Теорема (площадь ортогональной проекции.)

теорема

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

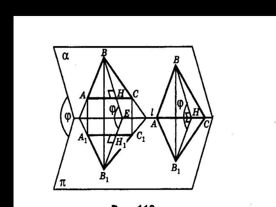
- Док-во
- Док-во (площади проекции многоугольника).

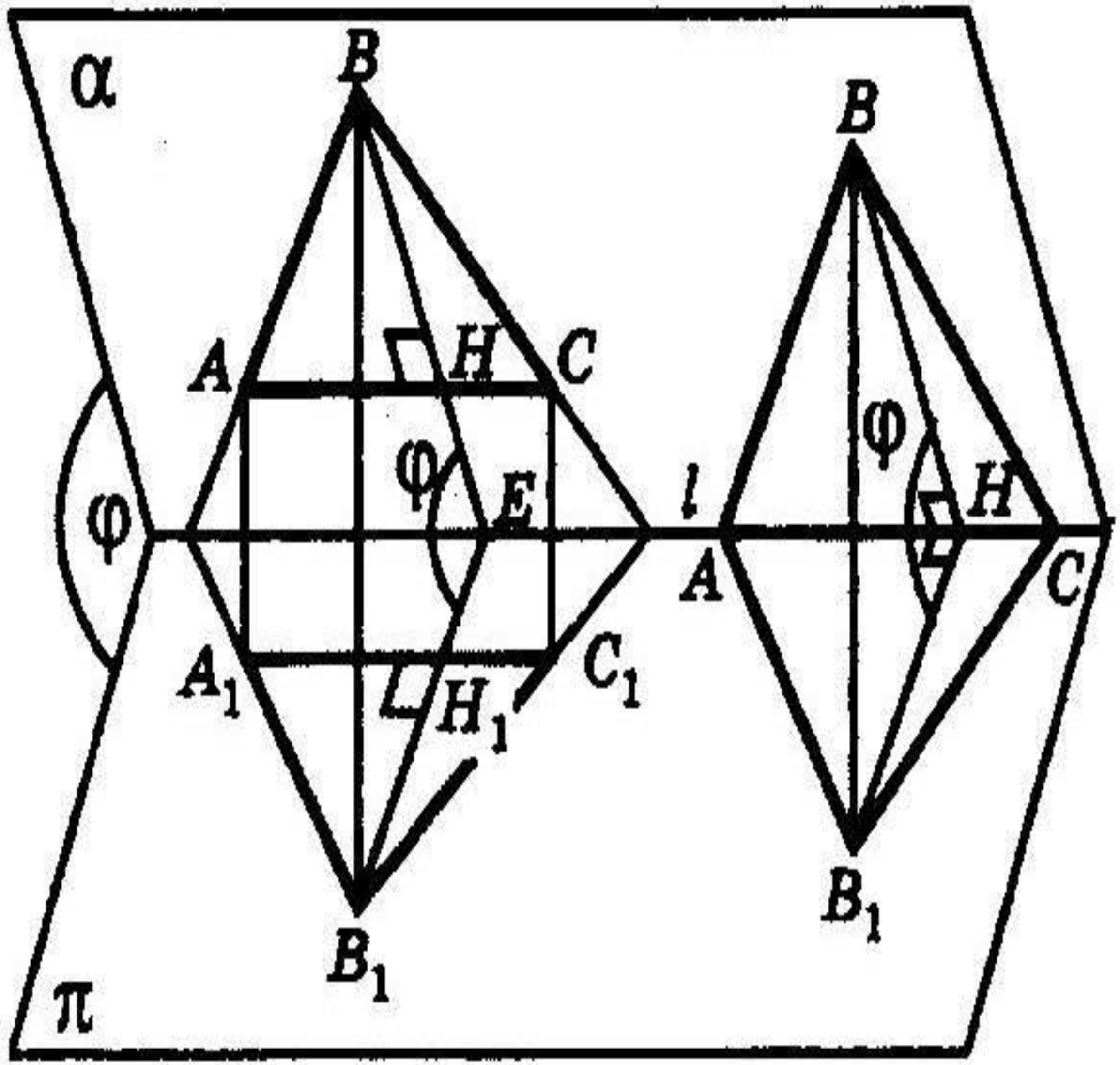
BACK

Доказательство-1. *Площадь проекции треугольника*

1. *а*) *пусть одна из сторон*, *например* AC, *проектируемого треугольника* ABC *параллельна прямой* $L \parallel \alpha \cap \pi$ *Или лежит на ней*. *Тогда его высота* BH *перпендикулярна прямой* L, *а площадь равна* $\frac{1}{2} AC \cdot BH$. *На основании выше рассмотренных свойств ортогональной проекции отрезка имеем*: $AC \parallel L \Rightarrow A_1C_1 \parallel L$; $AC = A_1C_1$; $B_1H_1 = BH \cdot \cos\phi$. *По теореме о трех перпендикулярах прямая* B_1H_1 – *ортогональная проекция прямой* BH- *перпендикулярна прямой* L, *следовательно*, *отрезок* B_1H_1 – *высота треугольника* $A_1B_1C_1$.

Поэтому $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1H_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BH \cdot \cos\phi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\phi$. *Таким образом*, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\phi$. (2)





