ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

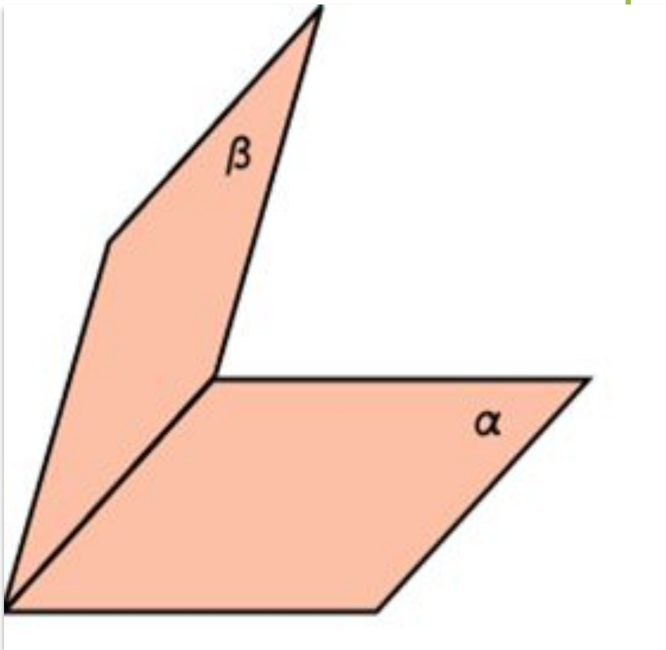
Григорук Е. О.

Основные задачи урока:

- Ввести понятие двугранного угла и его линейного угла
- Рассмотреть задачи на применение этих понятий

Определение:

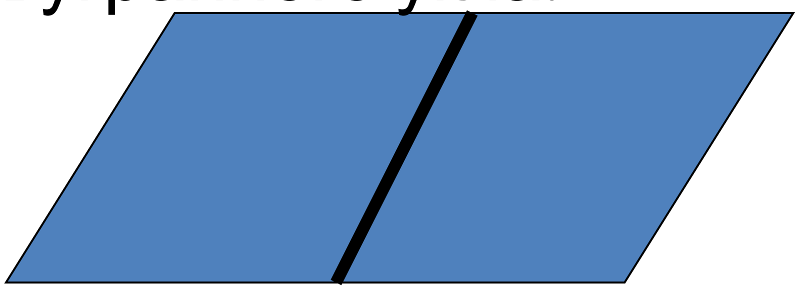
Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

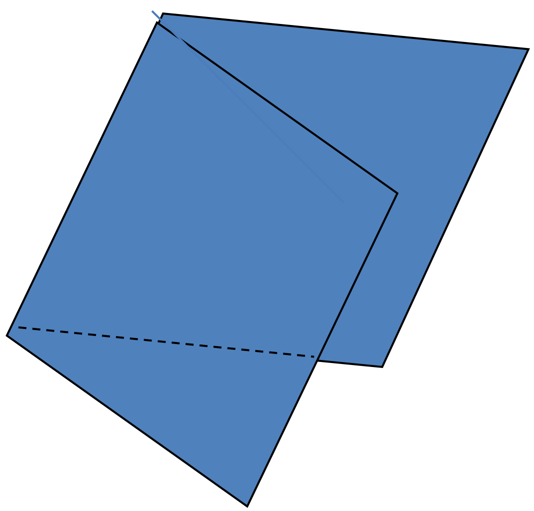


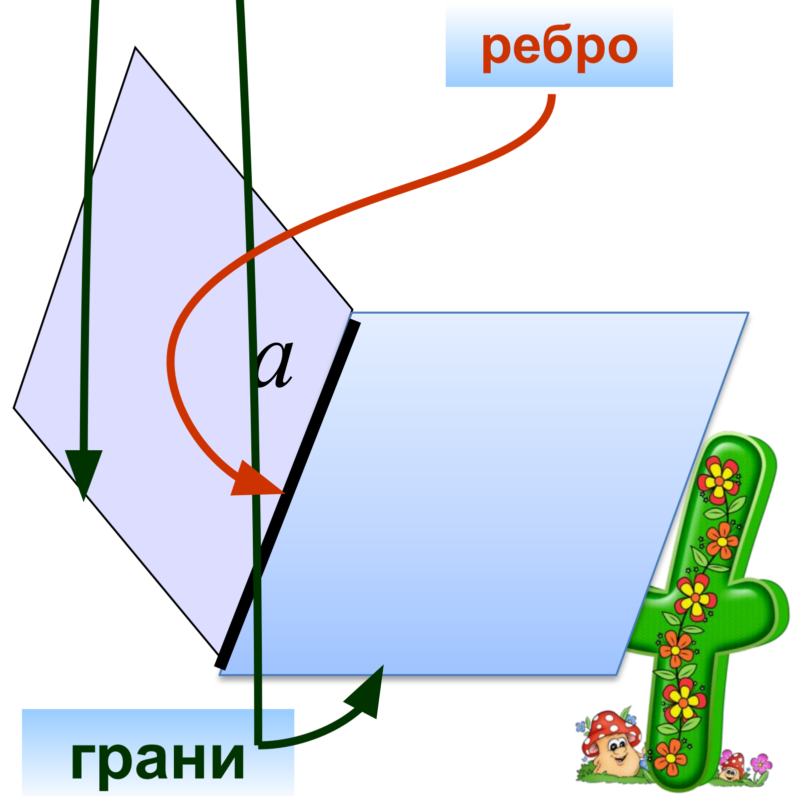
Определение двугранного угла

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями**.

