

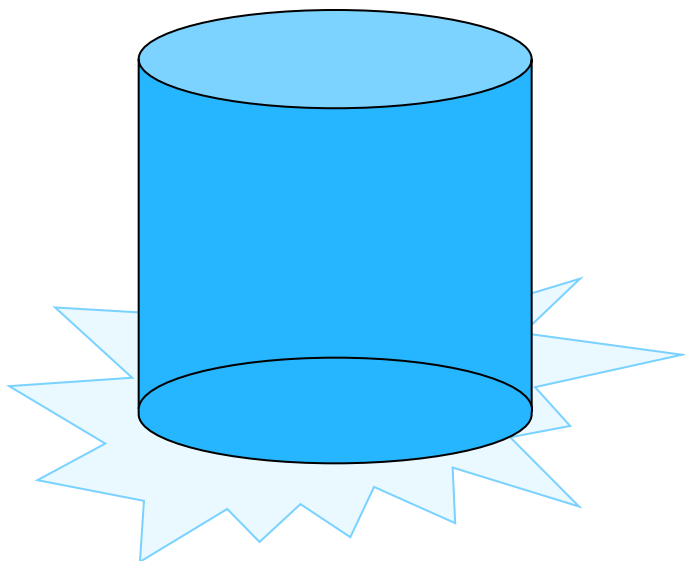
*муниципальное автономное общеобразовательное*

*учреждение*

*средняя общеобразовательная школа № 45*

**Методическое пособие для учащихся 11  
классов**

# «Цилиндр в прикладных задачах»

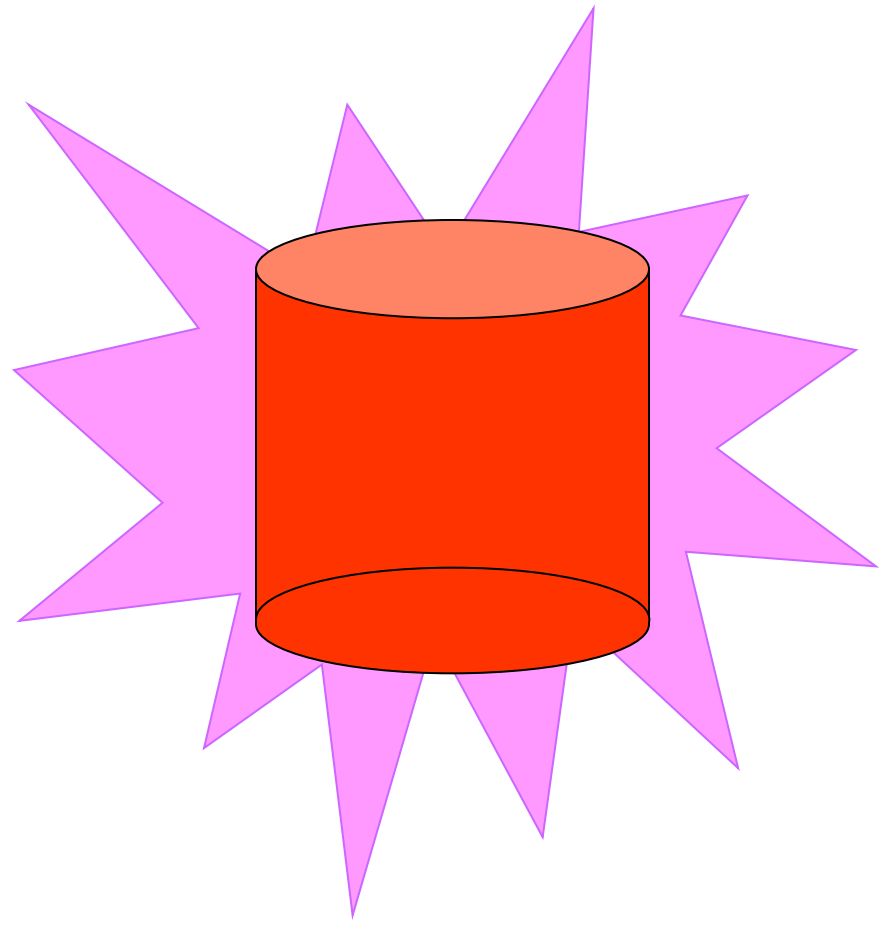


*Составил  
учитель математики  
высшей категории  
Гавинская Елена  
Вячеславовна.*

г.Калининград  
2016-2017 учебный год

В древности при строительстве грандиозных храмов и дворцов людям приходилось таскать и носить на себе огромные валуны и колонны. Тогда и было замечено, что катать предметы намного легче и удобнее. Примерно так и появились и популяризовались цилиндры. И по сей день эти тела вращения часто встречаются в нашей жизни. В архитектуре, в технике, в мире моды – цилиндры побывали везде.

# Прикладные задачи.



**№1.** При паровом отоплении низкого давления количество тепла, которое даёт  $1 \text{ м}^2$  поверхности нагрева, принимается равным **550** тепловым единицам в час. Сколько погонных метров труб диаметром в **34 мм** нужно установить в помещении, для отопления которого по расчетам требуется **4500** единиц тепла в час?



Решение:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ 1 \text{ м}^2 - 550^{\text{ед./ч}} \\ \quad \quad \quad \times \text{ м}^2 - 4500^{\text{ед./ч}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 4500 : 550 = 8,18 (\text{м}^2), \text{ т.е.} \\ S_{\text{полн.цил.трубы}} = 8,18 \text{ м}^2. \end{array}$$

$$2) \ d = 34 \text{ мм} = 3,4 \text{ см} = 0,034 \text{ м} \Rightarrow r = 0,017 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} 3) \ S_{\text{бок.}} &= 2\pi r l \\ 2 \cdot 3,14 \cdot 0,017 \cdot l &= 8,18 \\ 0,10676 \cdot l &= 8,18 \\ l &= 76,6 (\text{м}) \end{aligned}$$

Ответ: 76,6 м.

**№2.** Граната имеет форму цилиндра длиной 3,5 калибра (калибр – это внутренний диаметр дула пушки) и толщину стенок в  $\frac{1}{8}$  калибра. Найти (в  $\text{см}^3$ ) объём взрывного вещества, наполняющего внутреннюю пустоту гранаты полевой пушки калибра в 76 мм.

Решение:



1)  $76 \cdot 3,5 = 266(\text{мм})$  – длина гранаты.

2)  $76 \cdot \frac{1}{8} = 9,5(\text{мм})$  – толщина стенок гранаты.

3)  $76 - 9,5 - 9,5 = 57(\text{мм})$  – диаметр цилиндрического отверстия, которое наполняется взрывным веществом.