BACK

б) *Ни одна из сторон проектируемого треугольника ABC не параллельна прямой* **L.**

Проведем через каждую вершину треугольника прямую, параллельную прямой **L.** *Одна = из этих прямых лежит между двумя другими и, следовательно, разбивает треугольник ABC на треугольники* **ABD** *и ACD с высотами соответственно* **BH** *и CE, проведенными к их общей стороне* **AD** *(или ее продолжению),которая параллельна* **L.**

Прямая m_1 *– ортогональная проекция прямой* **m** *– также разбивает треугольник* $A_1B_1C_1$ *– ортогональная проекция треугольника ABC – на треугольники* $A_1B_1D_1$ *и* $A_1C_1D_1$, *где* $A_1D_1 \parallel L$, $B_1H_1 \perp A_1D_1$, $C_1E_1 \perp A_1D_1$. *принимаем во внимание* **(1)** *и* **(2),** *получаем* $S\Delta A_1B_1C_1 = S\Delta A_1B_1D_1 + S\Delta A_1C_1D_1 = S\Delta ABD * \cos\phi + S\Delta ACD * \cos\phi = (S\Delta ABD + S\Delta ACD) * \cos\phi = S\Delta ABC * \cos\phi$. *Итак, для произвольно расположенного в плоскости* α треугольник *ABC выполняется* $S\Delta A_1B_1C_1 = S\Delta ABC * \cos\phi$. **(3)**

