

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НАИМЕНЬШЕЙ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Учитель:

Александрова С.В.

Актуальность

- Математика – предмет, изучающийся с первого по выпускной класс. Объем материала, терминов, которыми должен оперировать старшеклассник по математике, чрезвычайно велик. Необходимо знать и уметь применять такие методы для решения задач, которые позволят сэкономить время и будут наглядны, т.е. решение задачи будет выглядеть очевидным. Многие задачи алгебры очень трудно решить аналитическим путем. Поэтому любое представление условия задачи в виде рисунка или чертежа облегчает решение задачи. Многие задачи ЕГЭ из части 2 можно решить геометрическим методом.
- Геометрический метод состоит в том, что само доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением.

В своей работе мы ставим следующую цель:

- Показать, что преимущество геометрического решения алгебраических задач в его наглядности, так как геометрический подход допускает изящное решение;

Задачи:

- Найти и изучить литературу по данной теме.
- Рассмотреть алгебраические задачи, которые можно решить и алгебраически и геометрически. Сравнить способы решения задач различными методами.
- Определить задачи, которые удобнее решать геометрическим методом.
- Рассмотреть ряд приемов решения нестандартных и конкурсных задач.
- Развивающая задача: повысить свое интеллектуальное развитие.

- Предмет исследования: Геометрические методы решения задач.
- Объект исследования: Алгебраические задачи.
- Методы исследования: Аналогия, обобщение, анализ научной литературы.

Основная часть

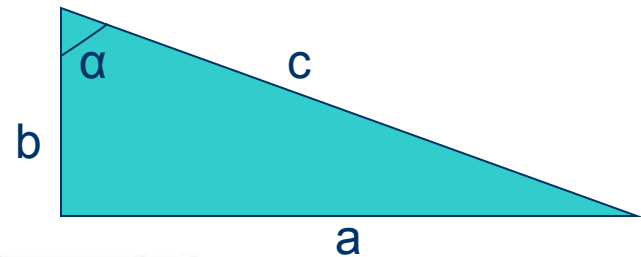
- **1. Решение тригонометрических задач.**
- Многие тригонометрические задачи не решаются привычными для них методами или решаются очень сложно, а использование какого-нибудь геометрического приема дает короткое решение. *«Тригонометрические функции — это испытанный аппарат геометрии и их тоже нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически и возникли — из решения треугольников»?*

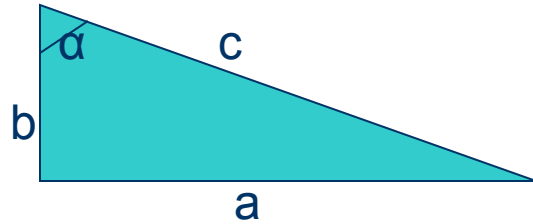
Пример 1: выразить $\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}$ через все остальные аркфункции

- РЕШЕНИЕ: Так как $0 < \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} < \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}$ можно рассматривать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, в котором противолежащий ему катет $a=7$, гипотенуза $c=\sqrt{50}$

По теореме Пифагора другой катет

равен: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{50 - 49} = 1.$





- Угол α можно рассматривать как арккосинус или арктангенс, или арккотангенс соответствующих чисел (рис. 4).

$$\text{Тогда } \alpha = \arccos \frac{b}{c} = \arccos \frac{1}{\sqrt{50}}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \operatorname{arctg} 7 \text{ и}$$

$$\alpha = \operatorname{arccctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arccctg} \frac{1}{7}.$$

