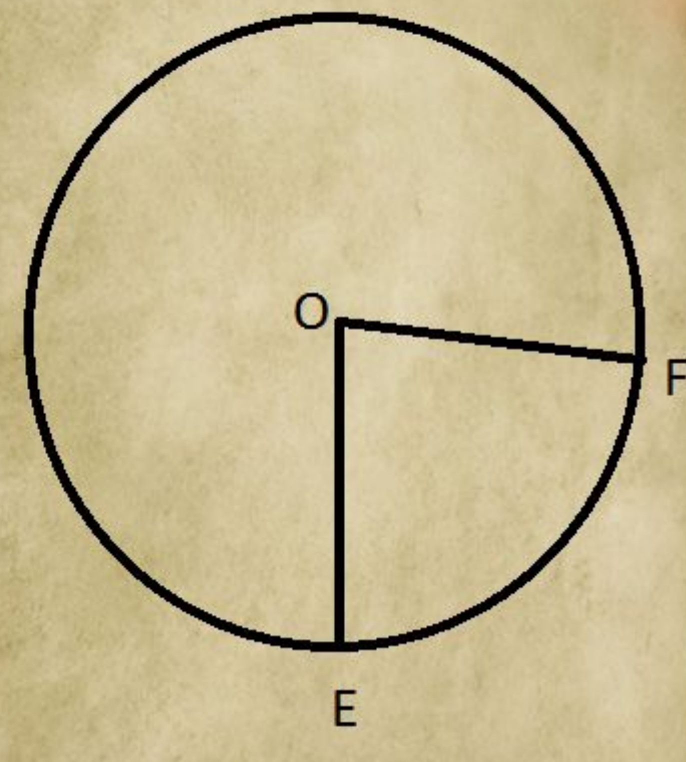
Центральный и вписанные углы. Свойства хорд, секущих, касательной.

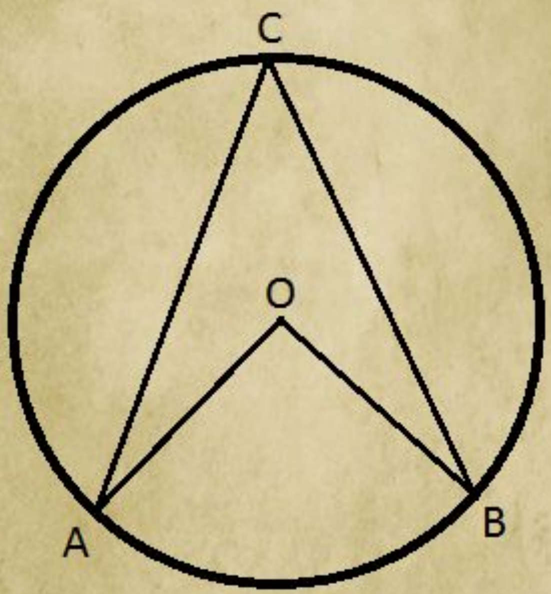
Центральный угол

- **Центральный угол — угол** с вершиной в центре окружности. **Центральный угол** равен радианной/градусной мере дуги, на которую опирается.



Пример

- Точка О – центр окружности, угол ACB=65°. Найдите величину угла AOB.



Так как, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то

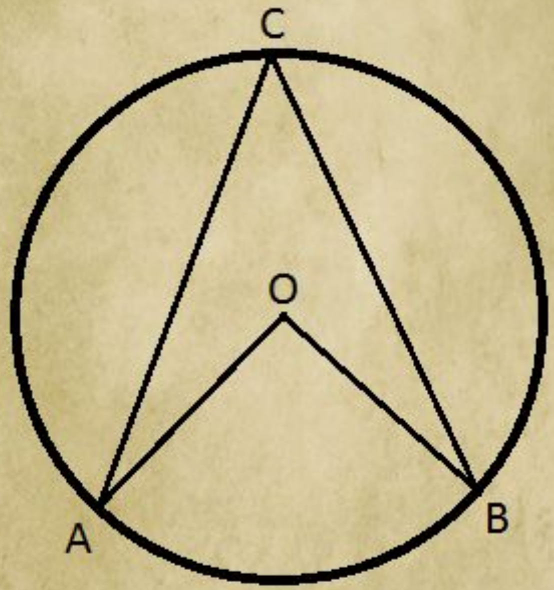
ACB=1/2AOB

1/2AOB=65°

AOB=130°

Задача

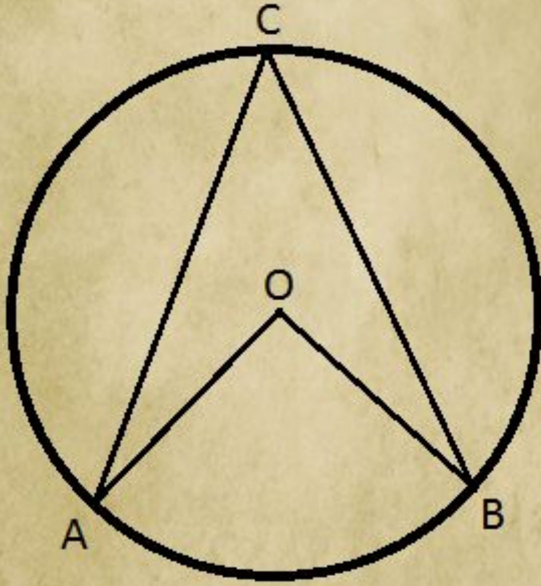
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=70°. Найдите величину угла АОВ.



Решение

Задача

- Точка О – центр окружности, угол АСВ=70°. Найдите величину угла АОВ.