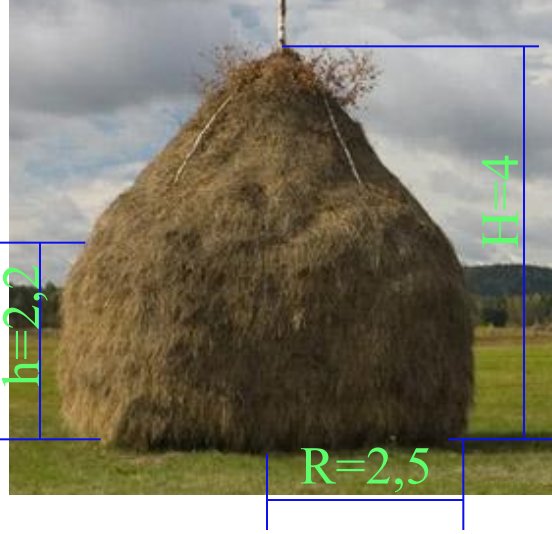
4)  $57 : 2 = 28,5(\text{мм})$  – радиус цилиндрического отверстия, которое заполняется взрывным веществом.

5)  $V = \pi r^2 h$

$$V = 3,14 \cdot 28,5^2 \cdot 266 = 678423,69(\text{мм}^3) \Rightarrow V \approx 678 \text{ см}^3$$

Ответ: 678  $\text{см}^3$ .

**№3. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания равен 2,5 м, высота 4 м, причём цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Удельный вес сена 0,03. Определить вес стога.**



Дано: цилиндр, конус,  $R_{\text{осн.}}=2,5\text{м}$ ,  $H=4\text{м}$ ,  $h=2,2\text{м}$ ,  
удельный вес сена  $c=0,03\text{кг/м}^3$ .

Найти: вес стога.

Решение:

1)  $4-2,2=1,8(\text{м})$  – высота конической части стога.

2)  $V_{\text{цил.}} = \pi r^2 h$

$$V_{\text{цил.}} = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 2,2 = 3,14 \cdot 6,25 \cdot 2,2 = 43,175(\text{м}^3)$$

3)  $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 1,8 = 11,775(\text{м}^3)$$

4)  $V = V_{\text{цил.}} + V_{\text{кон.}}$

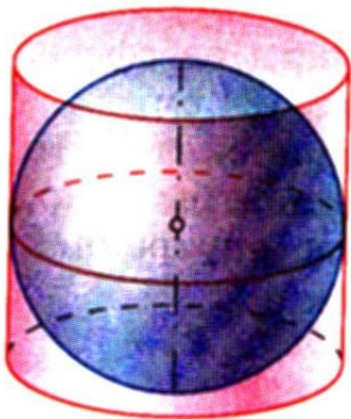
$$V = 43,175 + 11,775 = 54,95(\text{м}^3)$$

5)  $m = Vc$

$$m = 54,95 \cdot 0,03 = 1,6485\text{кг} \approx 1,6(\text{т})$$

Ответ: 1,6 т.

**№4.** Из деревянного цилиндра, в котором высота равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Определить, сколько процентов материала сточено.



Дано: шар, вписанный в цилиндр.

Найти: сколько процентов материала сточено.

Решение:

$$1) \quad \begin{aligned} V_{\text{цил.}} &= S_{\text{осн.}} \cdot h. \text{ Но } h=d \Rightarrow h=2r \\ V_{\text{цил.}} &= \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \end{aligned}$$

$$2) \quad V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} 2\pi r^3 - 100\% \\ \frac{4}{3}\pi r^3 - x\% \end{array} \right\} x = \frac{100\% \cdot 4 \cdot \pi r^3}{3 \cdot 2 \cdot \pi r^3} \approx 66,6\%$$

Ответ: 66,6%.

**№5. Лето – время отдыха и пикников. Для таких мероприятий не последнюю роль играет сохранность продуктов в свежем виде.**

**Пикники по особым случаям – это всегда особенная еда. Одним из наиболее важных атрибутов любого праздника является торт.**

**Но очень сложным остаётся вопрос сохранения свежести и исходной формы этого продукта. Торт легко подвергается деформации и быстро теряет свежесть. Поэтому возникла необходимость создания переносной холодильной установки для тортов.**

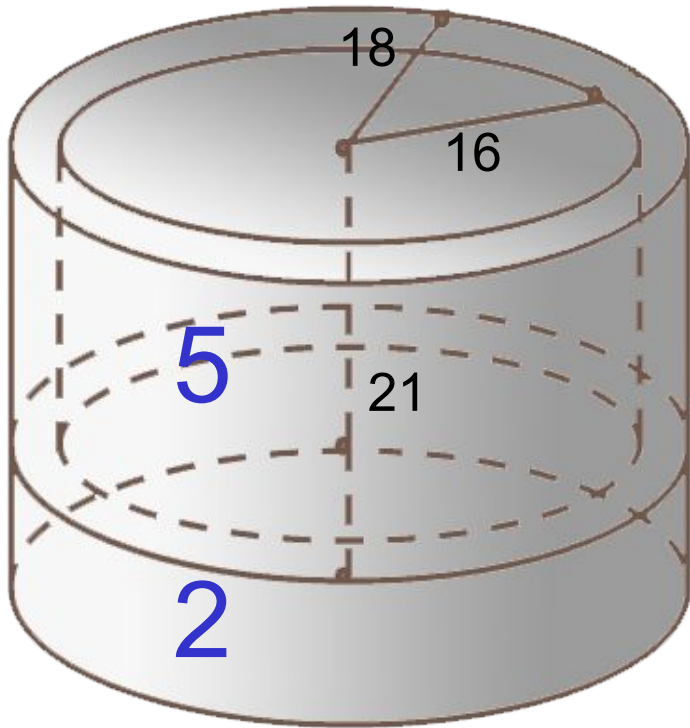


Холодильная установка имеет съёмное блюдо, устанавливаемое на три уровня в зависимости от высоты торта.

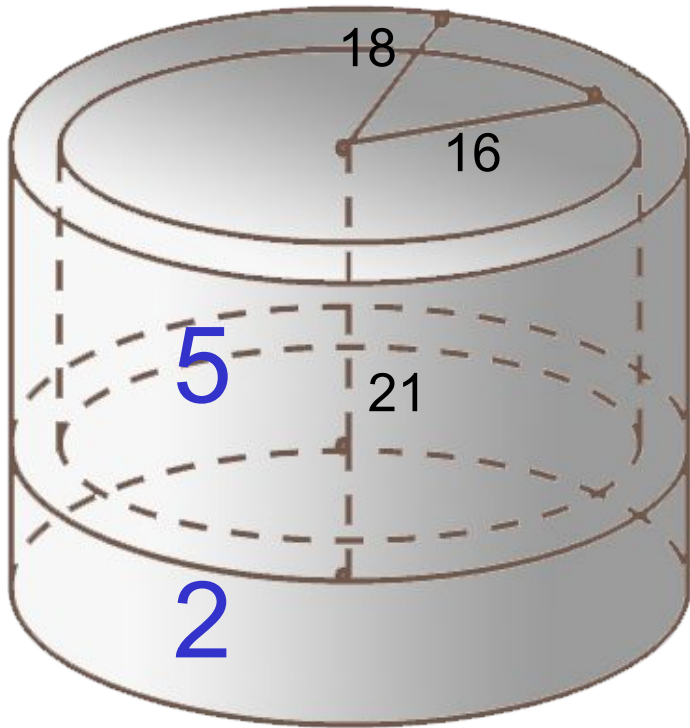
В наличии имеется дверца, с помощью которой открывается холодильник. В совокупности с этой дверцей общая форма холодильной установки – цилиндр.