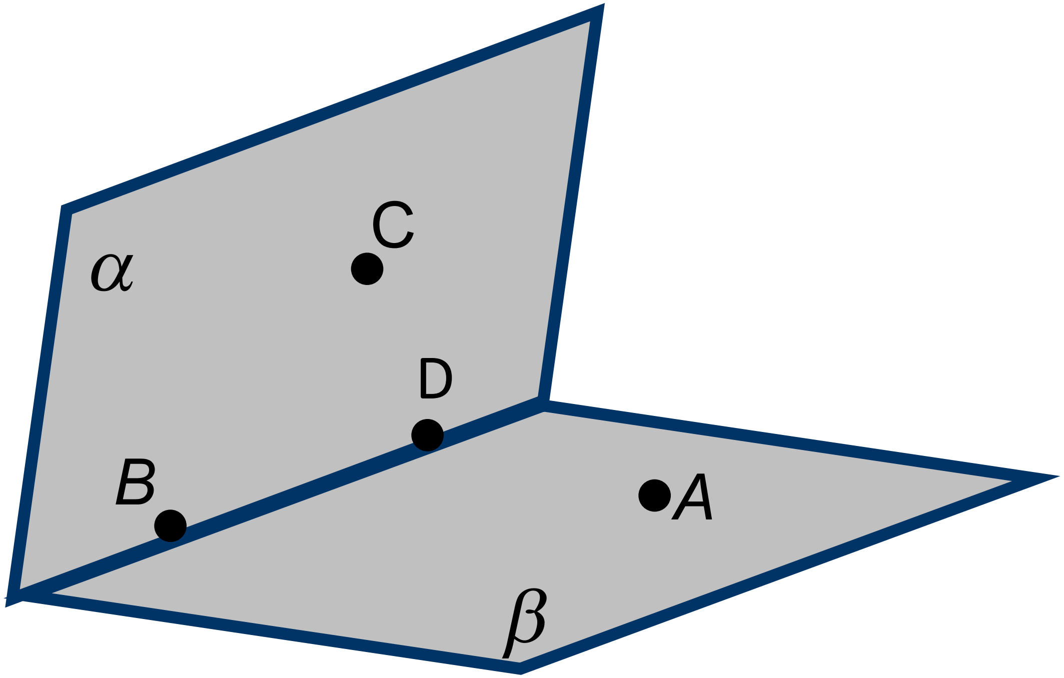
Общая граница этих полуплоскостей – **ребром** двугранного угла.







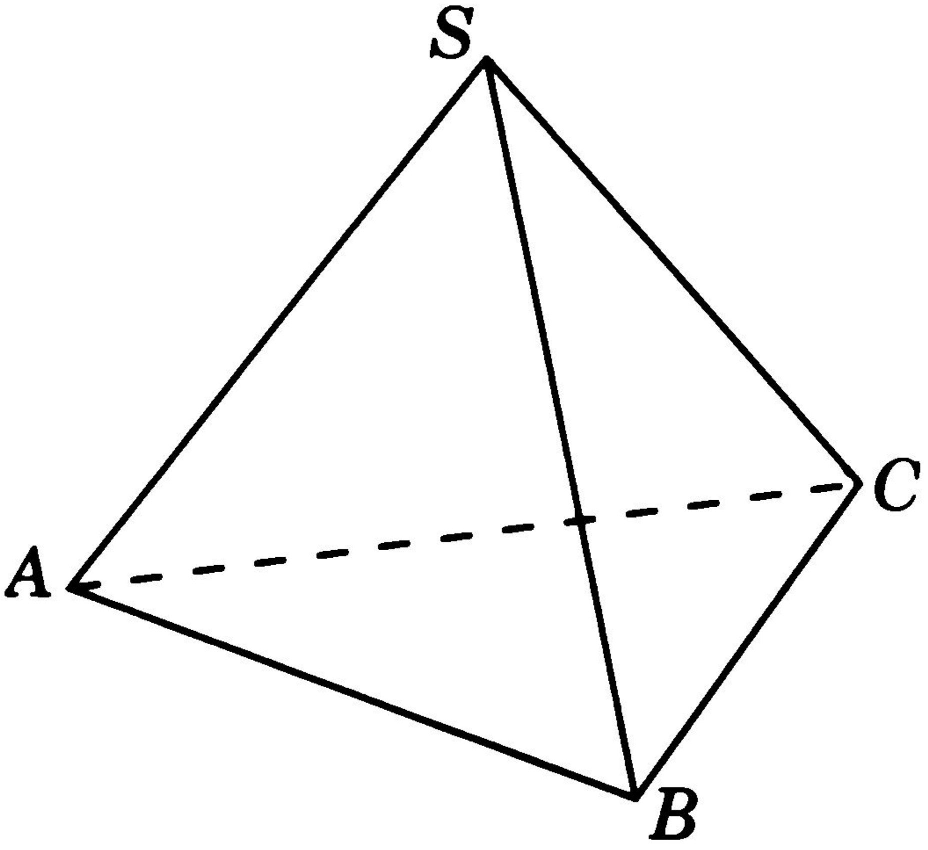
Обозначение двугранного угла.