Так как, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то

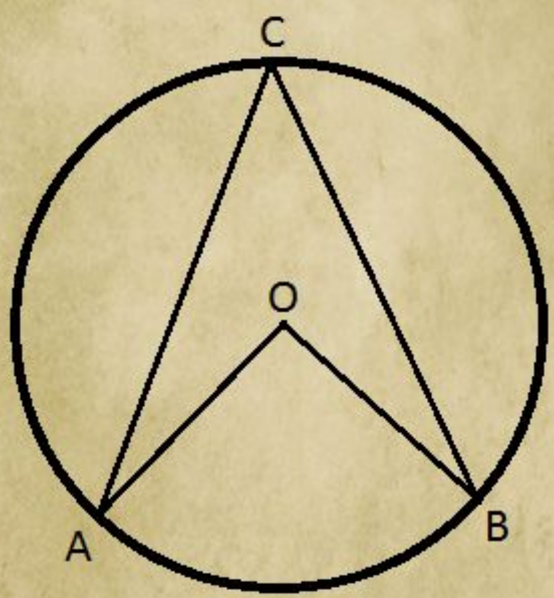
АСВ=1/2АОВ

1/2АОВ=70°

АОВ=140°

Задача

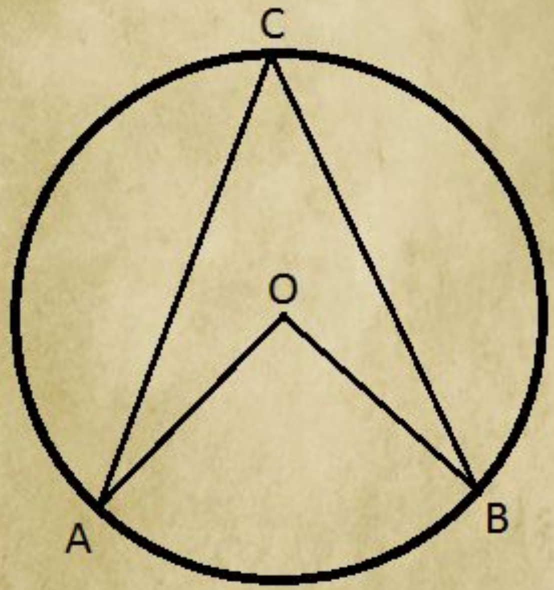
- Точка O – центр окружности, угол ACB=25°. Найдите величину угла AOB.



Решение

Задача

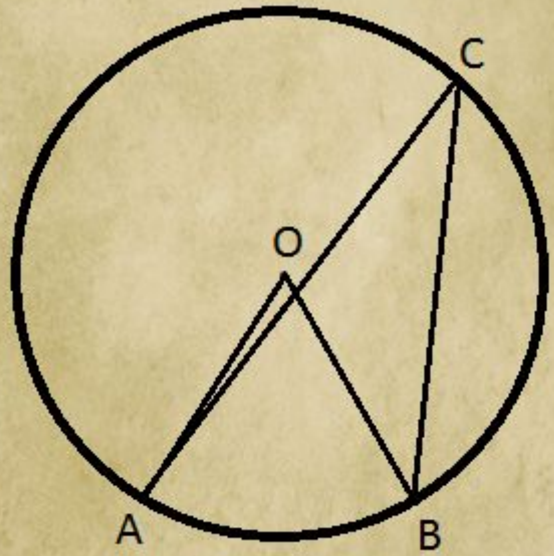
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=25°. Найдите величину угла АОВ.



Так как, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то АСВ=1/2АОВ
1/2АОВ=25°
АОВ=50°

Задача

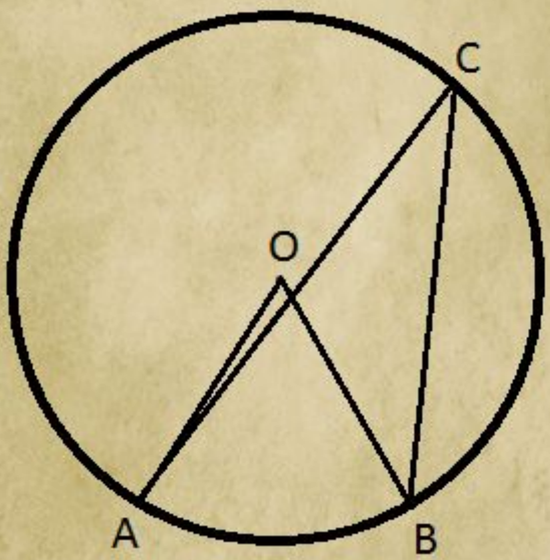
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=65°. Найдите величину угла АОВ.



Решение

Задача

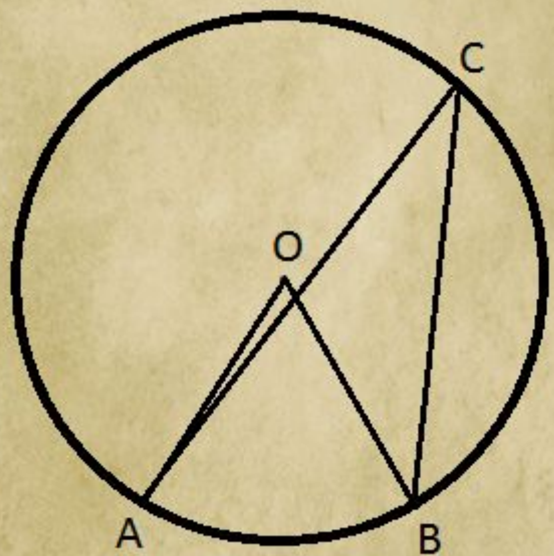
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=65°. Найдите величину угла АОВ.



Так как, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то
АСВ=1/2АОВ
1/2АОВ=65°
АОВ=130°

Задача

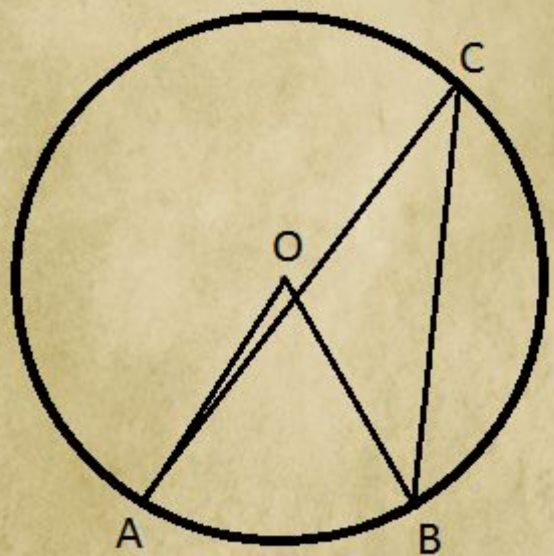
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=79°. Найдите величину угла АОВ.



Решение

Задача

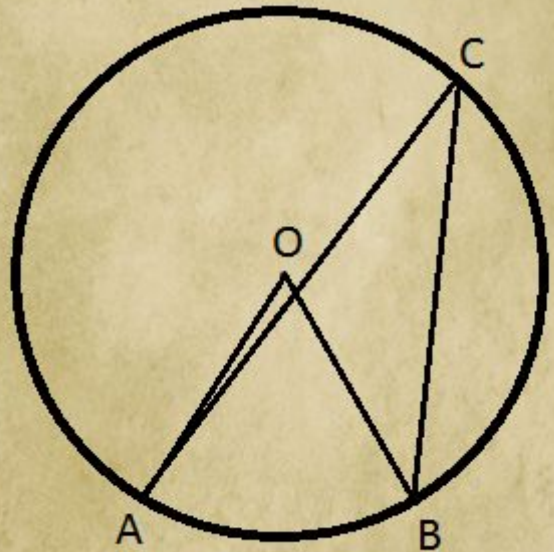
- Точка О – центр окружности, угол ACB=79°. Найдите величину угла AOB.