Общее холодильное устройство расположено в нижней части и скрыто металлическим диском.

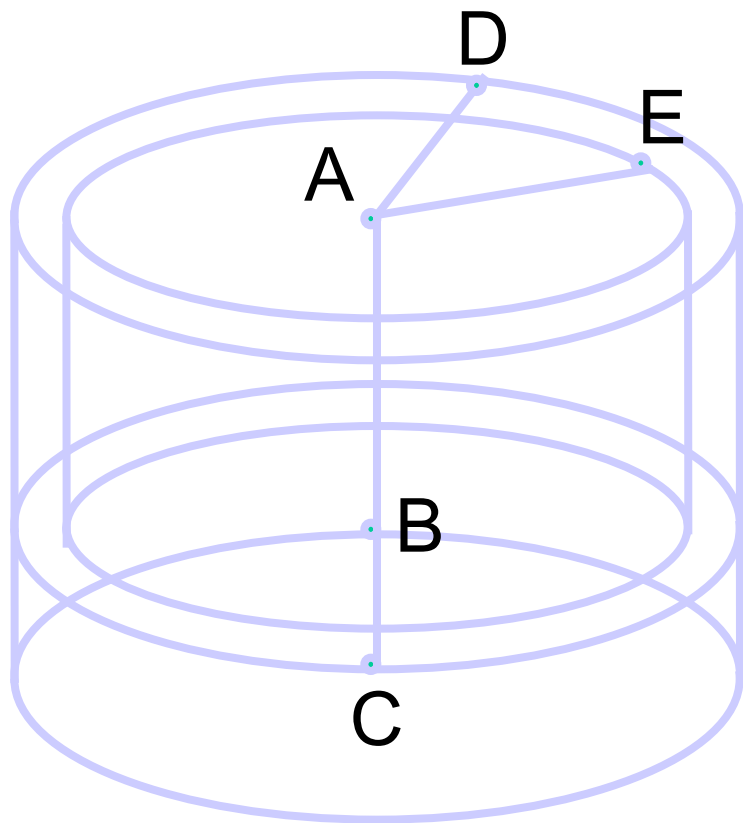
В геометрическом изображении холодильник представлен цилиндрическим телом (радиус равен 18 см, высота – 21 см), разделенным на 2 отсека при помощи кругового сечения, параллельного основаниям цилиндра, в отношении 5:2. Внутри большего отсека располагается цилиндр (радиус – 16 см), один из центров которого совпадает с центром основания исходного цилиндра, а другой – с центром кругового сечения.



Требуется найти:



- ❖ Площадь полной поверхности цилиндра
- ❖ Объем цилиндрического кольца, образованного расстоянием между основным цилиндром и внутренним



Дано:

Цилиндр ( $r_1 = 18\text{ см}$ )

Окр.(т.В;  $r = 18\text{ см}$ )

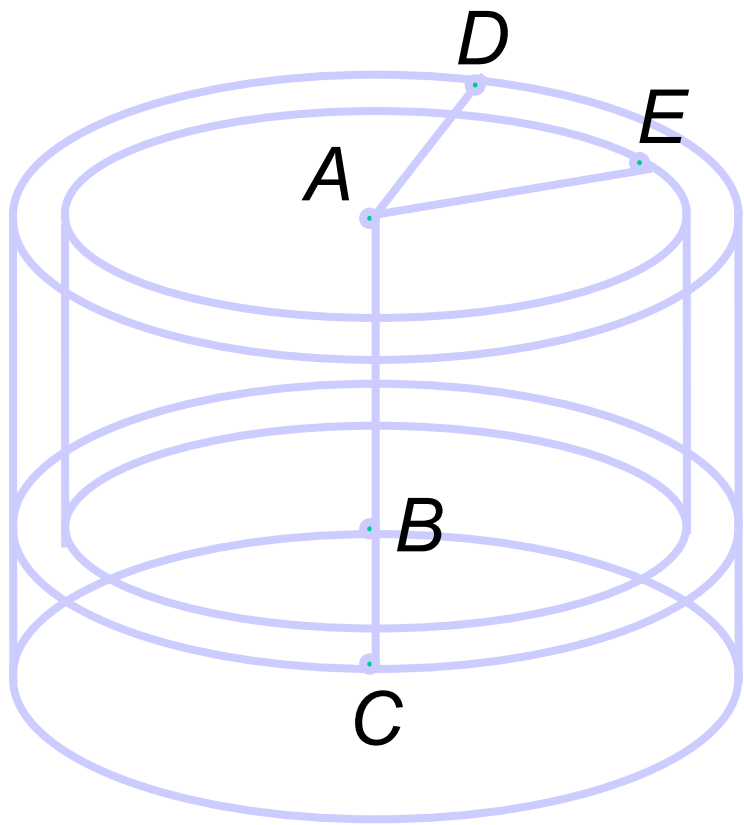
Цилиндр ( $r_2 = 16\text{ см}$ ),

$AC:AB=5:2$ ,  $AC=21\text{ см}$

Найти:

$S_{\text{полн.}}$ ,  $V_{\text{цилиндр. кольца}}$

## Решение.

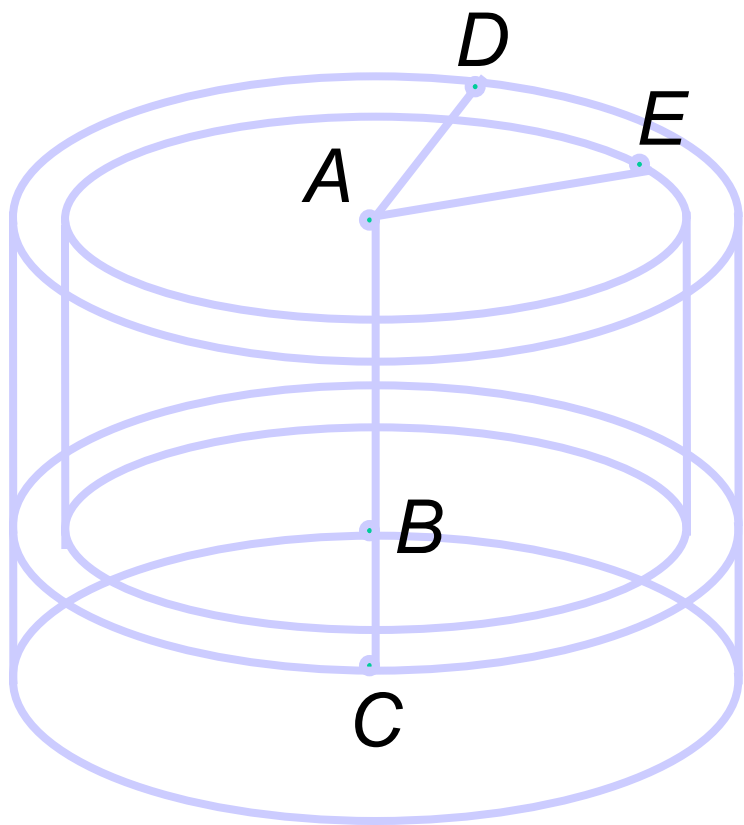


$$1) S_{\text{полн.}} = 2\pi r_1 (r + AC)$$
$$S = 2 \times 3,14 \times 18 \times (18 + 21) = 4408,56 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$2) V_{\text{цил. кольца}} = V_{\text{цил.1}} - V_{\text{цил.2}}$$