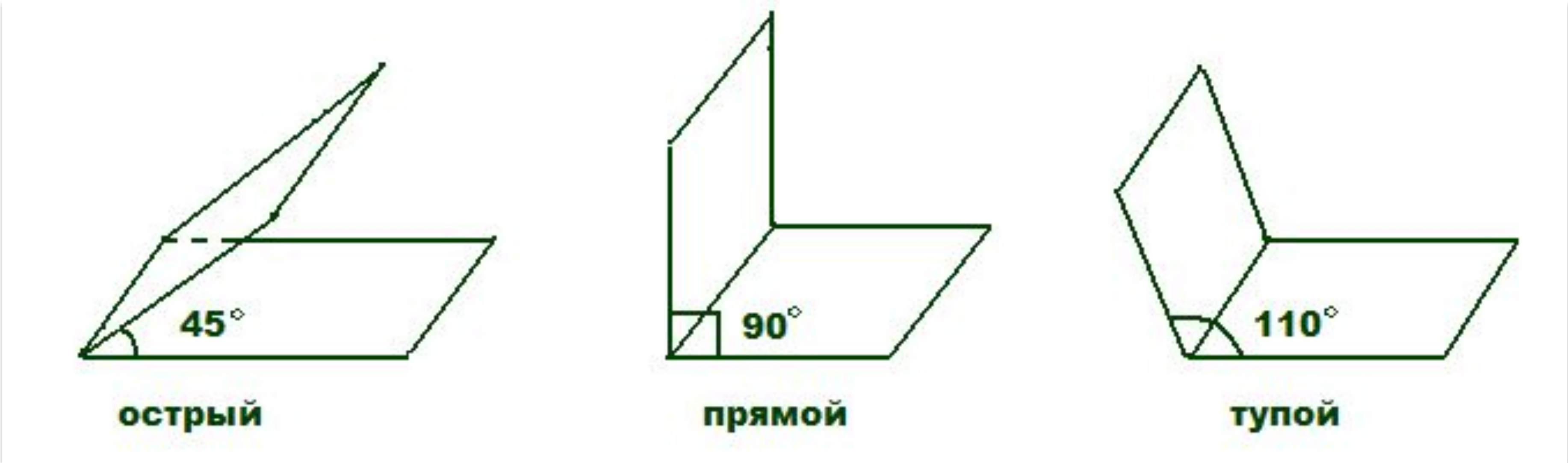
Угол CBDA

В обыденной жизни, форму двугранного угла имеют

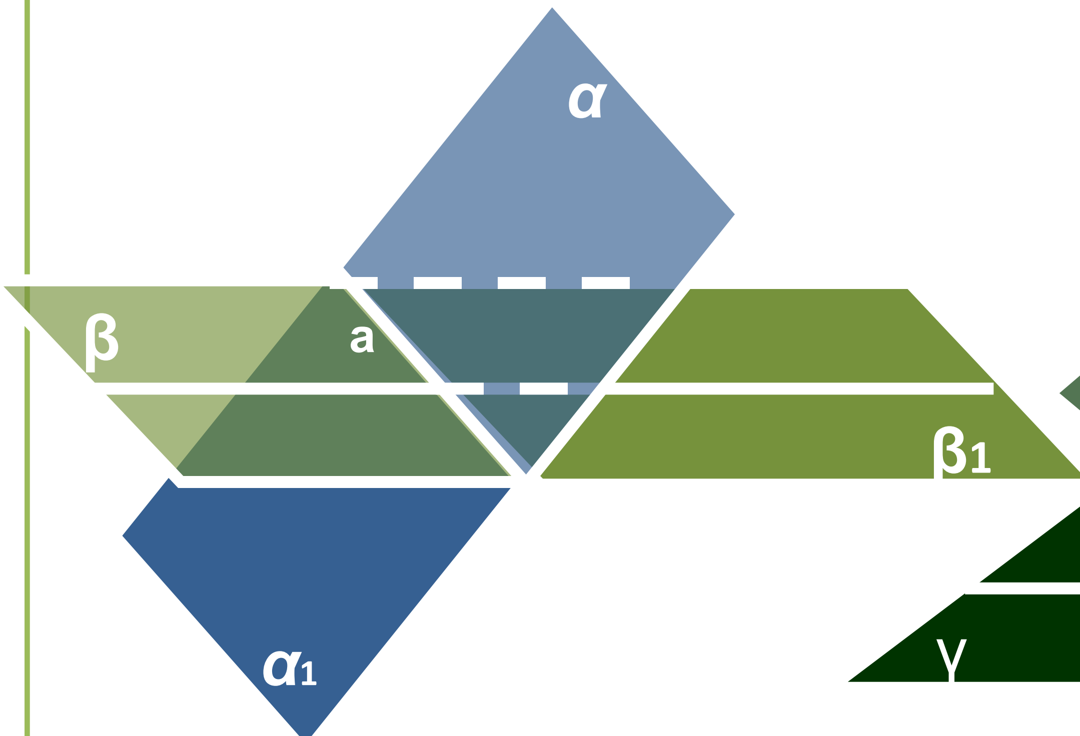
- Укажите все двугранные углы

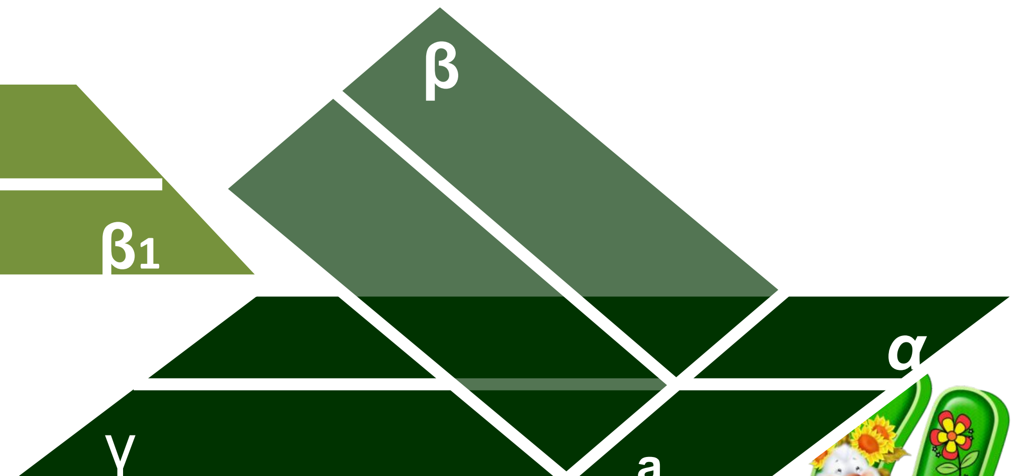


Примеры двугранных углов:



Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.