Так как, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то
ACB=1/2AOB
1/2AOB=79°
AOB=158°

Задача

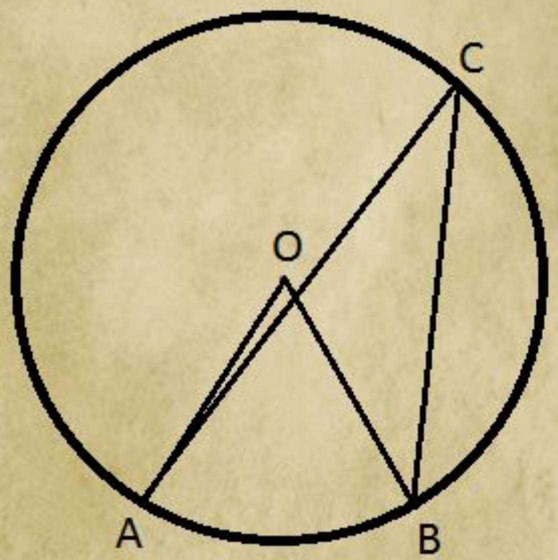
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=43°. Найдите величину угла АОВ.



Решение

Задача

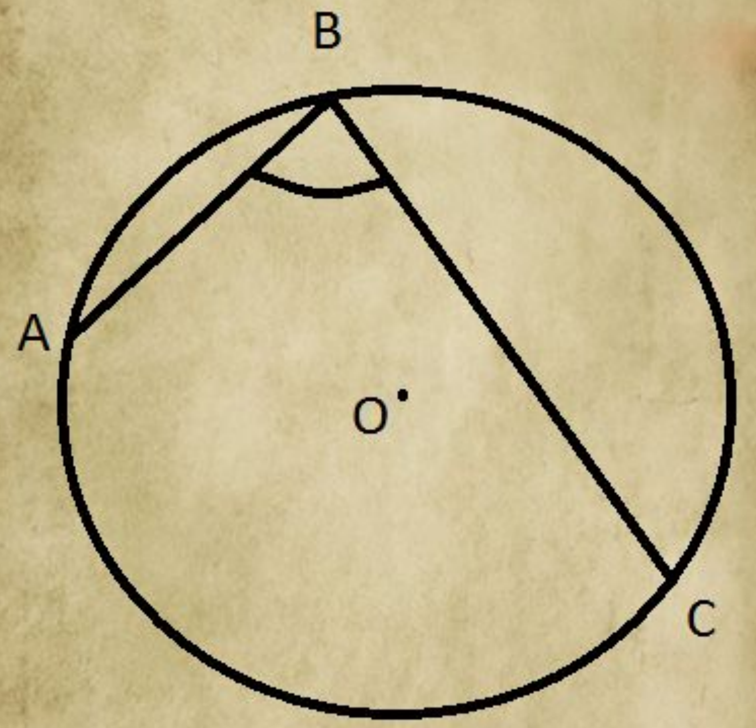
- Точка О – центр окружности, угол АСВ=43°. Найдите величину угла АОВ.



Так как, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, то АСВ=1/2АОВ
1/2АОВ=43°
АОВ=86°

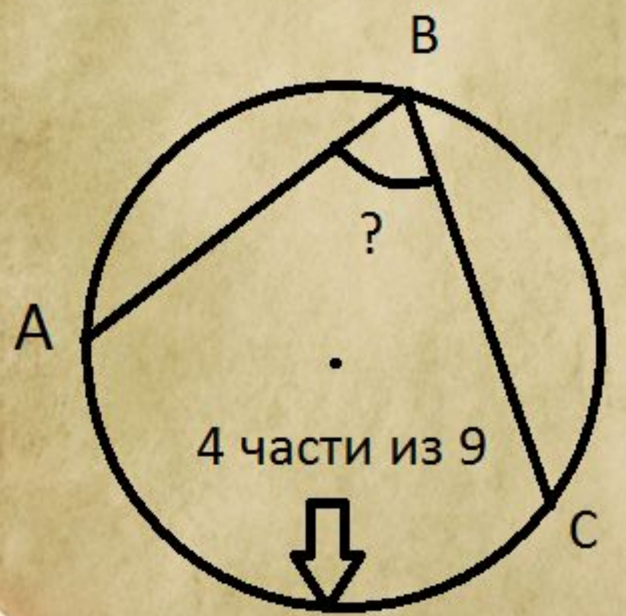
Вписанный угол

- Вписанный **угол** — **угол**, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность. Вписанный **угол** равен половине градусной меры дуги, на которую



Пример

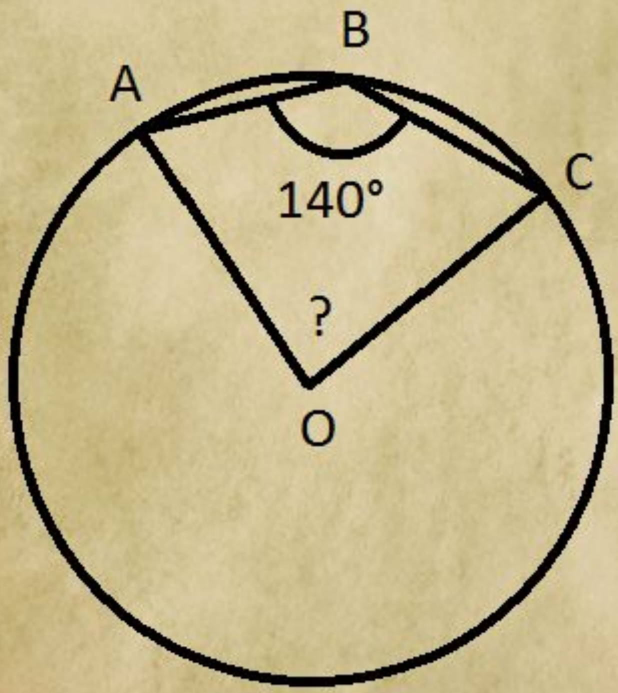
- Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет окружности.



Окружность составляет 360° , поэтому дуга АС, которая составляет 4/9 окружности, равняется 4/9*360° =160° . Поэтому вписанный угол АВС равен 80° , так как градусная мера вписанного угла вдвое меньше

Задача

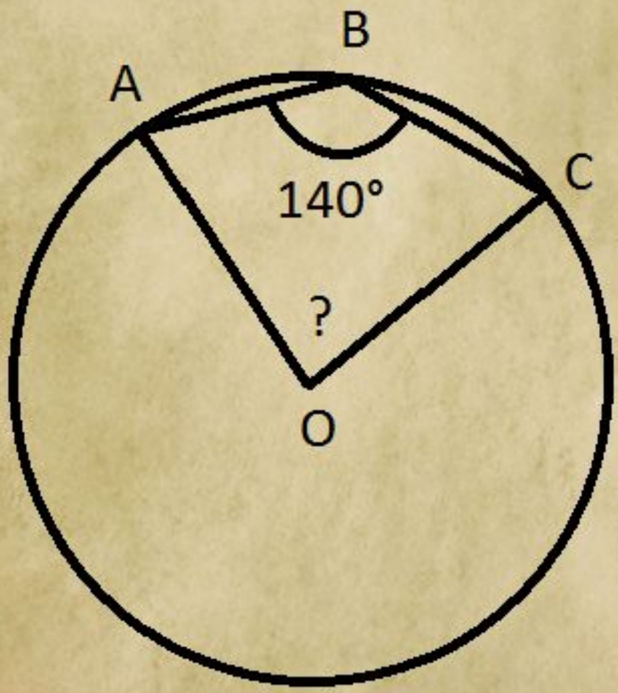
- Найти величину угла А0С (см. рис.), если угол АВС равен