$$3) V_{\text{цил1}} = \pi r_1^2 \times AB,$$
$$V_{\text{цил1}} = 3,14 \times 18^2 \times AB,$$
$$V_{\text{цил1}} = 1017,36 \times AB \text{ (см}^3\text{)}$$

$$4) \left. \begin{array}{l} AC:AB=5:2 \text{ (по усл.),} \\ \text{Но } AC = 21 \text{ см (по усл.),} \end{array} \right\} \longrightarrow AB = (21 \times 2) \div 5 = 8.4 \text{ (см)}$$



$$5) V_{\text{цил.1}} = 1017,36 \times 8,4 = 8545,824 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$6) V_{\text{цил.2}} = \pi r_2^2 \times AB, \\ V_{\text{цил.2}} = 3,14 \times 256 \times 8,4 = 6752,256 \text{ (см}^3\text{)}$$

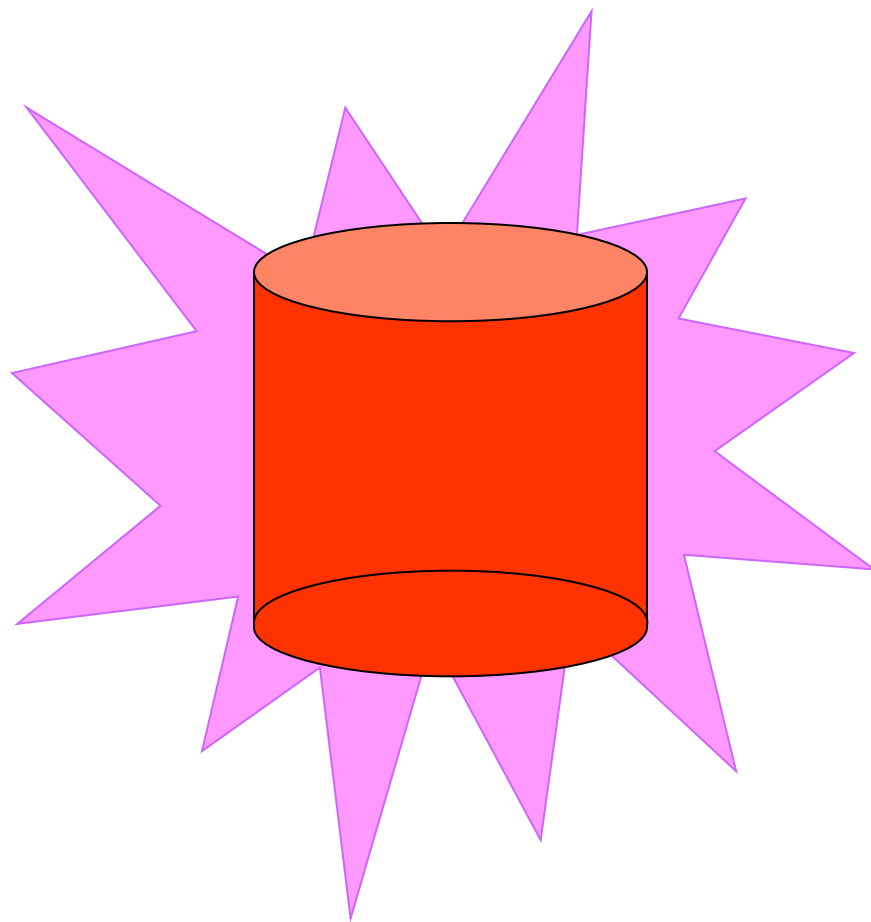
$$7) V_{\text{цил кольца}} = 8545,824 - 6752,256 = 1793,568 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ:  $S_{\text{полн.}} = 4408,56 \text{ см}^2$   
 $V_{\text{цилиндр. кольца}} = 1793,568 \text{ см}^3$

Таким образом, получив необходимые данные, можно изготовить предложенный холодильник и использовать его с удовольствием в любое время, наслаждаясь свежим вкусом вашего торта.



Теория.





# Определение.

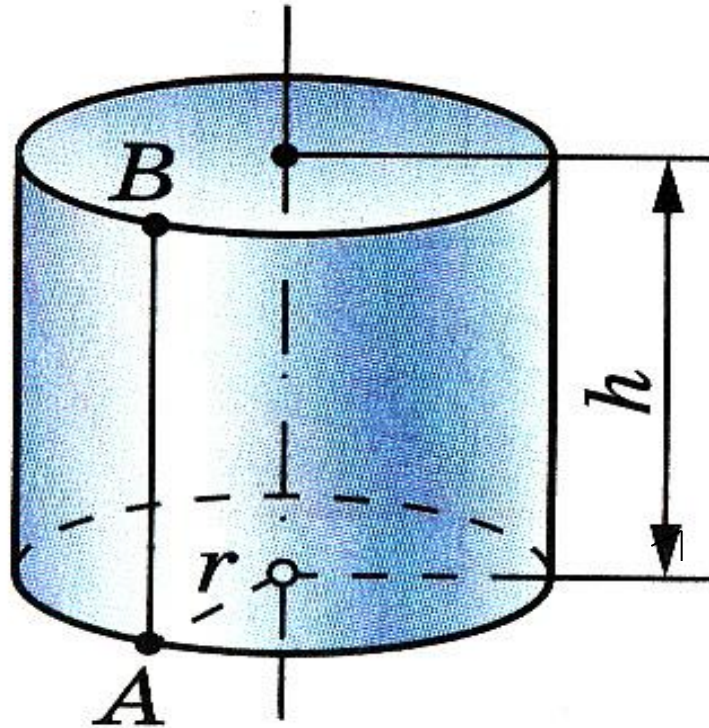
- **Цилиндр** (греч. *kýlindros*, валик, каток) — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью (называемой боковой поверхностью цилиндра) и не более чем двумя поверхностями (основаниями цилиндра).

# Другие определения цилиндра.

- **Цилиндр** - это фигура, состоящая из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.
- **Цилиндром** называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими эту поверхность.
- У Евклида **цилиндр** получается вращением прямоугольника.
- У Кавальери – движением образующей (при произвольной направляющей – "цилиндрика").