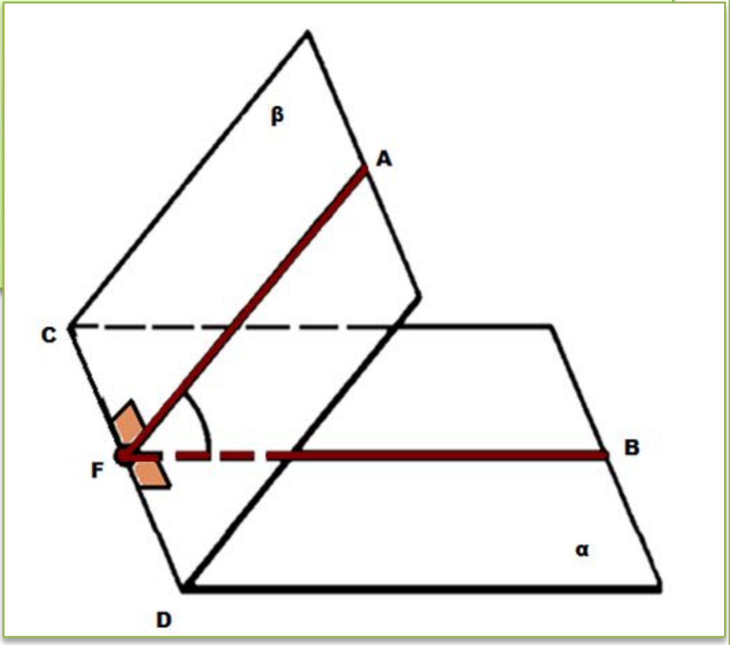


Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

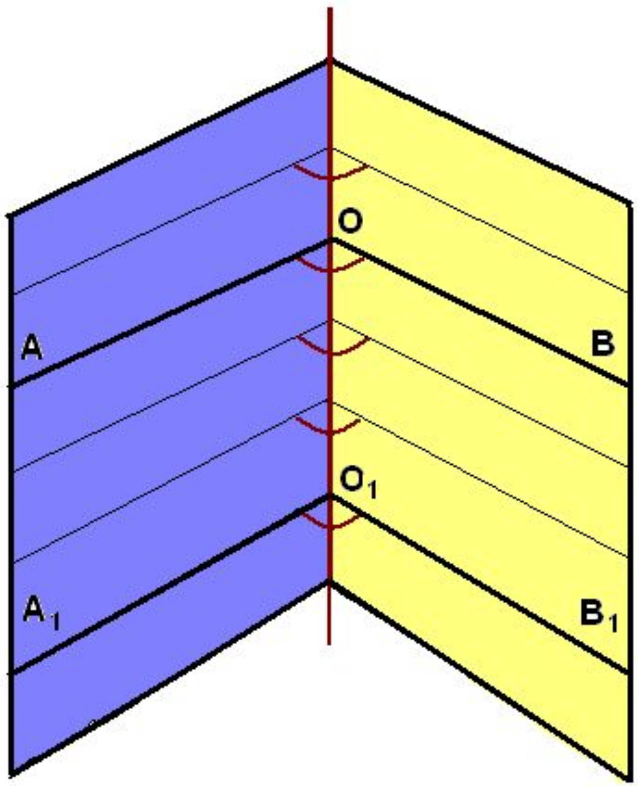
AF ⊥ CD

BF ⊥ CD

AFB-линейный угол двугранного угла **ACDB**



все линейные углы двугранного угла равны друг другу.



Рассмотрим два линейных угла AOB и A_1OB_1. Лучи OA и OA_1 лежат в одной грани и перпендикулярны OO_1, поэтому они сонаправлены. Лучи OB и OB_1 также сонаправлены.

Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ (как углы с сонаправленными сторонами).

Способ нахождения (построения) линейного угла.

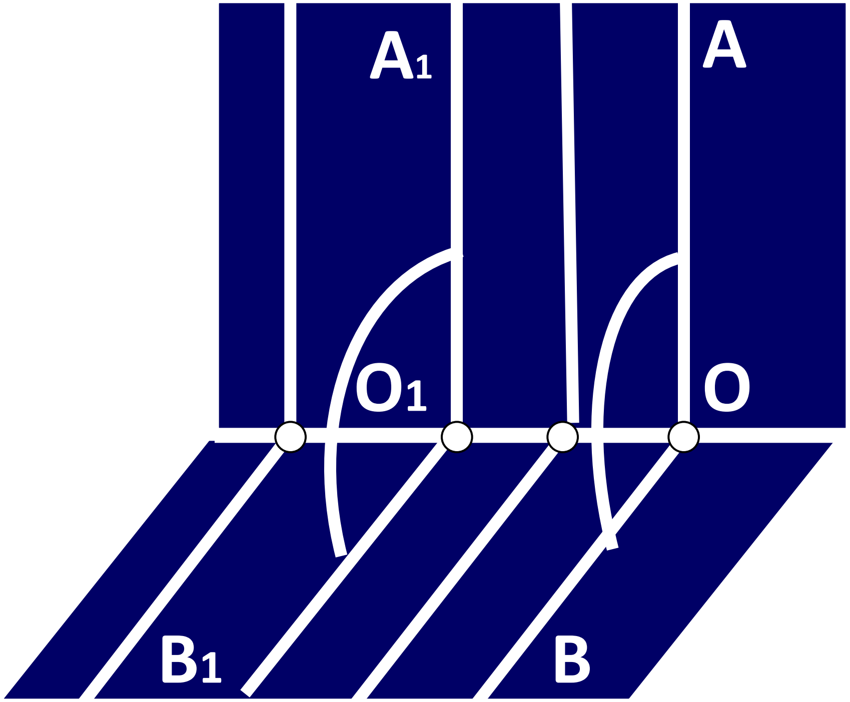
1. Найти (увидеть) ребро и грани двугранного угла

*2. **В гранях** найти направления (прямые) перпендикулярные ребру*

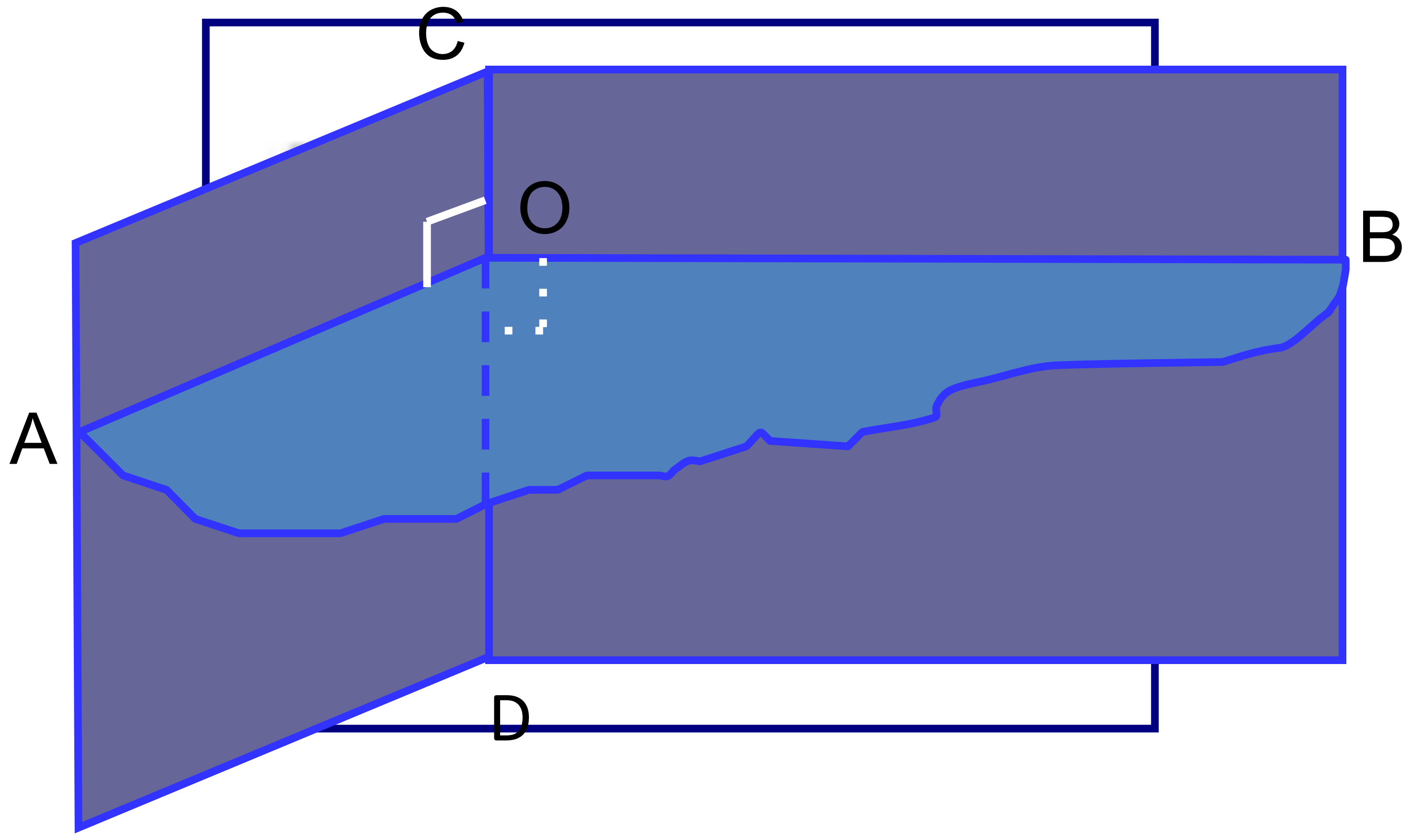
3. (при необходимости) заменить выбранные направления параллельными им лучами с общим началом на ребре двугранного угла