Решение

Задача

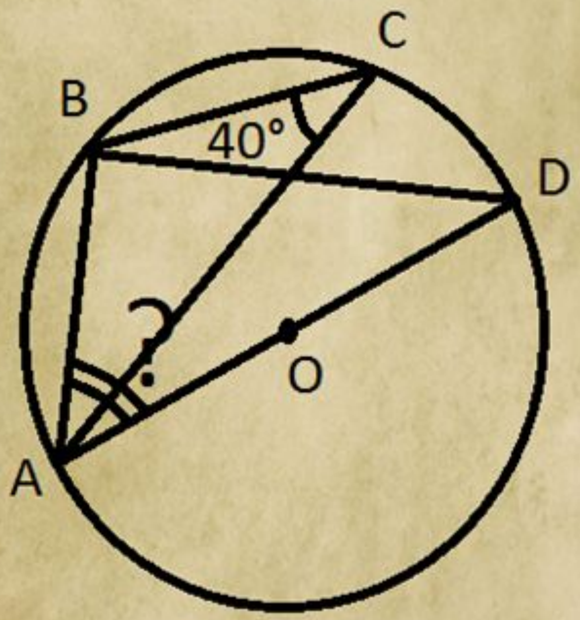
- Найти величину угла А0С (см. рис.), если угол АВС равен



Заметим, тот угол AOC, что помечен на картинке, хоть и является центральным углом, но не является соответствующим для вписанного угла ABC, так как они опираются на разные дуги (угол ABC опирается на дугу AC, а угол AOC — на дугу ABC).
Так как вписанный угол ABC, равный 140°, опирается на дугу AC, то она равна 280° . Значит дуга ABC равна 360° -280°=80° . А значит центральный угол AOC, который измеряется градусной мерой дуги, на

Задача

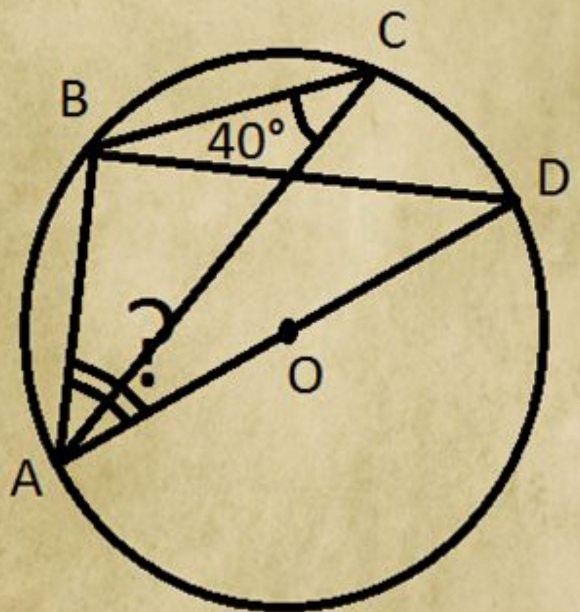
- Найти величину угла BAD, изображенного на картинке:



[Решение](#)

Задача

- Найти величину угла BAD, изображенного на картинке:

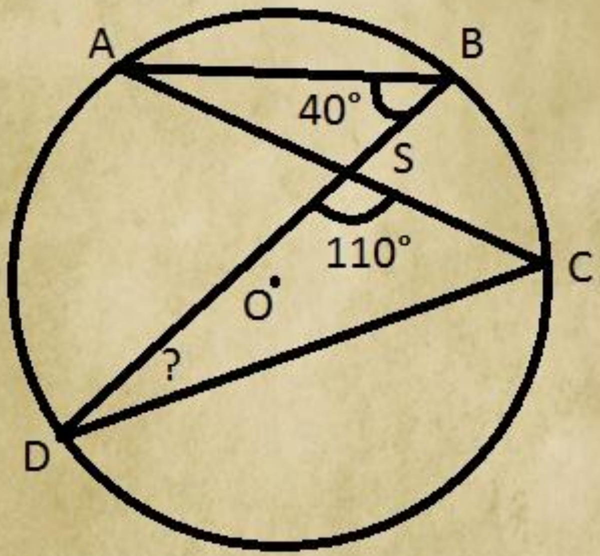


Так как углы BCA и BDA опираются на одну дугу (AB), то они равны, то есть . ∠BDA=40°

Теперь обратимся к треугольнику ABD. Он прямоугольный, так как угол ABD, опирающийся на диаметр, — прямой.

Задача

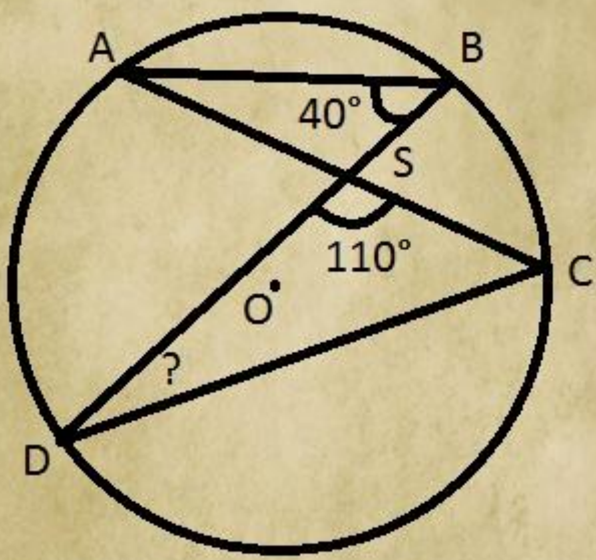
Найти величину угла D, изображенного на картинке:



Решение

Задача

- Найти величину угла D, изображенного на картинке:



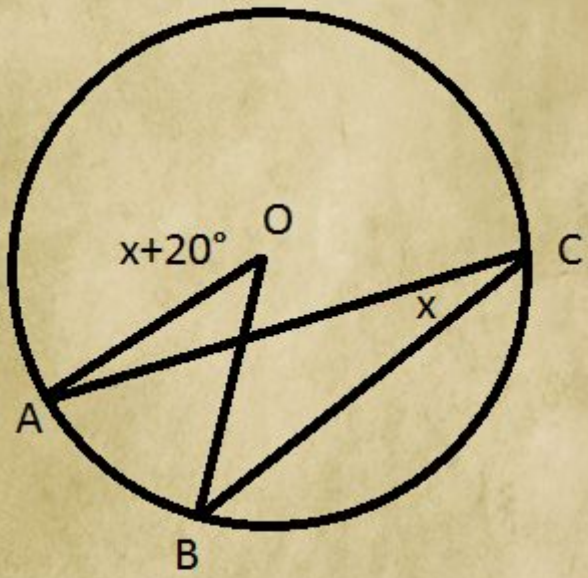
∠ASB= ∠CSD=110° как вертикальные.