# Определение.

Прямым называется такой цилиндр, у которого образующие перпендикулярны основаниям.

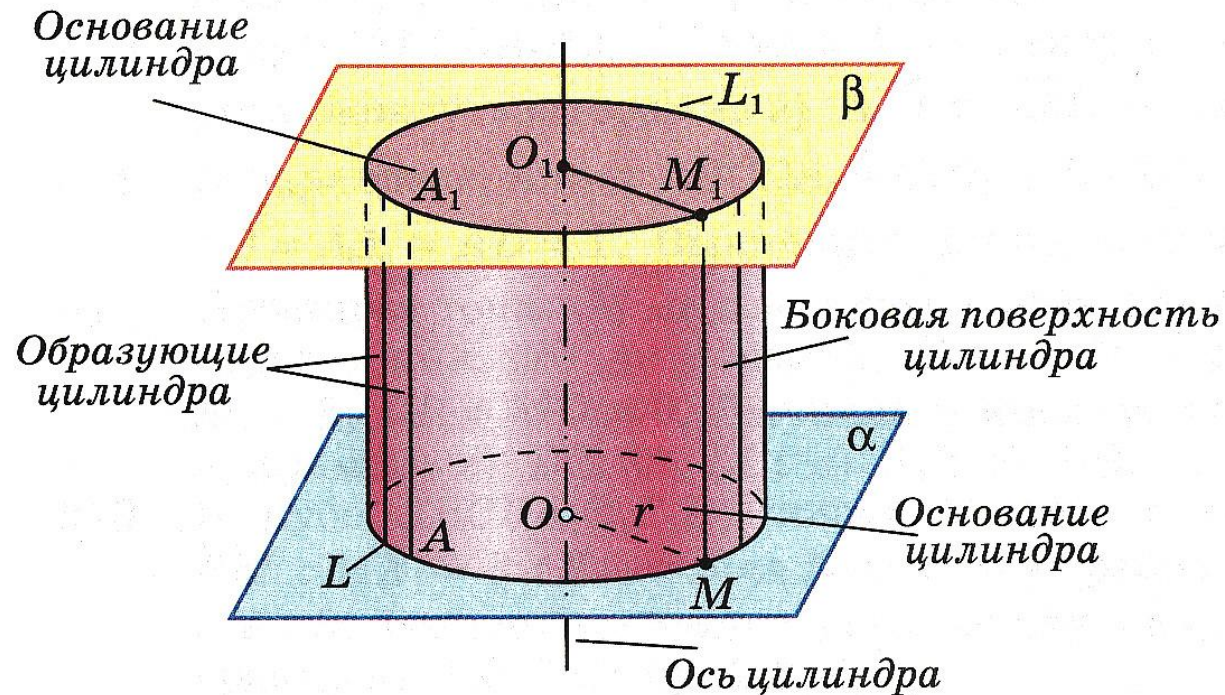


# Элементы цилиндра.

Круги, ограничивающие цилиндрическую поверхность называются **основаниями цилиндра**.

Отрезки образующих, заключенные между основаниями, называются **образующими цилиндра**, а образованная ими поверхность – **боковой поверхностью цилиндра**.

Ось цилиндрической поверхности называется **осью цилиндра**.



# Свойства цилиндра.

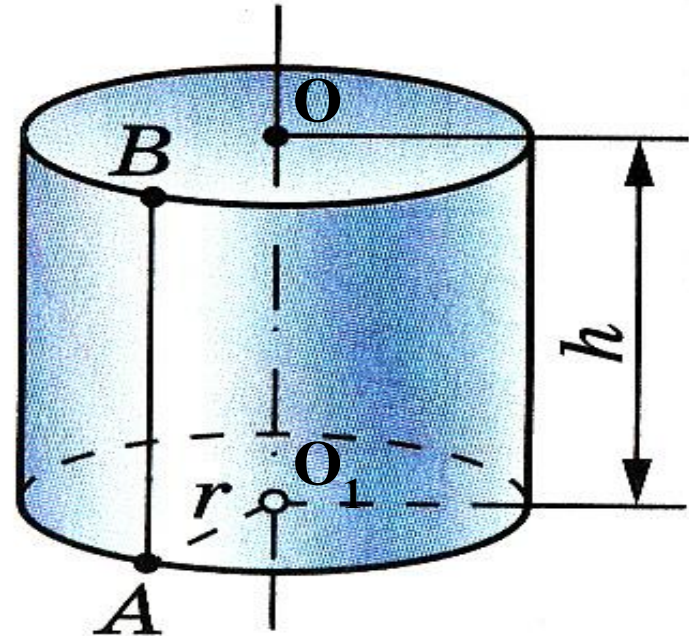
1. Основания равны и параллельны.
2. Образующие равны и параллельны.
3. Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований цилиндра, равны основаниям цилиндра.

# Замечание 1.

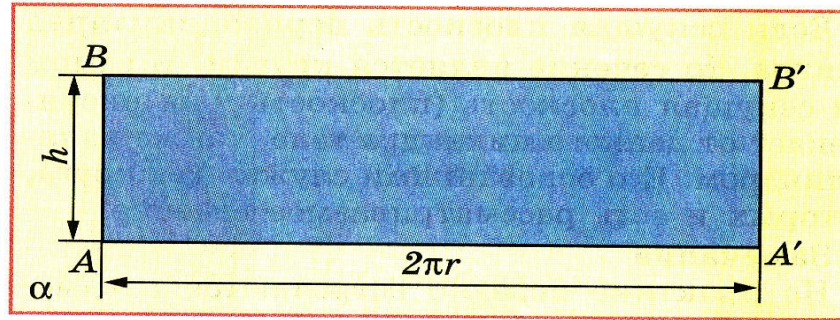
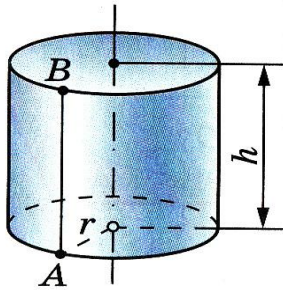
**В прямом цилиндре :**

отрезок оси, заключенный между основаниями, равен высоте, равен образующей, т. е.

$$OO_1 = AB = h.$$



## Замечание 2.



За площадь боковой поверхности цилиндра принимают площадь её развёртки:  $S_{\text{бок.}} = 2\pi r h$

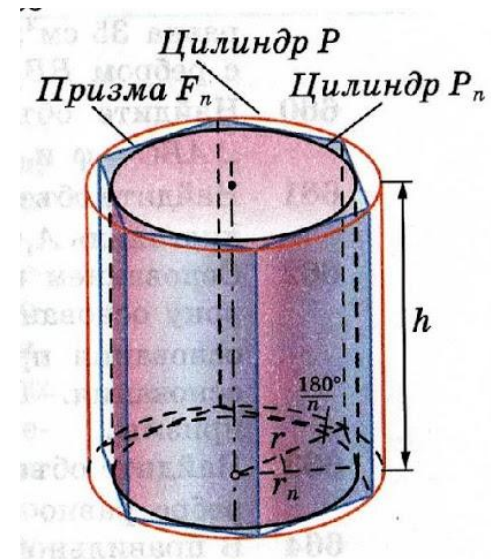
Площадь полной поверхности цилиндра – это сумма площадей боковой поверхности и двух оснований:  $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R+h)$ .