При изображении сохраняется параллельность и отношение длин параллельных отрезков

Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

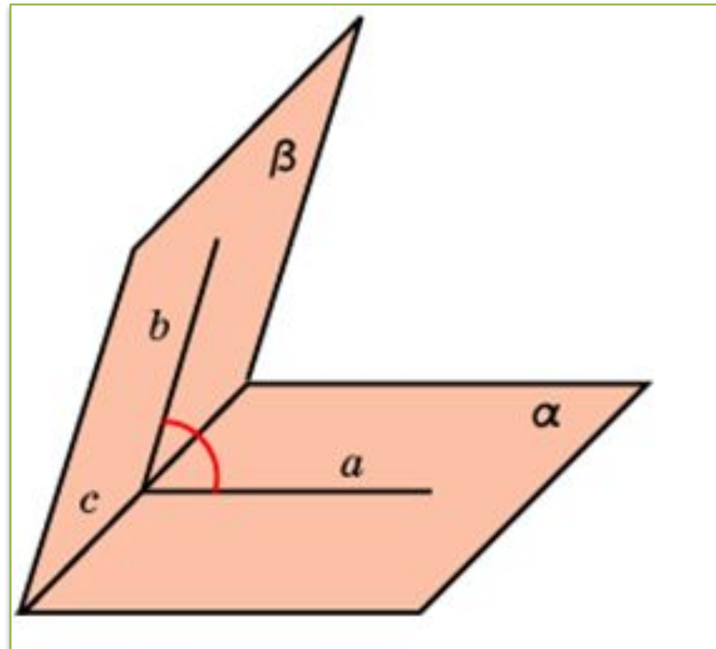


Линейным углом двугранного угла называется сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру.



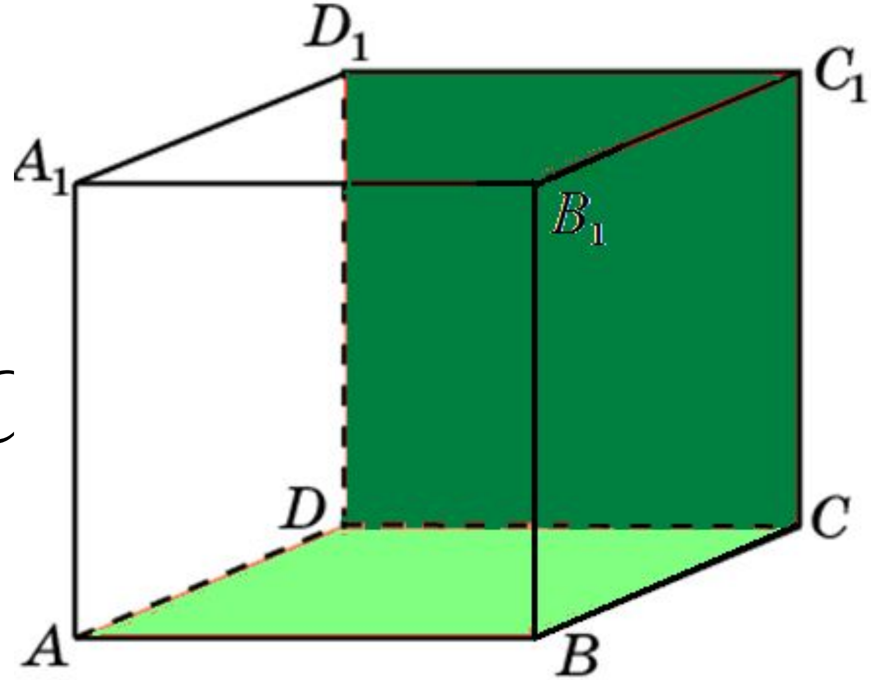
Угол между плоскостями

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.



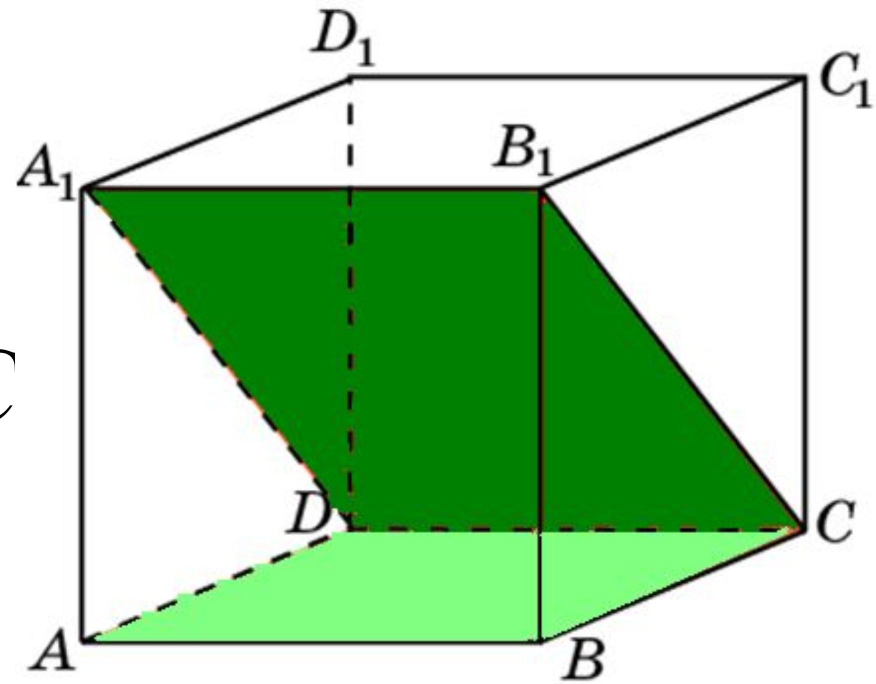
Задача 1:

В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.