Из треугольника ABS: ∠BAS=180°-110°-40°=30°

∠BAS=∠BDC=30°, так как Углы опираются на одну дугу.

Задача

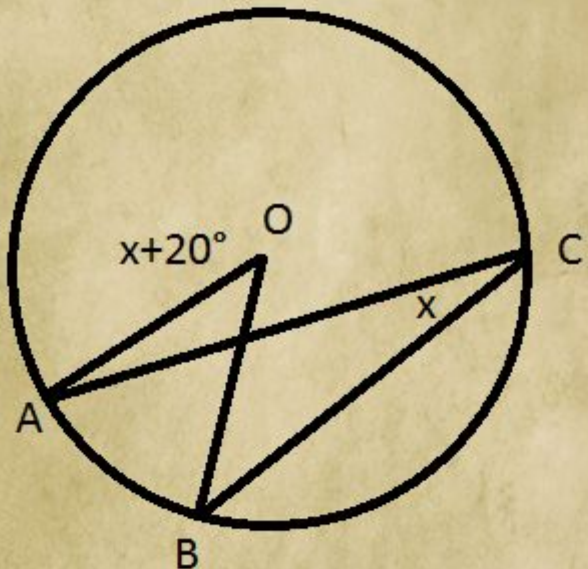
- Центральный угол на больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.



[Решение](#)

Задача

- Центральный угол на больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.



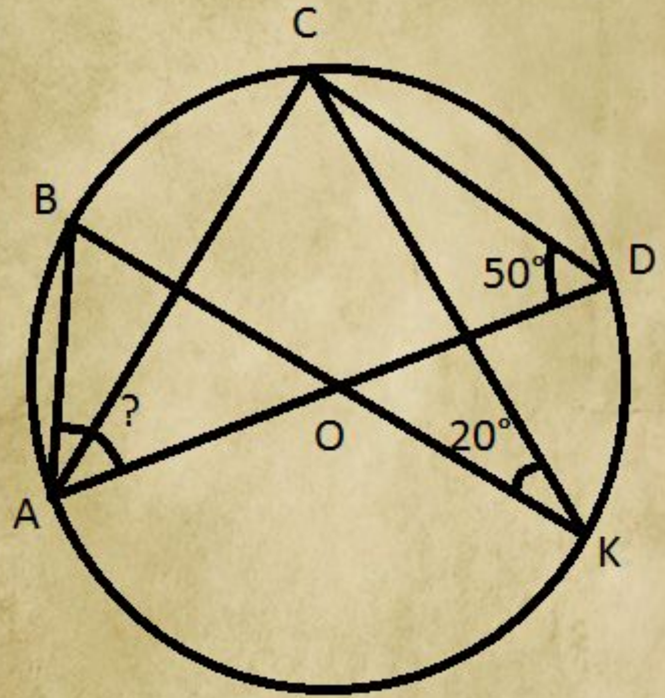
Обозначим градусную меру ∠ угла ACB за x, тогда AOD = x+20°

Так как центральный угол вдвое больше соответствующего вписанного угла, то составим уравнение:

$2x=x+20$, откуда

Задача

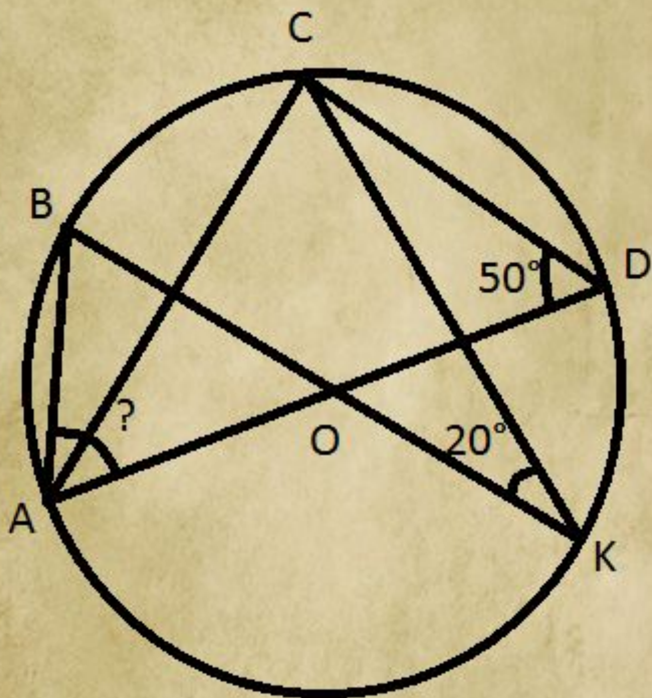
- Найти градусную меру угла BAD:



[Решение](#)

Задача

- Найти градусную меру угла BAD:



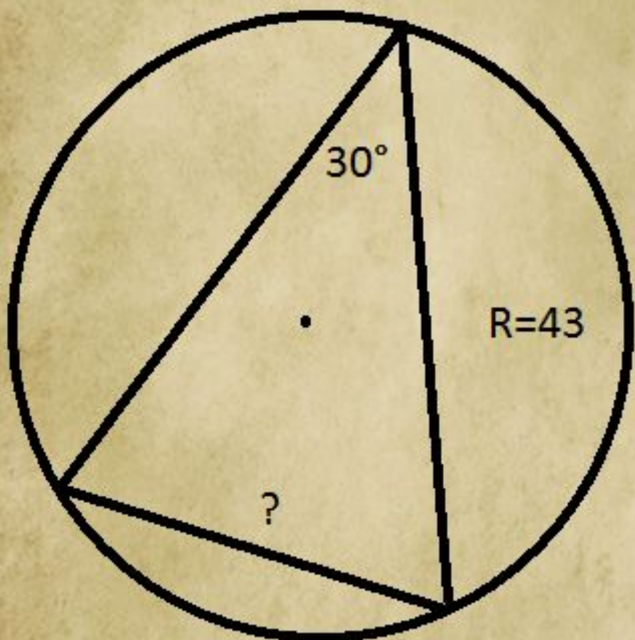
- ∠CDA=50°, следовательно ABC=100° как дуга вписанного угла. Аналогично, CKB=20°, следовательноBC=40°. Тогда AB=ABC-BC=60°. А так

Хо́рда

- **Хо́рда**— отрезок, соединяющий две точки данной крив ой (например, окру жности, эллипса, п араболы).