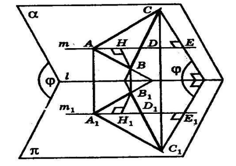
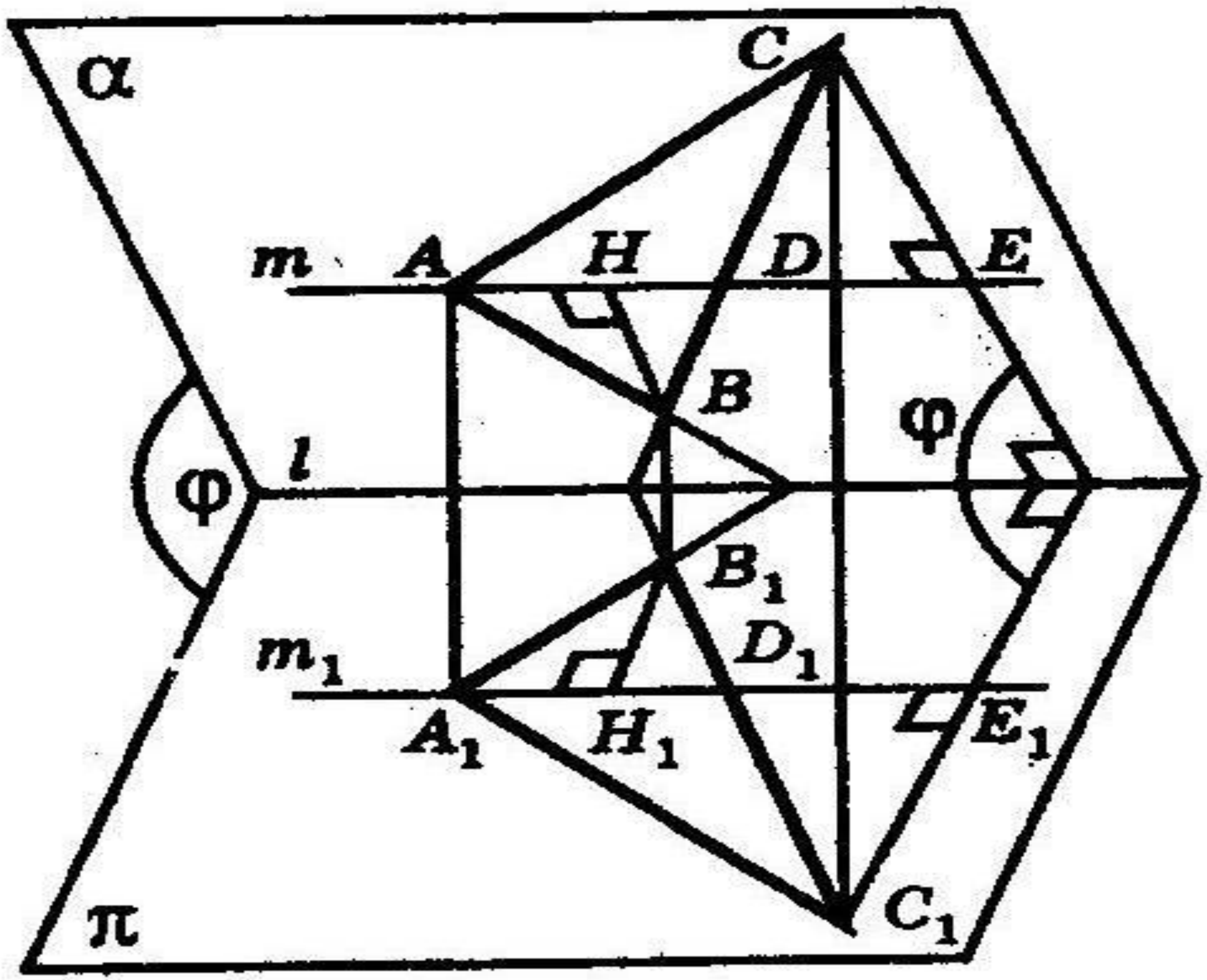