Пример 2. Вычислить $\arctg 2 + \arctg 3 + \arctg 1$

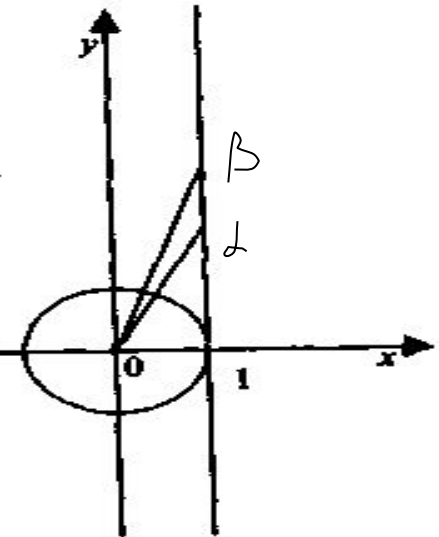


Рис. 6

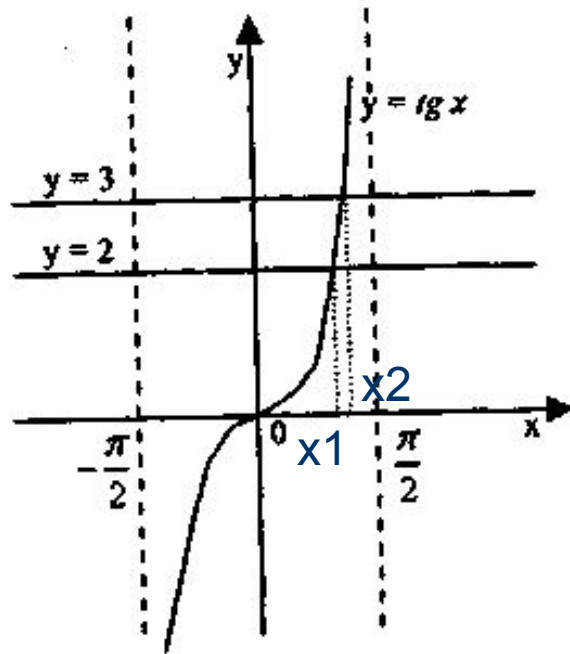


Рис. 5

- **Определение:** $\arctg a$ (арктангенс a) — это такое число из интервала тангенс которого равен a .
- **Решение:** На основании этого определения $\arctg 1 = \pi/4$. Что же такое $\arctg 2$?
- Это число из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$ тангенс которого равен 2. Аналогично и $\arctg 3$.
- Воспользуемся графической интерпретацией (рис.5). Из рисунка видно, что $\arctg 2 = x_1$, $\arctg 3 = x_2$.
- Ясно, что числа x_1 и x_2 иррациональные и указать их значения можно только приближенно. По рис. 6 видно, что $\arctg 2 = \alpha$, а $\arctg 3 = \beta$. Однозначно определить ответ невозможно.

Использование геометрического подхода делает данную задачу практически устной.

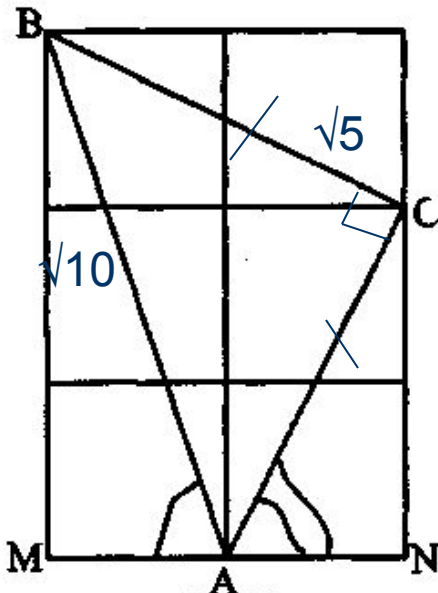


Рис. 7

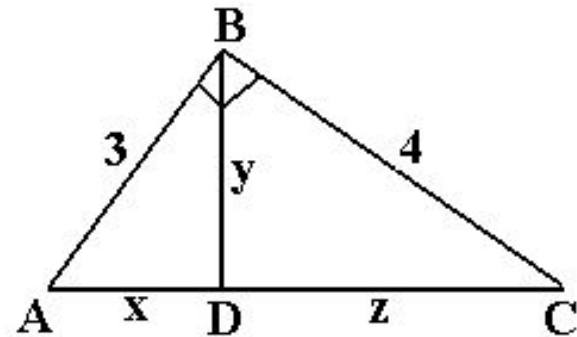
- Выполним следующие построения: $\arctg 3 = \angle BAM$, $\arctg 2 = \angle CAN$ (рис. 7). Тогда $\arctg 1 = \angle BAC$, где $\angle BAC$ - острый угол прямоугольного равнобедренного $\triangle ABC$ ($BC = AC = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10}$)
- Таким образом, $\arctg 2 + \arctg 3 + \arctg 1 = \angle BAM + \angle BAC + \angle CAN = \angle MAN = 180^\circ = \pi$.