Пример

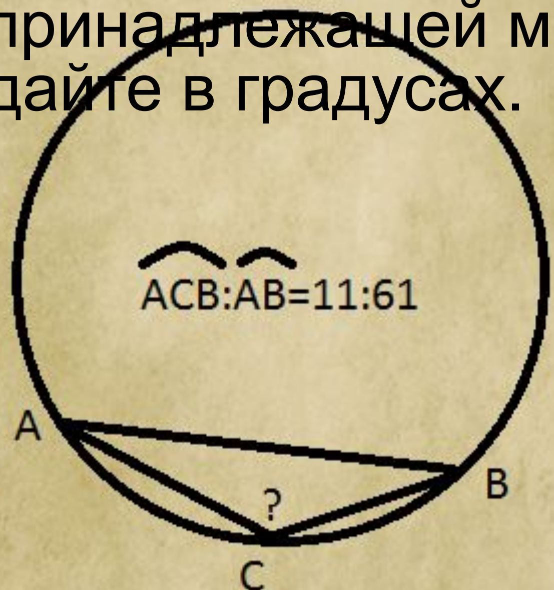
- Найдите хорду, на которую опирается угол 30˚, вписанный в окружность радиуса 43.



Угол АОС – соответствующий центральный для вписанного угла в 30°. Значит, по свойству вписанных углов, АОС=60°. Тогда ∠ треугольник АОС – не просто равнобедренный, но и равносторонний А=

Задача

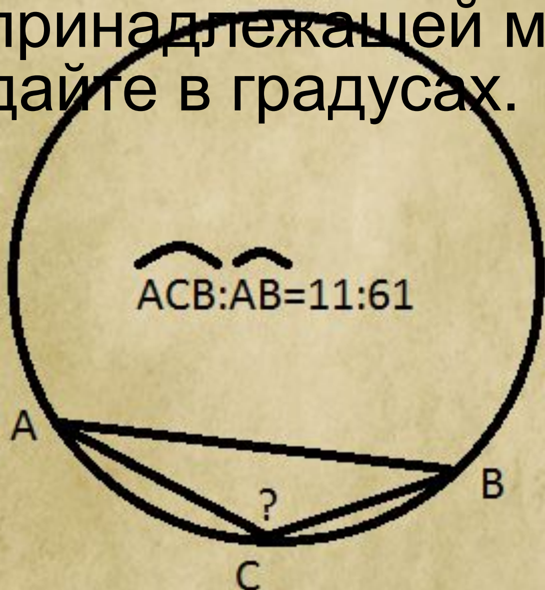
- Хорда *AB* делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 11:61. Под каким углом видна эта хорда из точки *C*, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Решение

Задача

- Хорда *AB* делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 11:61. Под каким углом видна эта хорда из точки *C*, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



- Так как дуги ACB, AB относятся друг другу как 11:61, то пусть дуга ACB=11x градусов, а дуга AB=61x градусов.

Тогда, поскольку вся окружность составляет 360° , то

11x+61x=360

72x=360

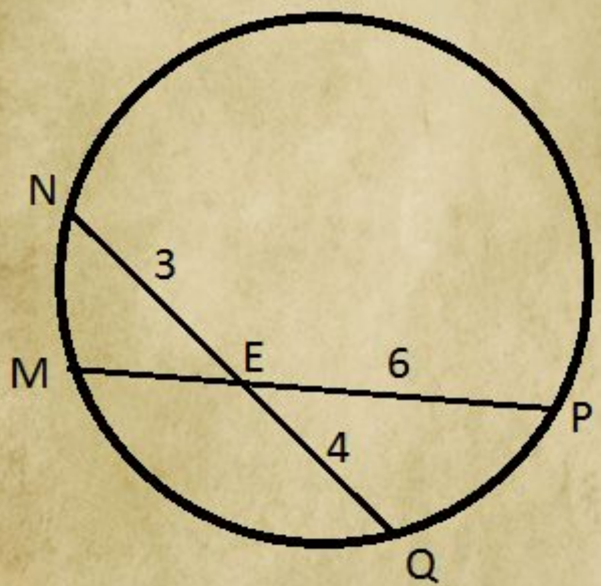
X=5

Тогда на большую дугу AB приходится 61*5°=305°.

А угол ABC, что мы ищем – вписанный, опирающийся на дугу AB , равную 305˚. Значит он равен половине ее градусной меры, то есть 152,5°.

Задача

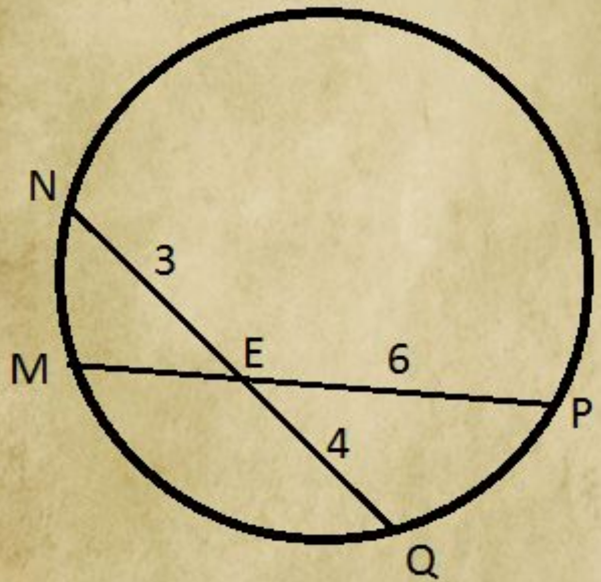
- Найти длину отрезка МЕ:



[Решение](#)

Задача

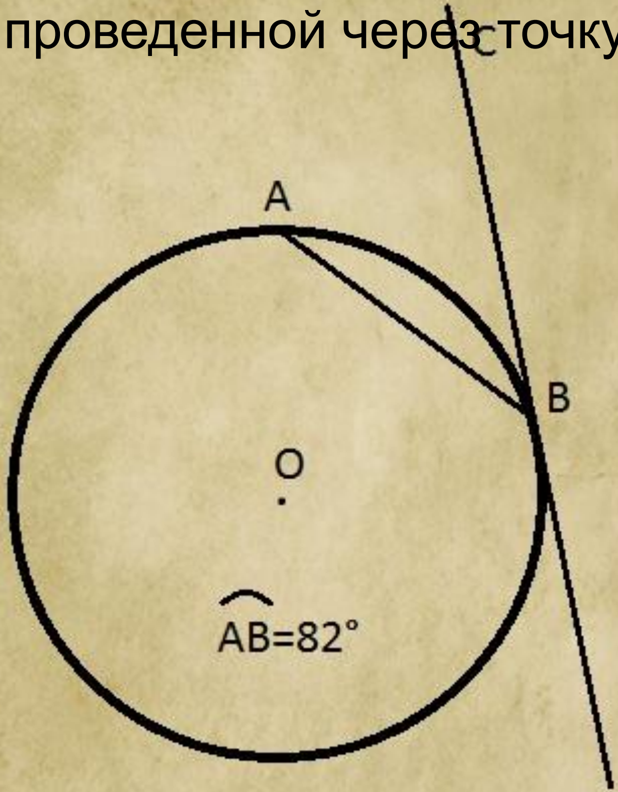
- Найти длину отрезка ME:



По свойству пересекающихся хорд ME*EP = NE *EQ
3*4 = ME*6
Ответ: 2.