# Замечание 3.

**Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту:**

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$





# Усеченный цилиндр.

**Усечённый цилиндр** - геометрическое тело, отсекаемое от цилиндра плоскостью, непараллельной основанию и не пересекающей его.

**Боковая поверхность усеченного цилиндра**

$$S_{\text{бок.}} = \pi R(H_1 + H_2)$$

**Полная поверхность**

$$S_{\text{полн.}} = \pi R \left[ R + H_1 + H_2 + \sqrt{R^2 + \left( \frac{H_2 - H_1}{2} \right)^2} \right]$$

**Объём круглого усеченного цилиндра равен**

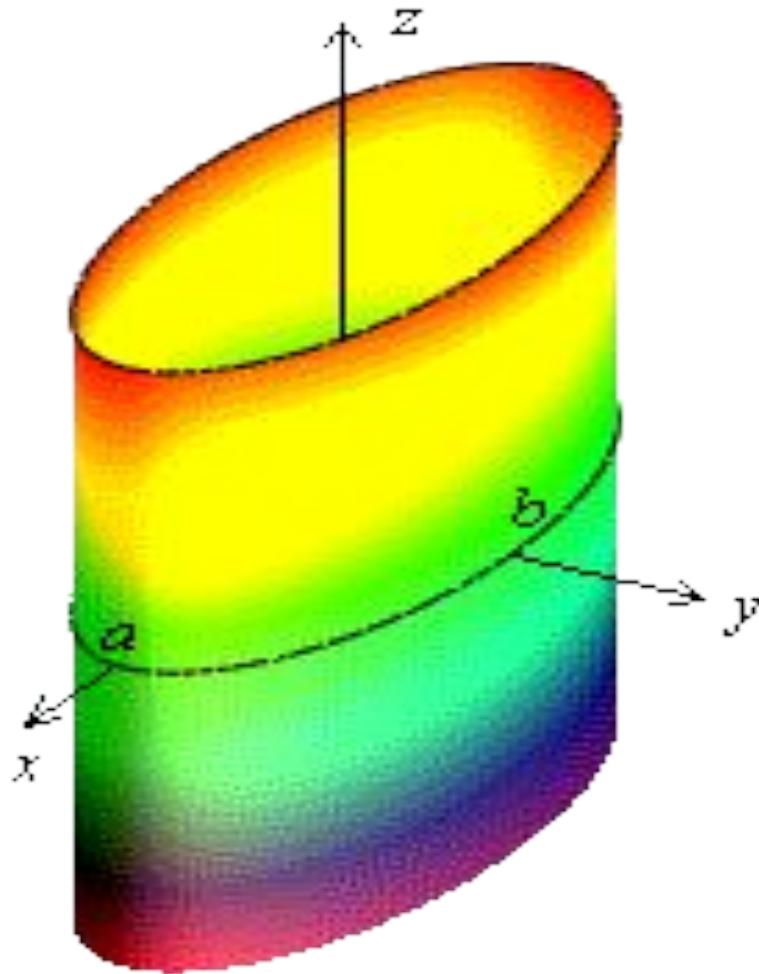
$$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$$



# Эллиптический цилиндр.

Эллиптический цилиндр - линейчатая цилиндрическая поверхность, уравнение которой может быть приведено к виду

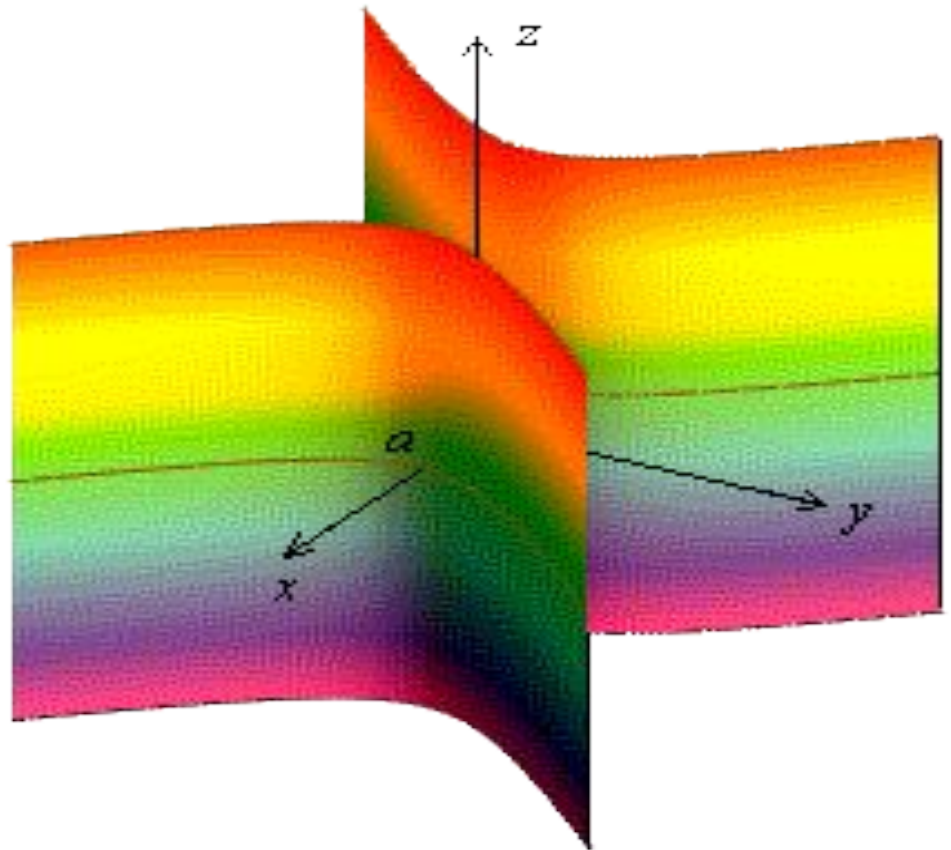
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



# Гиперболический цилиндр.

Гиперболическим цилиндром называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат задаётся уравнением