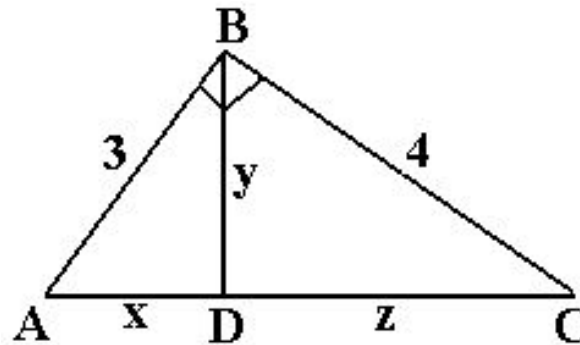
Ответ: π

2. Решение систем уравнений

- Решить систему уравнений:
- Решение: По теореме обратной теореме Пифагора, из уравнения $x^2+y^2=3^2$, числа x и y являются катетами $\triangle ABD$ ($\angle D$ – прямой) с гипотенузой $AB = 3$. Рассматривая второе уравнение $y^2+z^2=4^2$, построим $\triangle BDC$, где y и z – катеты, а $BC = 4$ – гипотенуза. Третье уравнение $y^2 = xz$ подсказывает, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z .

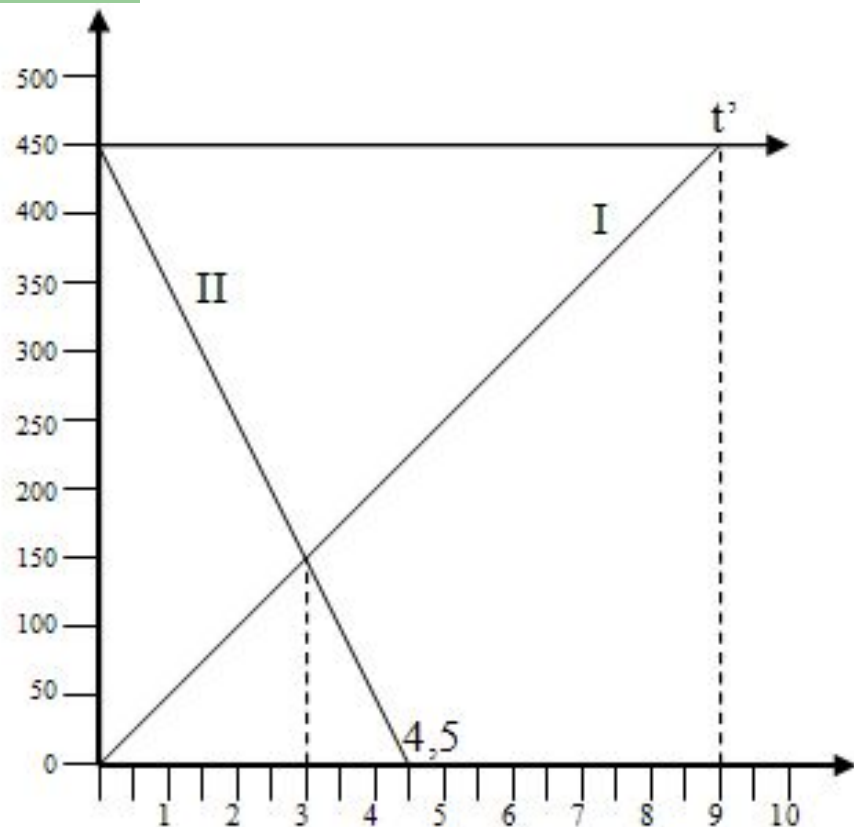
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{array} \right.$$





- По теореме обратной теореме о пропорциональных отрезках $\angle ABC = 90^\circ$
 $AC = (x + z) = \sqrt{9 + 16} = 5$, тогда
- $AB^2 = AD \cdot AC$, $9 = x \cdot 5$, $x = 9/5$
- $BC^2 = DC \cdot AC$, $16 = z \cdot 5$, $z = 16/5$
- $BD^2 = y^2 = x \cdot z = 9/5 \cdot 16/5$ и $BD = 12/5 = y$.
- Однако, такой прием дает потерю корней, легко убедиться, что $x = \pm 9/5$; $y = \pm 12/5$; $z = \pm 16/5$.