Задача

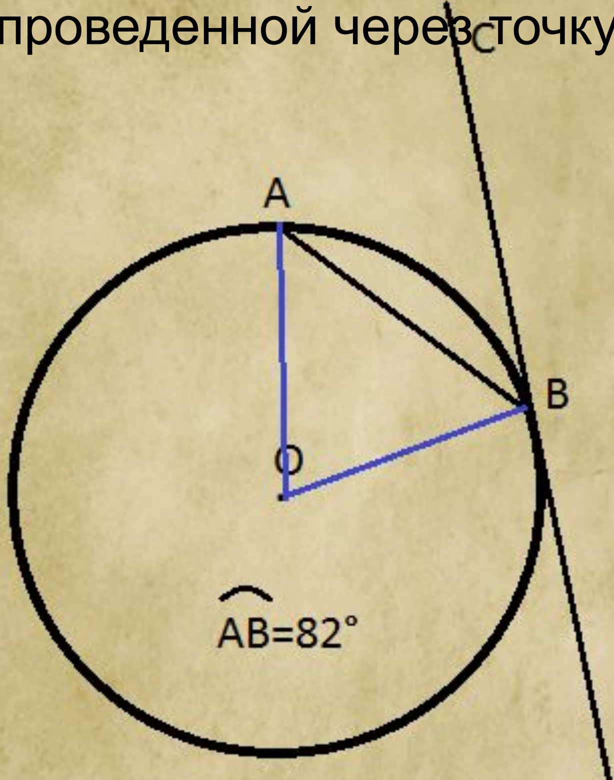
- Хорда *AB* стягивает дугу окружности в 82˚. Найдите угол *ABC* между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку *B*. Ответ дайте в градусах.



Решение

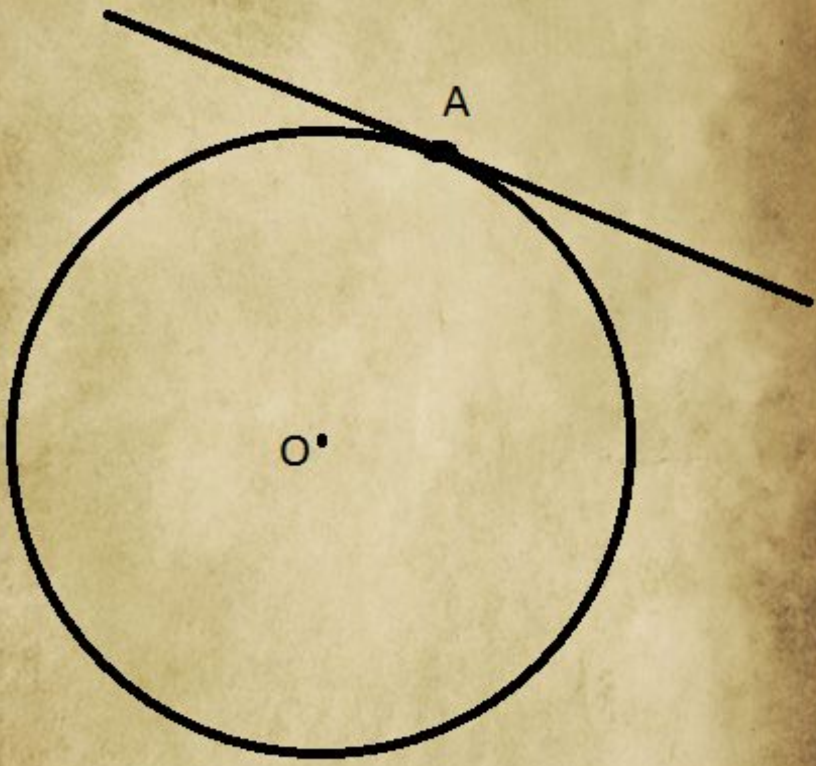
Задача

- Хорда *АВ* стягивает дугу окружности в 82˚. Найдите угол *АВС* между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку *В*. Ответ дайте в градусах.



- Проведем радиус в точку касания . По свойству радиуса, проведенного в точку касания ОВ ⊥ ВС
- Далее, ∆АОВ – равнобедренный (ОА=ОВ=R).
- ∠ОАВ= ∠ОВА=(180° -82°)/2 =49°
- А значит, ∠СВА=90° - ∠АВО=90° -49° =41°

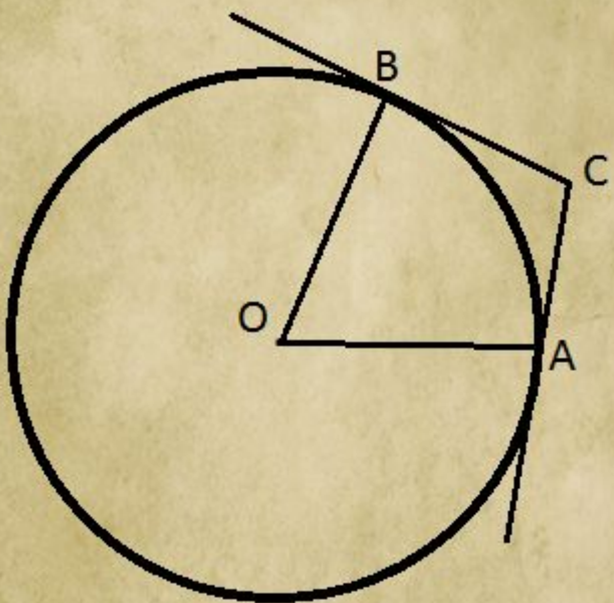
Касательная к окружности



- Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью и лежащая с ней в одной плоскости, называется касательной к окружности.

Пример

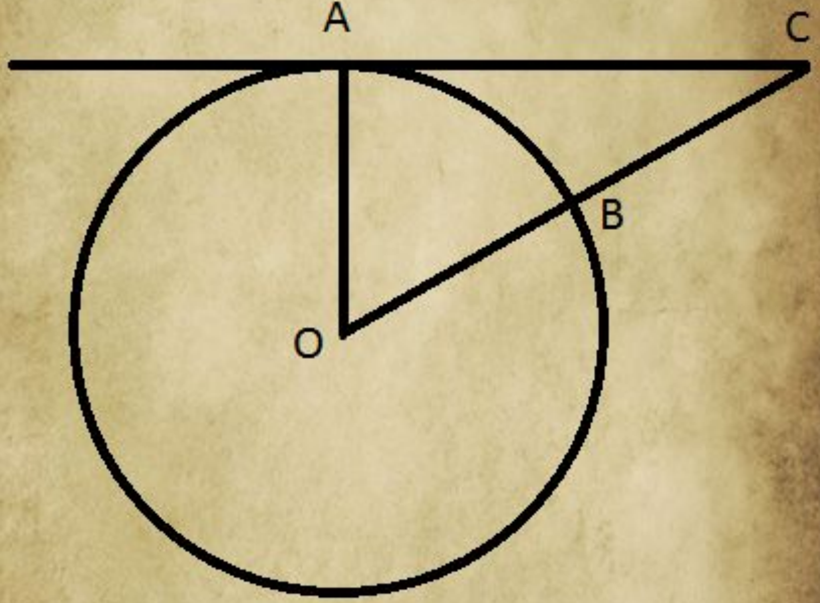
- Через концы *A* и *B* дуги окружности в 62^0 проведены касательные *AC* и*BC*. Найдите угол *ACB*. Ответ дайте в градусах.