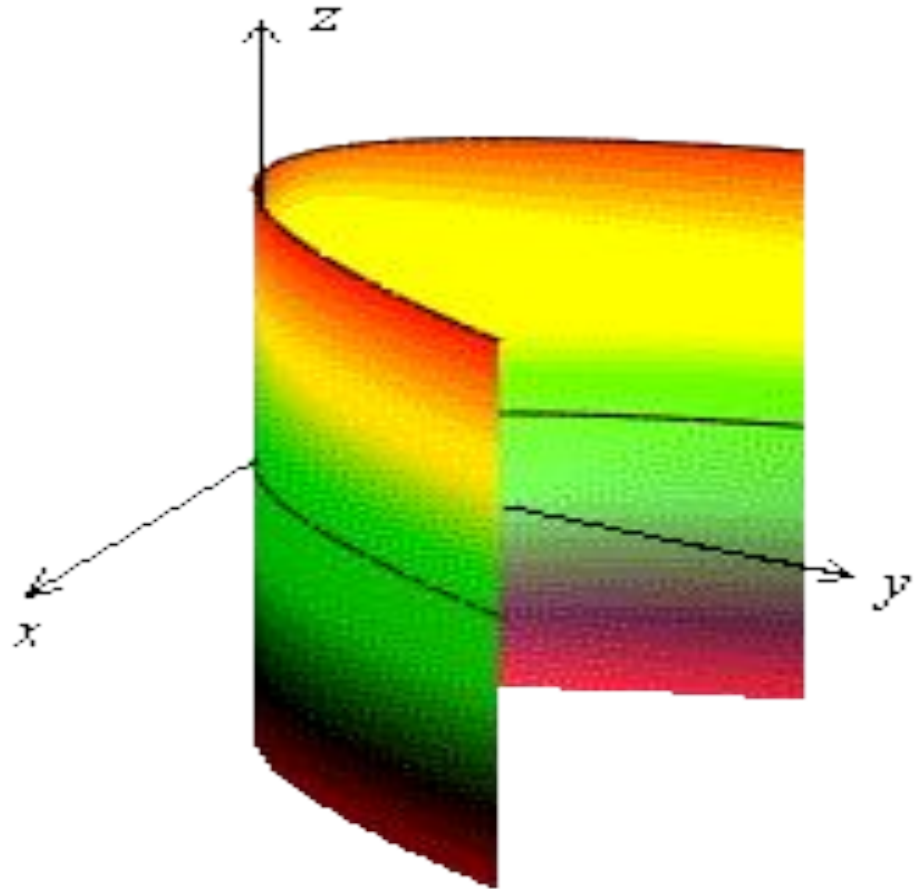
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



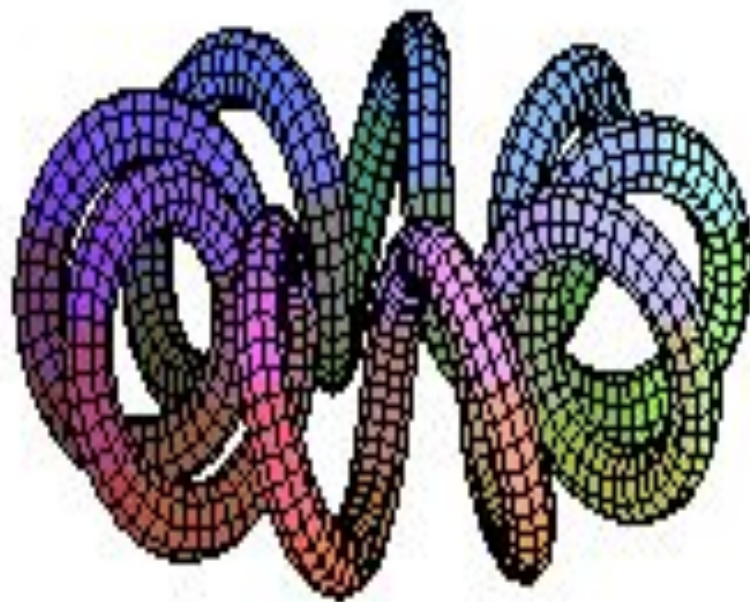
# Параболический цилиндр.

Параболическим цилиндром называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат задается уравнением

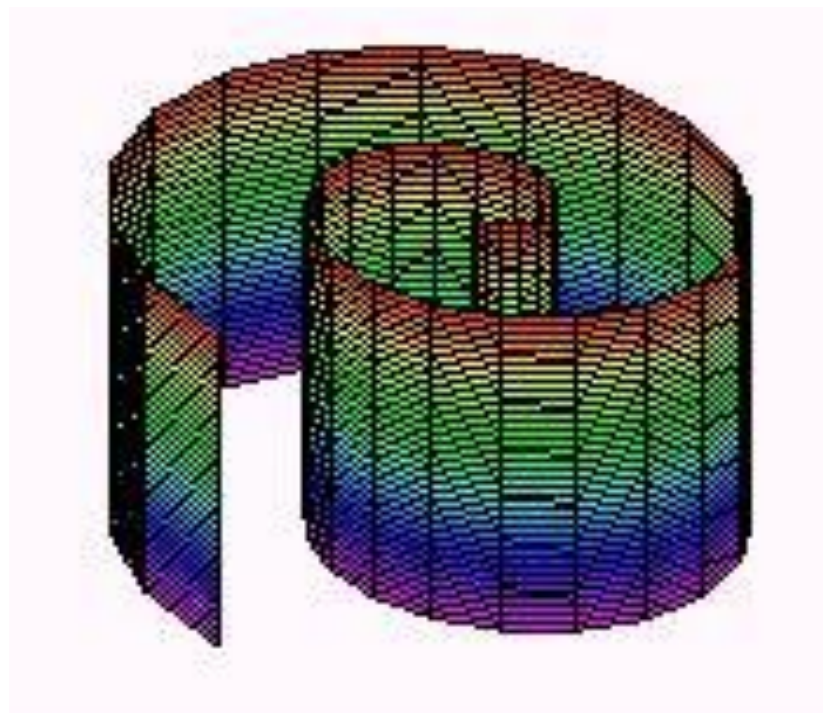
$$y^2 = 2px$$



Круговой цилиндр  
вдоль пространственной кривой.



# Спиральный цилиндр.

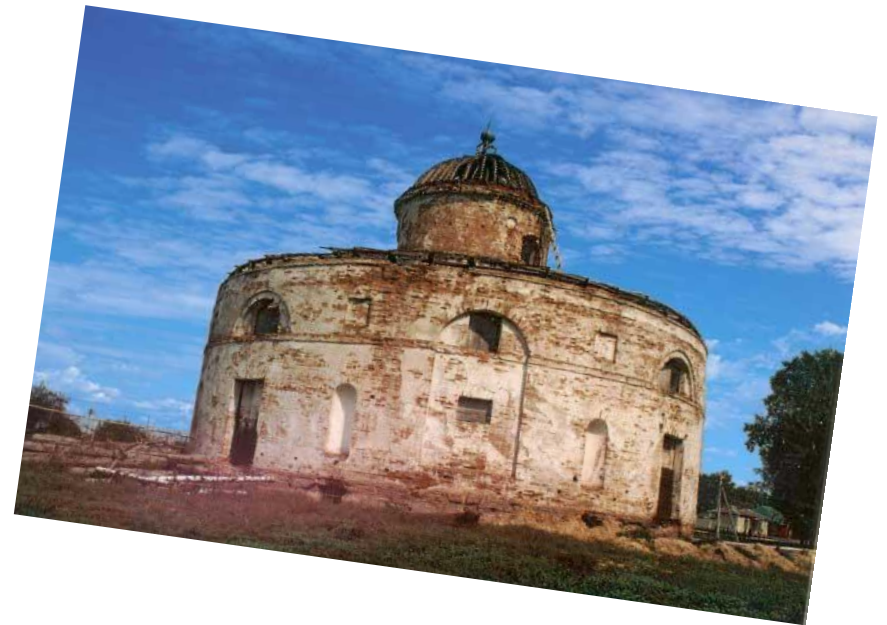




# Цилиндры в архитектуре.



Колизей.