3. Решение текстовых задач на движение



Задачи на движение и на совместную работу можно решать графически. Решение задачи основывается на точных геометрических соотношениях.

Решить задачу: Расстояние между двумя городами равно 450 км. Два автомобиля выходят одновременно навстречу друг другу. Один автомобиль мог бы пройти все расстояние за 9 часов, другой – вдвое быстрее. Через сколько часов они встретятся?

- Читаем с чертежа ответ: 3 часа.

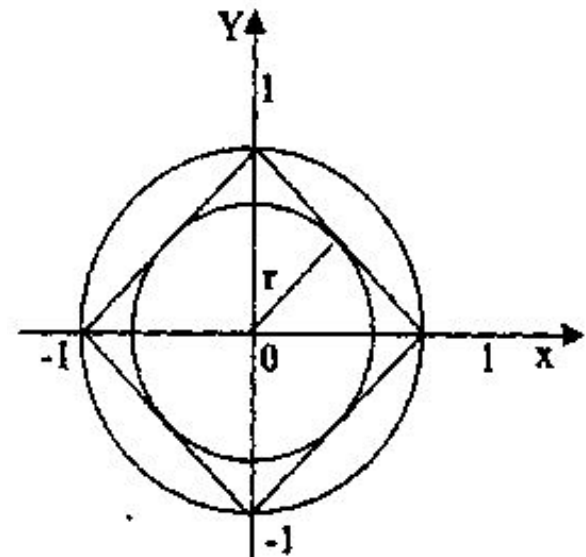
4. Решение конкурсных задач и задач ЕГЭ

- Геометрическим методом хорошо решаются уравнения и неравенства с параметрами, а также их системы
- **Пример1:** При каком a система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} |x|+|y| = 1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

- **Решение:** Построим линии, определяемые уравнениями системы.
 $r=\sqrt{2}/2$. Четыре решения могут быть только в двух случаях, когда $a=R^2=1$, или $a=r^2=1/2$.

Ответ: 1; 1/2.



Пример 2.

- При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=z; \\ x+y+z=a \end{cases}$ имеет единственное решение?
- Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $x^2+y^2+x+y=a$, полученное из системы
- $\begin{cases} x^2+y^2= z \\ x+y+z=a \end{cases}$

- Преобразуем полученное уравнение:
- $x^2+y^2+x+y=(x^2+x+0,25)+(y^2+y+0,25)-0,25-0,25=a$
- $(x+0,5)^2+(y+0,5)^2=0,5+a$ (*)
- Итак, уравнение(*) задает на плоскости окружность с центром $(-0,5;0,5)$ и радиусом $R=\sqrt{0,5+a}$.
- 1) Если $0,5+a < 0$, т.е. при $a < -0,5$, множество точек, задаваемых на плоскости уравнением(*), пусто, а следовательно, исходная система решений не имеет

- 2) Если $0,5+a=0$, т.е. при $a=-0,5$, уравнение (*) имеет единственное решение, т.к. и окружность вырождается в точку $(-0,5;0,5)$;
- 3) Если $0,5+a>0$, т.е. при $a>-0,5$, множество точек, задаваемых на плоскости уравнением (*), является окружностью с центром $(-0,5;0,5)$ и $R\sqrt{0,5+a}$. В этом случае уравнение (*), а следовательно, и исходная система, имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a = -0,5$.

Пример 3: Вычислить (без калькулятора и таблиц) $\sin 18^\circ$.

- Приведём геометрический способ решения (рис 14).
- Рассмотрим сектор OAB окружности с центром в точке O и радиуса 1 ,
- Проведём хорду AB , на отрезке OB построим точку C т чтобы $AC = AB$, при этом $\angle ACB = \angle ABC = 72^\circ$, а $\angle CAB = 36^\circ$.