Рис. 111



BACK

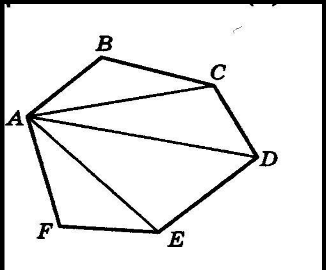
Рис. 111

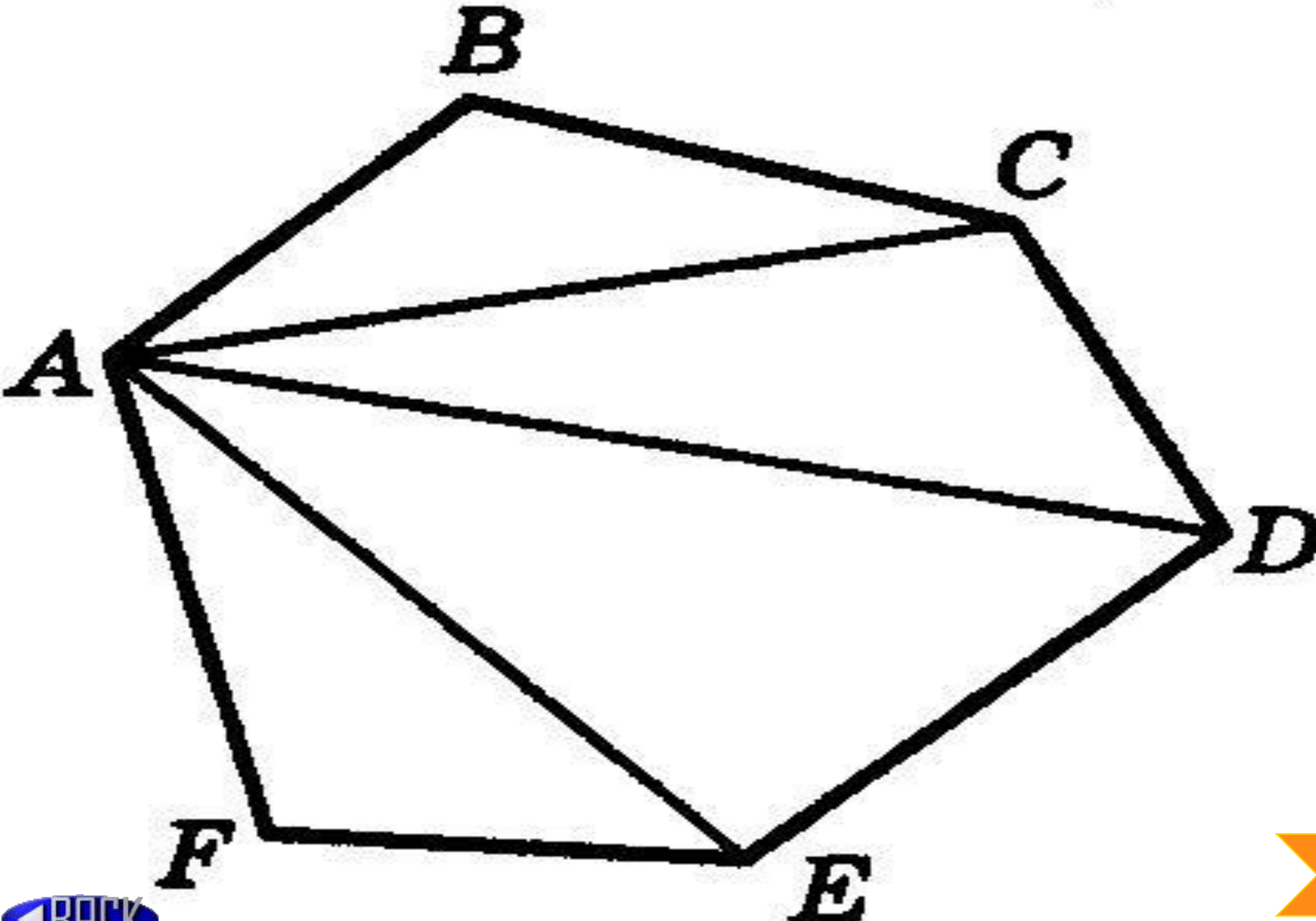
2. *Площадь проекции многоугольника.* Пусть Ф – данный выпуклый многоугольник **ABCDEF**, расположенный в плоскости α. Его ортогональную проекцию – многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – обозначим $Ф_1$.

Проведя из вершины A многоугольника Ф все его диагонали, разобьём этот многоугольник в объединение непересекающихся треугольников **ABC**, **ACD**, **ADE**, **AEF** и обозначим их площади соответственно S_1, S_2, S_3 и S_4. Тогда для площади $S_ф$ многоугольник Ф выполняется $S_ф = S_1+S_2+S_3+S_4$.

Аналогичным образом многоугольник $Ф_1$ разобьём в объединение треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1E_1$, $A_1E_1F_1$, площади которых обозначим соответственно S'_1, S'_2, S'_3 и S'_4. Тогда для площади $S_{ф_1}$ многоугольника $Ф_1$ выполняется

$$S_{ф_1}=S'_1+S'_2+S'_3+S'_4. \qquad (4)$$




B
C
A
D
F
E

Принимая во внимание **(2), (3)** *и* **(4),** *находим*

$$S_{\phi 1} = S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4 = S_1 * \cos\phi + S_2 * \cos\phi + S_3 * \cos\phi + S_4 * \cos\phi = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) * \cos\phi = S_\phi * \cos\phi.$$

Разбивая указанным способом на треугольники любой **n –** *угольник* Φ, *получим аналогичное соотношение между площадью* S_ϕ *этого* **n-** *угольника и площадью* $S_{\phi 1}$ *и его проекции* Φ_1:

$$S_{\phi 1} = S_\phi * \cos\phi,$$

Где ϕ **-** *угол между плоскость данного* **n-** *угольника и плоскостью проекцией*.

Теорема доказана. ▼

BACK