Здание в Грайворонском районе.



**КОЛИЗЕЙ** (Colosseum) – грандиозный амфитеатр, возведенный в Древнем Риме в эпоху Флавиев. Колизей был заложен в 75 императором Веспасианом Флавием (9–79) и в 80 открыт его сыном Титом (годы правления 79–81). Торжества по случаю открытия продолжались сто дней. Работы по архитектурному оформлению продолжались и позже. Три века Колизей служил для устройства боев гладиаторов (запрещены в 404–405), для травли зверей (продолжались до 526), для морских боев, для которых арена заливалась водой. В 11–12 вв. Колизей становится феодальным замком-крепостью. С середины 14 в. здесь поселяются религиозные братства (на арене сооружается церковь), проводятся религиозные представления – мистерии, запрещенные в середине 16 в.

Здание Колизея разрушалось: частые землетрясения, пожары, варварское отношение людей. В эпоху средних веков он использовался как каменоломня: каменные блоки брали для построек дворцов и церквей – это был период наибольших разрушений. Уже в античные времена Колизей неоднократно восстанавливался, реконструировался. Лишь с начала 19 в. стали целенаправленно заниматься сохранением памятника и проводить археологические раскопки.

Колизей – постройка в виде эллипса: длина 188 м, ширина 156 м, высота 48,5 м.

Средняя часть здания, арена, покрытая песком и предназначавшаяся для гладиаторских боев, травли животных, по форме представляла собой эллипс (длина 86 м, ширина 54 м). Размеры арены позволяли сражаться на ней одновременно 3000 пар гладиаторов. Арену обрамляли постепенно повышающиеся места для зрителей, расположенные 4 ярусами. На первом ярусе располагались места для почетных зрителей, выше находились 20 мраморных рядов для официальных гостей, всадников. За узким проходом следовало еще 20 мраморных рядов, а далее находилась колоннада, за которой был ярус с деревянными скамьями для простых людей. Распределение мест производилось строго в соответствии с социальной принадлежностью граждан (чем ниже положение, тем выше находилось место). Вместимость Колизея – 50 000 мест.



С наружной стороны Колизей – четырехъярусное здание. Первые три яруса образовывали аркады по 80 арок, которые опирались на мощные столбы в 2,4 м шириной. Арки были украшены приставными полуколоннами с антаблементом. Верхний этаж представлял собой высокую стену, которая была декорирована 80 находившимися над колоннами пилястрами коринфского ордера. Между ними располагались квадратные окна, и помещались по три кронштейна, которые служили опорами для мачт. На них натягивали тент от солнца (веларий), создававший тень над трибунами и ареной. Последний этаж был украшен бронзовыми щитами (не сохранились).

Внешние части Колизея были сооружены из травертина, внутренние – из туфа, кирпича, мрамора, бетона и дерева. При строительстве Колизея тщательно притертые камни были положены без раствора и скреплены между собою железными скобами, большую часть которых выломали во времена средневековья.

80 арок нижнего яруса (они были пронумерованы) служили для входа и выхода зрителей, т.е. на каждый вход приходилось по 600 зрителей. Пройдя через арки нижнего яруса, люди попадали в сводчатые галереи, идущие параллельно внешней стене. Такие же галереи во втором и третьем ярусе использовались, как места для отдыха. Лестницы, находящиеся внутри здания, обеспечивали зрителям быстрый вход внутрь.

Под ареной находились сложные инженерные сооружения, водопровод, конструкции для механических устройств (подъемные механизмы, доставляющие гладиаторов и зверей наверх), клетки для животных, склады для оружия, помещения для декораций, комнаты гладиаторов.

Арена современного Колизея лишена покрытия, поэтому сейчас можно видеть прежде скрытые помещения.

Колизей – выдающийся памятник архитектуры Древнего Рима, самый крупный амфитеатр античного мира, символ величия и могущества императорского Рима.





Музей BMW в Мюнхене.



Пизанская башня.



**Особняк Мельникова.**  
**Кривоарбатский переулок,**  
**10, Москва.**

**Пизанская башня** (итал. *Torre pendente di Pisa*) (1360) — колокольная башня, часть ансамбля городского собора Санта-Мария Маджоре в итальянском городе Пиза, получившая известность благодаря тому, что она сильно наклонена. Башня «падает». Высота башни составляет 55,86 м от земли на самой низкой стороне и 56,70 м на самой высокой стороне. Ширина стен в основе составляет 4,09 м. и вверху 2.48 м. Её масса оценивается в 14700 т. Текущий наклон составляет около  $5,5^\circ$  (отклонение примерно 4,5 м. от вертикали). Башня имеет 294 ступеньки.

### Строительство башни

Строительство башни велось в три этапа. Начиная с 9 августа 1173 и с двумя длинными перерывами продолжалось почти 200 лет, до 1360 года. Башня является колокольной католического собора Campo dei Miracoli (*поле чудес*). Автор проекта так и остался неизвестен. Без сомнения, башня является одной из самых замечательных колоколен Европы. Раньше считали, что *наклон* башни являлся частью проекта, но сейчас эта версия опровергнута. Башня проектировалась «вертикальной», но «наклон» начал чувствоваться уже в процессе строительства. Как из-за наклона, так и из-за оригинальной архитектуры, с 1173 и вплоть до наших дней, башня является объектом пристального внимания. Постоянно прилагаются усилия, чтобы сделать башню более устойчивой. Например, разрушающиеся колонны были заменены неоднократно. Сейчас в основном проводятся подземные работы, укрепляющие фундамент.



# Цилиндры в архитектуре нашего города.



Храм Христа  
Спасителя на  
центральной площади  
Калининграда.





Стела на площади Победы.



Дом возле развлекательного центра  
«Вавилон».



ТЦ «Маяк» на  
улице Театральной.



Кафедральный собор на  
острове.



Бизнес-центр «Панорама».



ТЦ «Виктория» на площади Калинина.



# Заключение.

Цилиндры в нашей жизни встречаются почти повсюду: в архитектуре, в компьютерах, в механике, в гардеробе, в растительном мире. Они имеют большое практическое применение и, поэтому, помогают решить множество задач, облегчая жизнь и работу людям. Кроме того, цилиндры являются прекрасным архитектурным решением, эстетически украшая здания и сам ландшафт.