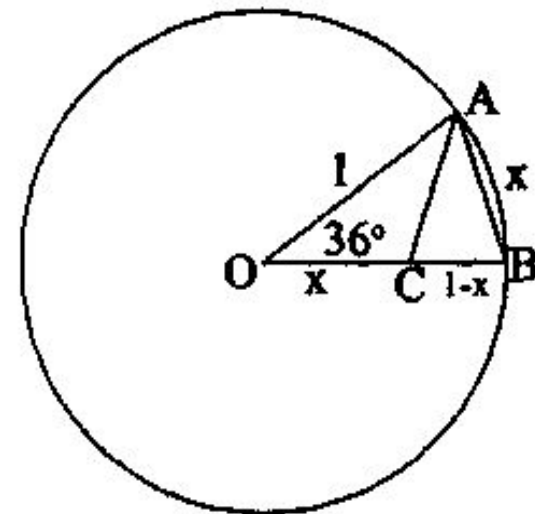


Рис. 14

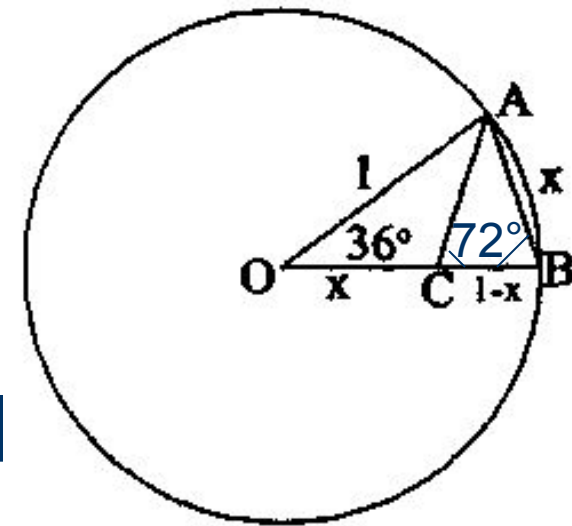
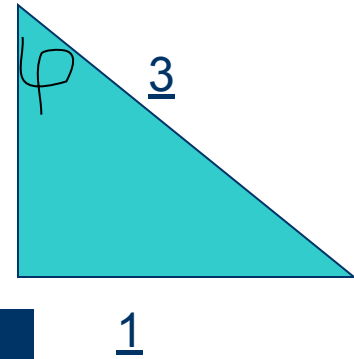


Рис. 14

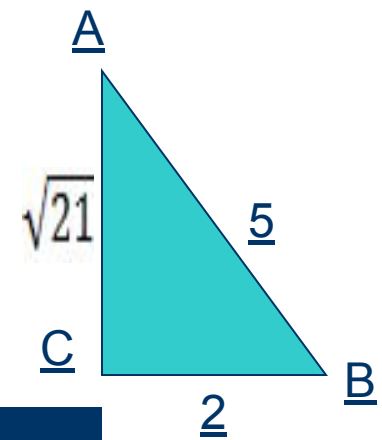
- Таким образом $OC = AC$.
- Пусть $AB = x$, $CB = 1-x$.
- Поскольку AC – биссектриса треугольника OAB, справедлива пропорция отсюда $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$
- $x^2 + x - 1 = 0$, ($x > 0$), $x = (\sqrt{5} - 1)/2$
- По теореме косинусов: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$, $x^2 = 1 + 1 - 2\cos 36^\circ$,
 $x = \sqrt{2(1 - \cos 36^\circ)} = \sqrt{2(1 - \cos^2 18^\circ + \sin^2 18^\circ)} = 2\sin 18^\circ$
- Тогда $\sin 18^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4$
- Ответ: $(\sqrt{5} - 1)/4$

Пример 4: Решить уравнение $\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x = 2$



- **Решение:** Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $BC = 1$ и $AC = 2\sqrt{2}$. Тогда $AB = \sqrt{1 + 8} = 3$. Пусть $\angle A = \varphi$, где φ – острый угол.
- Тогда $\cos \varphi = 2\sqrt{2}/3$ и $\sin \varphi = 1/3$.
- Имеем $\sin 3x + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3x = \frac{2}{3}$, $\cos 3x \cos \varphi + \frac{2}{3} \sin 3x \sin \varphi = \frac{2}{3}$ $\cos(3x - \varphi) = \frac{2}{3}$
- Решая уравнение получим:
 $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n / 3, n \in \mathbb{Z}$
- *Ответ:* $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n / 3, n \in \mathbb{Z}$

Пример 5: Найдите значение выражения $\sqrt{21} \operatorname{tg}(\arcsin \frac{2}{5})$.



