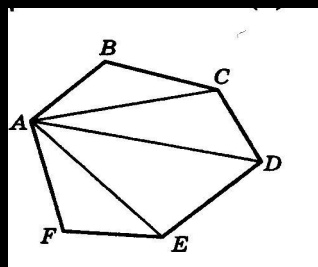


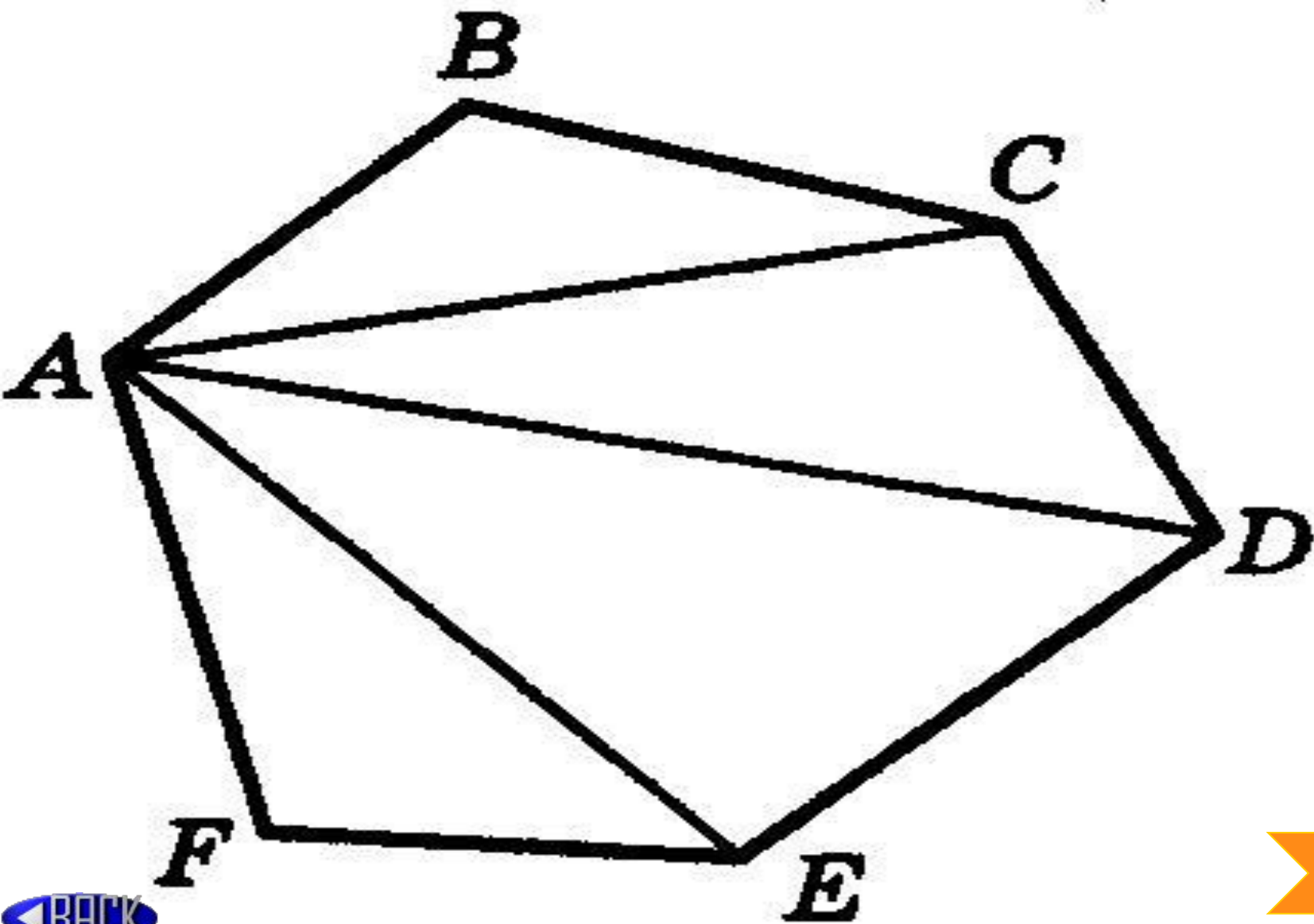


2. Площадь проекции многоугольника. Пусть Φ – данный выпуклый многоугольник **ABCDEF**, расположенный в плоскости α . Его ортогональную проекцию – многоугольник **A₁B₁C₁D₁E₁F₁** – обозначим Φ_1 .

Проведя из вершины **A** многоугольника Φ все его диагонали, разобьём этот многоугольник в объединение непересекающихся треугольников **ABC**, **ACD**, **ADE**, **AEF** и обозначим их площади соответственно **S₁**, **S₂**, **S₃** и **S₄**. Тогда для площади **S_ф** многоугольник Φ выполняется **S_ф = S₁ + S₂ + S₃ + S₄**.

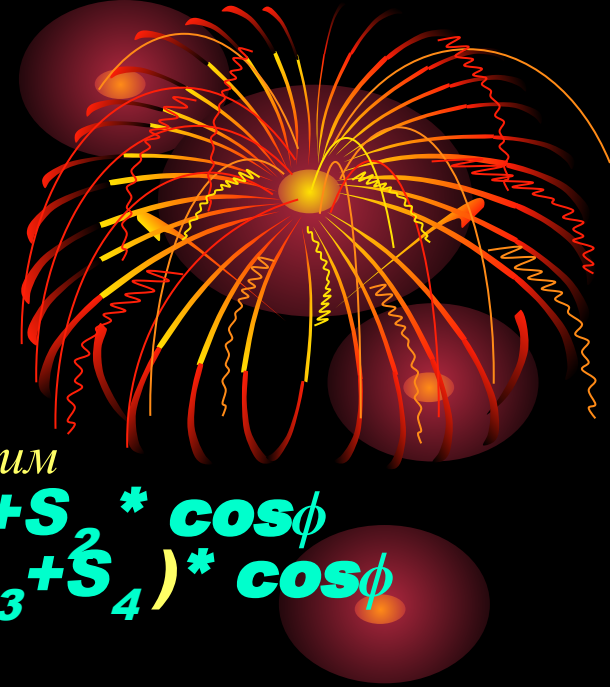
Аналогичным образом многоугольник Φ_1 разобьём в объединение треугольников **A₁B₁C₁**, **A₁C₁D₁**, **A₁D₁E₁**, **A₁E₁F₁**, площади которых обозначим соответственно **S₁'**, **S₂'**, **S₃'** и **S₄'**. Тогда для площади **S_{ф1}** многоугольника Φ_1 выполняется **S_{ф1} = S₁' + S₂' + S₃' + S₄'** (4)





[◀ BACK](#)





Принимая во внимание (2), (3) и (4), находим

$$\begin{aligned} S_{\Phi_1} &= S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4 = S_1 * \cos\phi + S_2 * \cos\phi \\ &+ S_3 * \cos\phi + S_4 * \cos\phi = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) * \cos\phi \\ &= S_{\Phi} * \cos\phi. \end{aligned}$$

Разбивая указанным способом на треугольники любой **n** – угольник Φ , получим аналогичное соотношение между площадью S_{Φ} этого **n**- угольника и площадью S_{Φ_1} и его проекции Φ_1 :

$$S_{\Phi_1} = S_{\Phi} * \cos\phi,$$

Где ϕ - угол между плоскостью данного **n**- угольника и плоскостью проекции.

Теорема доказана. ▼