Задача 2:

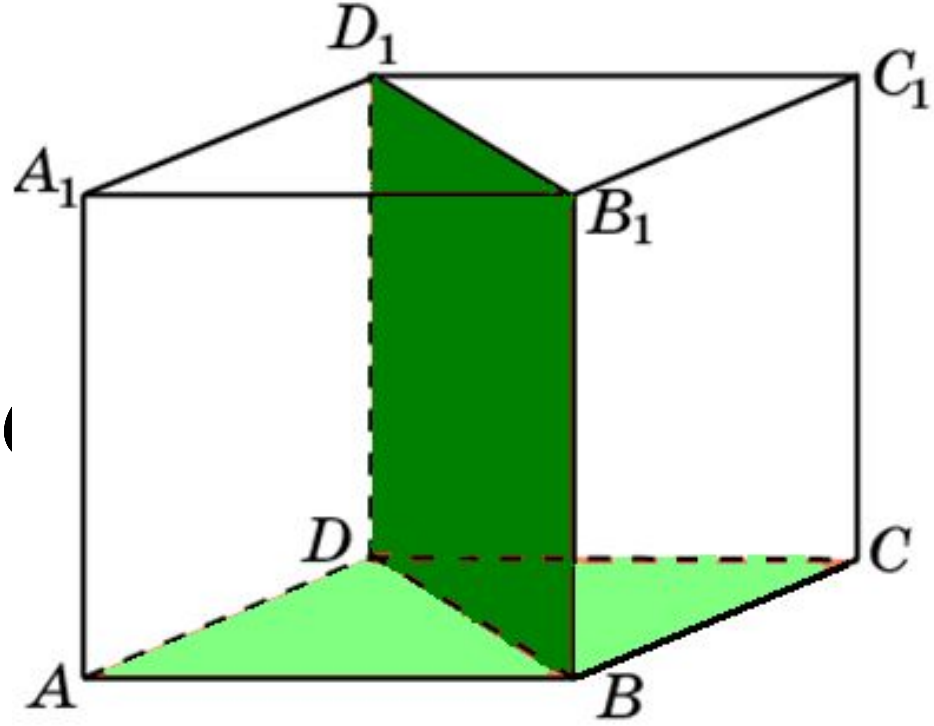
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.



Ответ

Задача 3:

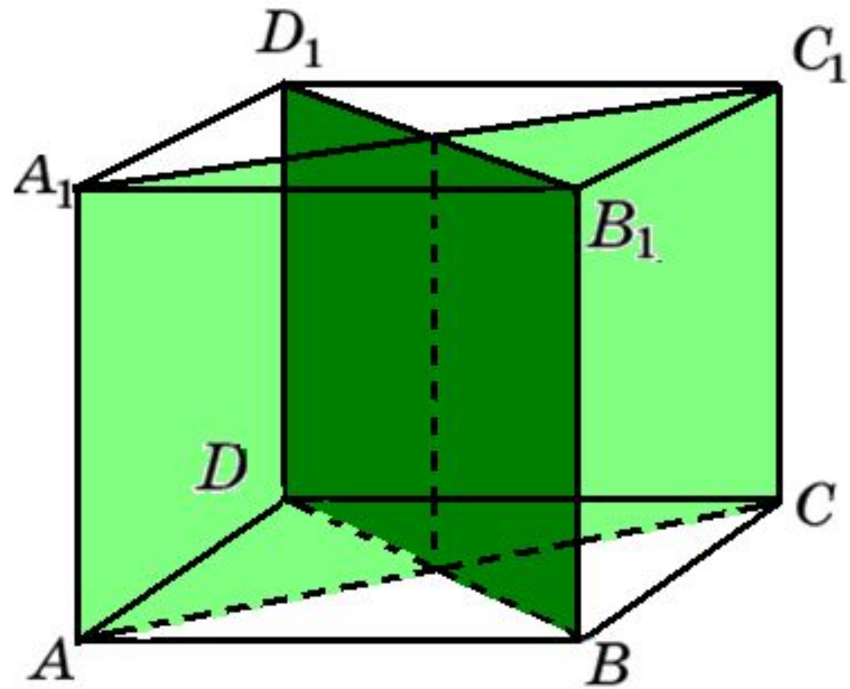
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями AB и BDD_1.



Ответ

Задача 4:

В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BDD_1.



Ответ

ЗАДАЧА № 1

Дано:

КМРТ-тетраэдр

Δ ТМК правильный

РТ ⊥ МКТ

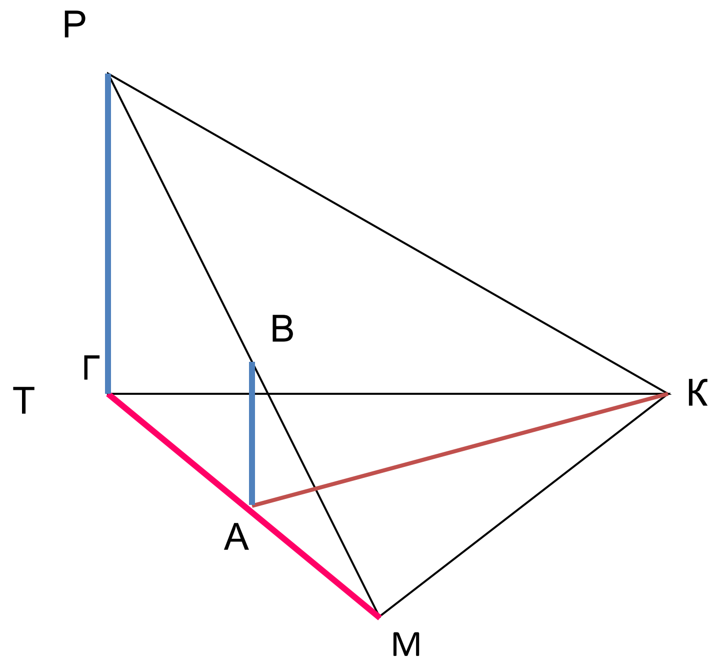
Указать:

Линейные углы для двугранных углов :

РТМК

РМКТ

РКТМ



Ребро ТМ , грани МРТ и МТК

В грани МРТ : РТ ⊥ ТМ (по определению а ⊥ α)

В грани МТК : КА ⊥ ТМ, где А−середина ТМ (по свойству р/с Δ)

ВА | | РТ, РТ ⊥ ТМ ВА ⊥ МТ (по лемме о связи | | и ⊥)

Ответ:

∠ВАК−искомый

ЗАДАЧА № 2

Дано:

КМРТ-тетраэдр

Δ ТМК правильный

РТ ⊥ МКТ

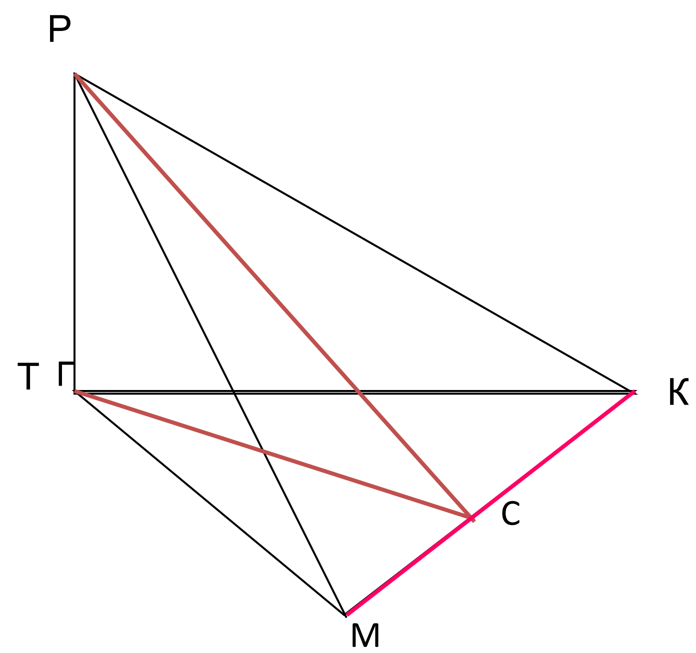
Указать:

Линейные углы для двугранных углов :

РТМК

РМКТ

РКТМ



Ребро МК , грани КМР и КМТ

В грани КМР : РС ⊥ КМ, где С - середина КМ (по свойству р/с Δ)

В грани КТМ : ТС ⊥ КМ, где С - середина КМ (по свойству р/с Δ)

Ответ: ∠РСТ- искомый

ЗАДАЧА № 3

Дано:

КМРТ-тетраэдр

Δ ТМК правильный

РТ ⊥ МКТ

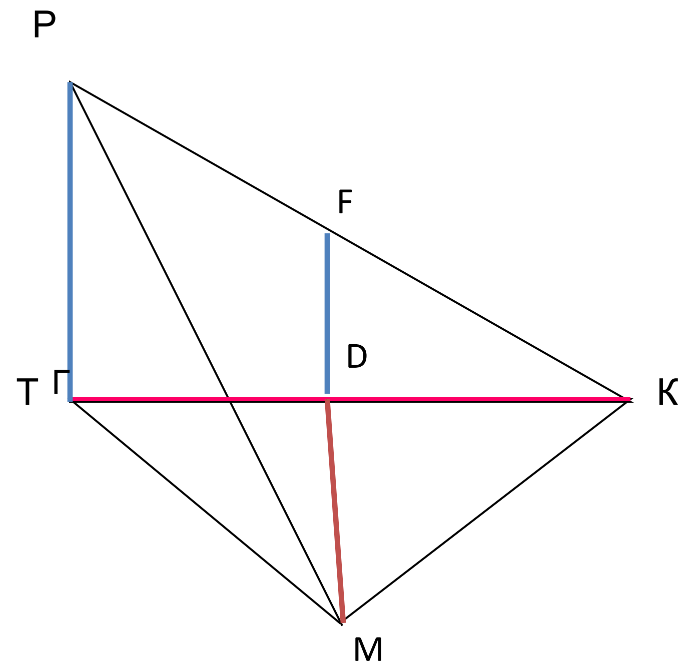
Указать:

Линейные углы для двугранных углов :

РТМК

РМКТ

РКТМ



Ребро КТ , грани КТР и КМТ

В грани КТР : РТ ⊥ КТ (по определению a ⊥ α)

В грани КТМ : МD ⊥ КТ, где D−середина КТ (по свойству р/с Δ)

FD || РТ, РТ ⊥ КТ ⇒ FD ⊥ КТ (по лемме о связи || и ⊥)

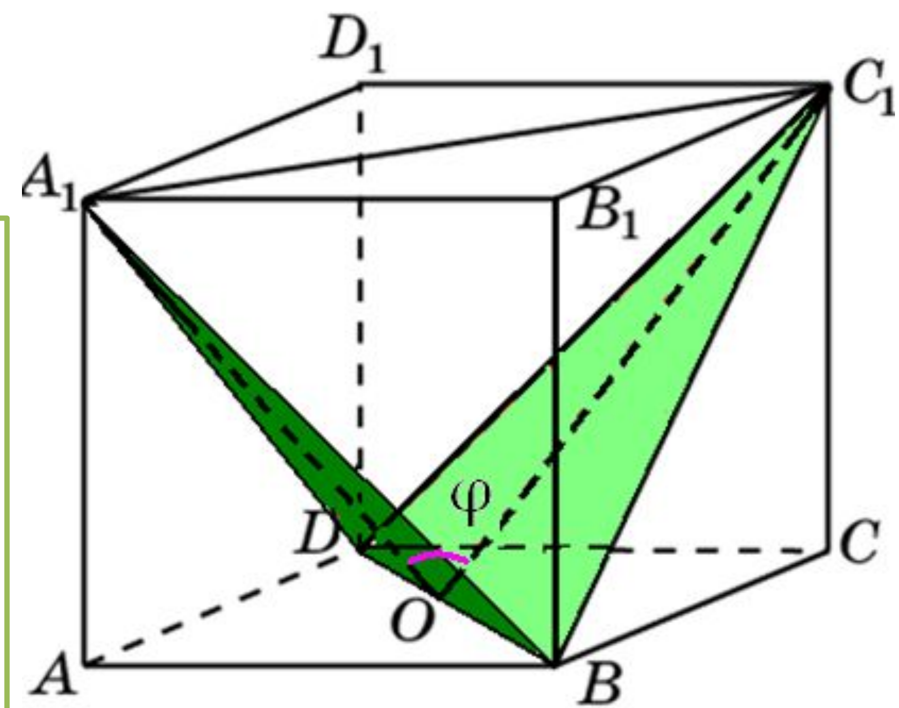
Ответ:

∠ FDM−искомый

Задача 5:

В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями

BC_1D и BA_1D.



Решение:

Пусть O – середина BD. A_1OC_1 – линейный угол двугранного угла A_1BDC_1.