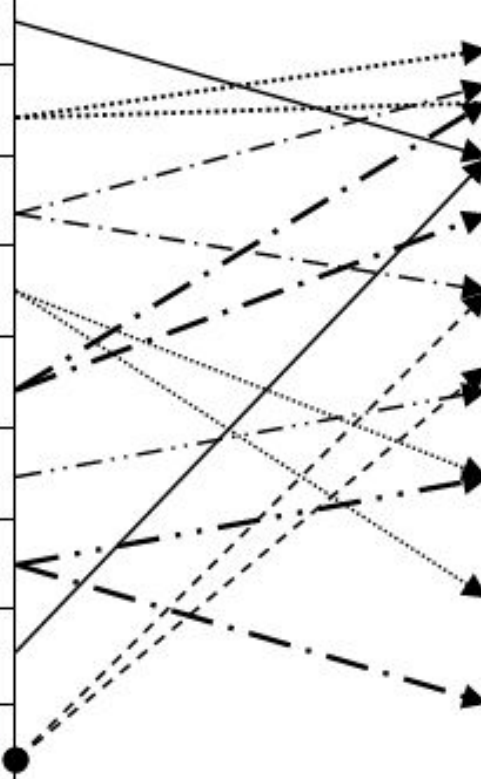
- **Решение:** По определению арксинуса имеем:
- $\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. Построим прямоугольный
- треугольник ABC с углом A, который равен $\arcsin \frac{2}{5}$. При этом, по теореме Пифагора, прилежащий катет будет равен $\sqrt{21}$. Поэтому $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{2}{5}) = \frac{CB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ и $\sqrt{21} \operatorname{tg}(\arcsin \frac{2}{5}) = \sqrt{21} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = 2$.
- Ответ: 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Геометрический метод характеризуют как метод, идущий от наглядных представлений. Существенными признаками этого понятия являются геометрические (наглядные) представления и законы геометрии, в которых отражены свойства геометрических фигур.
- Мы попытались сопоставить задачи и способы их решения, вот какая картина у нас получилась:

Типы алгебраических задач
Уравнения и неравенства с модулем
Системы неравенств с двумя неизвестными
Квадратные уравнения и неравенства
Системы нелинейных уравнений
Иррациональные уравнения и неравенства
Показательные уравнения
Тригонометрические уравнения
Уравнения с параметром
Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Геометрические факты
координатный метод
геометрический смысл модуля
теорема косинусов
тригонометрическая подстановка
скалярное произведение векторов
Свойства прямоугольного треугольника
Синус, косинус и тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике



Мы предлагаем свой алгоритм решения алгебраических задач геометрическим способом:

- Построение геометрической модели задачи, т.е. перевод её на язык геометрии;
- Решение получившейся геометрической задачи;
- Перевод полученного ответа с геометрического языка на естественный.

Преимущества решения задач геометрическим способом:

- При решении задачи этим методом четко определяется начало действия;
- Графическая иллюстрация облегчает проведение анализа, составления уравнений, помогает найти несколько способов решения;
- Расширяется область использования графиков, повышается графическая культура учеников;
- Совершенствуется техника решения уравнений (разделений переменных);
- Реализуются внутрипредметные (алгебра и геометрия) и межпредметные (математика и физика) связи.

Выводы

- Мы рассмотрели различные задачи, подобрали для них геометрические способы решения, сравнили алгебраический и геометрический методы решения.
- Удобнее и нагляднее всего решать геометрическим методом тригонометрические задачи. Этот метод можно использовать в качестве проверки при решении задач.
- Рассмотренные геометрические методы подходят для решения конкурсных нестандартных и олимпиадных задач. Позволяют существенно упростить их решение, сделать его более понятным и наглядным.
- Применение геометрических методов позволяет развивать пространственное воображение, которое является основным для освоения материала в старших классах. Позволяет сократить время решения задач (применимо к тестам).

Литература:

- Куликова Л. В. , Литвинова С. А., За страницами учебника математики, М. - Глобус, 2008.
- Киселева Ю. С., Методическое пособие по теме: Использование геометрических методов при решении алгебраических задач.
- В.А. Филимонов, Геометрия помогает решить задачу – Математика в школе № 2-3, 1992
- Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др., Алгебра и начало анализа: Учеб. Для 10-11 кл. образоват. учреждений ,– 10-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2002. – 384с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!