$A_1C_1 = \sqrt{2}$, $A_1O = C_1O = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

По теореме косинусов получаем:

$$\cos\varphi = \frac{1}{6}.$$

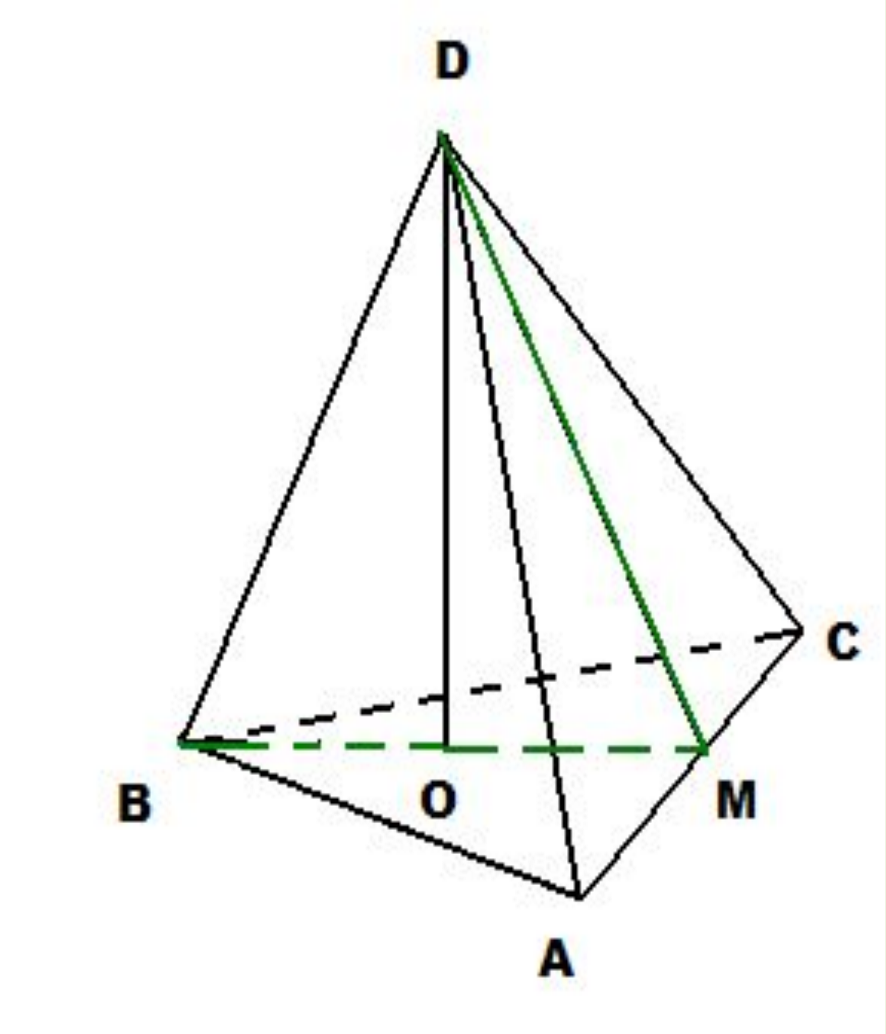
Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{1}{6}$.

Задача 6:

В тетраэдре DABC все ребра равны, точка M – середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла BACD.

Решение:

Треугольники ABC и ADC правильные, поэтому, $BM \perp AC$ и $DM \perp AC$ и, следовательно, $\angle DMB$ является линейным углом двугранного угла DACB.



Задача 7:

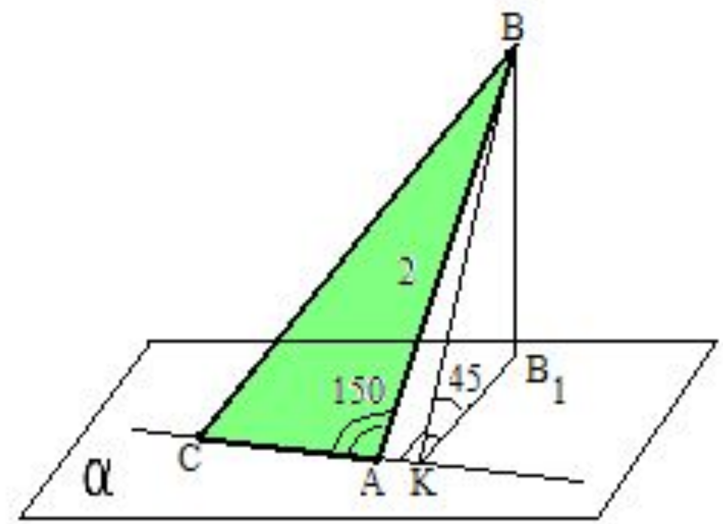
Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояние от точки B до прямой AC и до плоскости α, если AB=2, $\angle BAC = 150^0$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45^0.

Решение:

1) ABC – тупоугольный треугольник с тупым углом A, поэтому основание высоты BK лежит на продолжении стороны AC.

BK – расстояние от точки B до AC.

BB_1 – расстояние от точки B до плоскости α



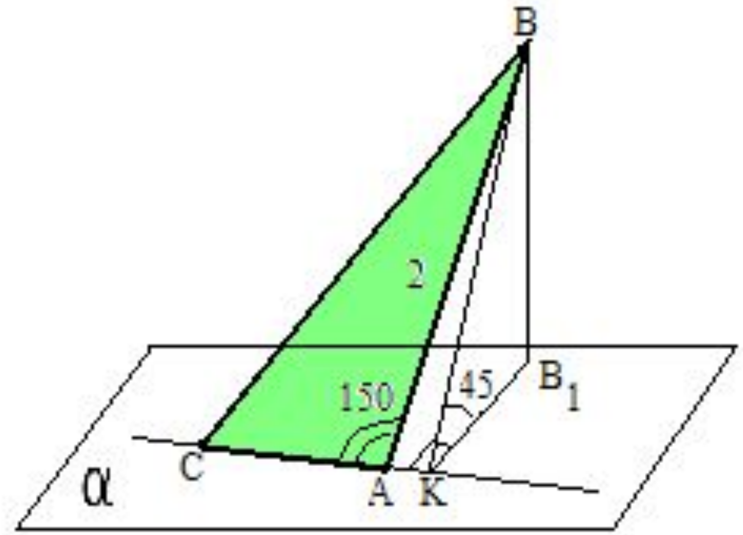
2) Так как $AC \perp BK$, то $AC \perp KB_1$ (по теореме , обратной теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $\angle BKB_1$ – линейный угол двугранного угла $BACB_1$ и $\angle BKB_1=45^0$.

3) <u>ΔBAK</u>:

$\angle A=30^0$, $BK=BA\cdot\sin30^0$, $BK=1$.

<u>ΔBKB_1</u>:

$BB_1=BK\cdot\sin45^0$, $BB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Ответ: $BK=1$, $BB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$