Так как BC и AC касательные, то по свойству касательной: $\angle OBC = \angle OAC = 90^0$
Известно, что сумма углов в четырёхугольнике равна 360^0.
В четырёхугольнике OACB нам известны три угла, можем найти четвёртый:
$\angle OBC + \angle OAC + \angle ACB + \angle AOB = 360^0$

Задача

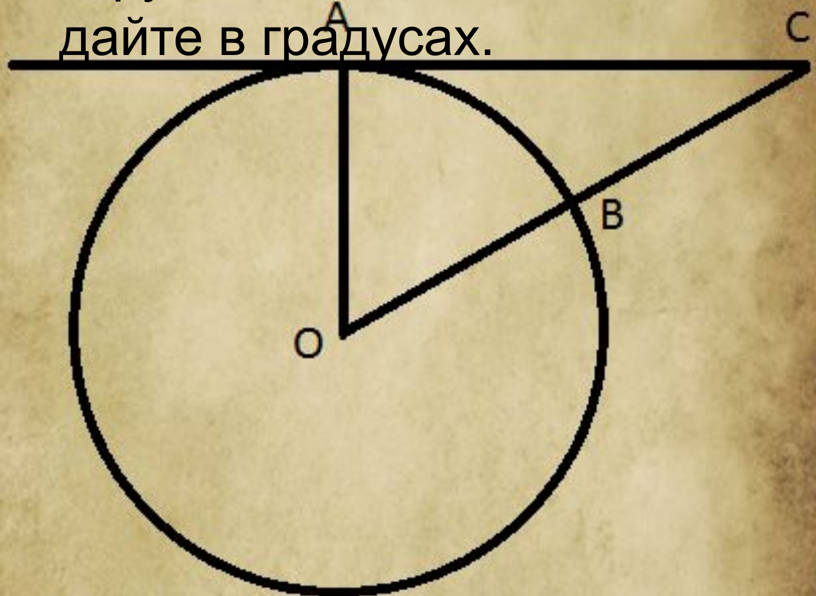
- Найдите угол *ACO*, если его сторона *CA* касается окружности, *O* — центр окружности, а меньшая дуга окружности *AB*, заключенная внутри этого угла, равна 67˚. Ответ дайте в градусах.



[Решение](#)

Задача

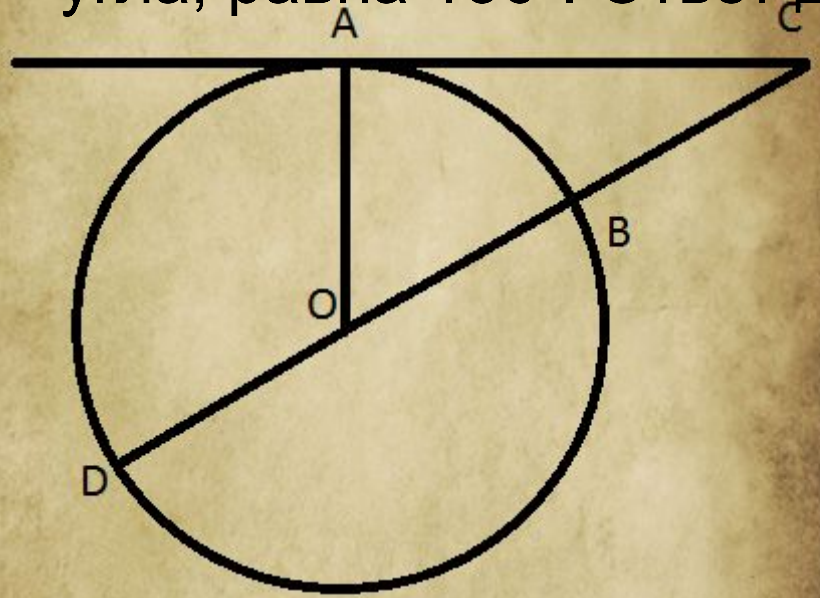
- Найдите угол *ACO*, если его сторона *CA* касается окружности, *O* — центр окружности, а меньшая дуга окружности *AB*, заключенная внутри этого угла, равна 67˚. Ответ дайте в градусах.



Раз дуга AB, заключенная внутри угла C, равна 67˚, то центральный угол AOB, на нее опирающийся, равен также 67˚.
А поскольку OAC=90˚ (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен

Задача

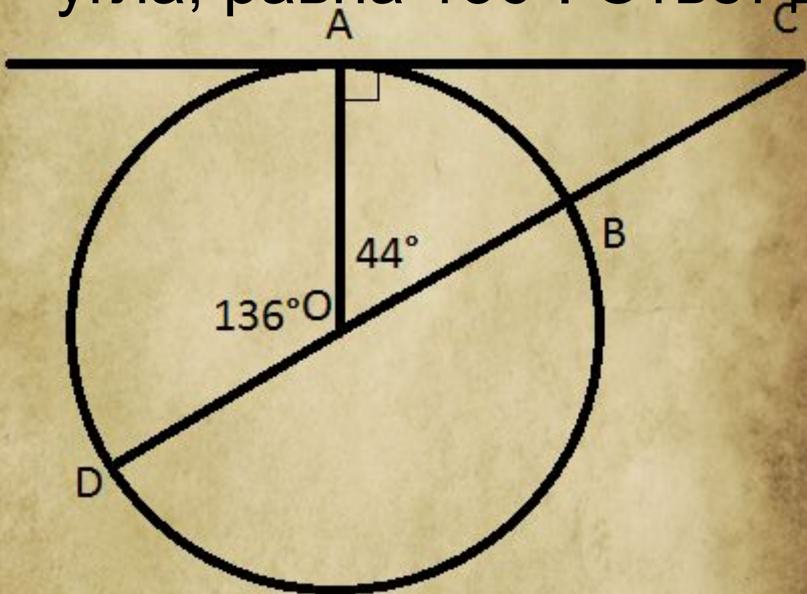
- Найдите угол *ACO*, если его сторона *CA* касается окружности, *O* — центр окружности, а большая дуга *AD* окружности, заключенная внутри этого угла, равна 136˚. Ответ дайте в градусах.



Решение

Задача

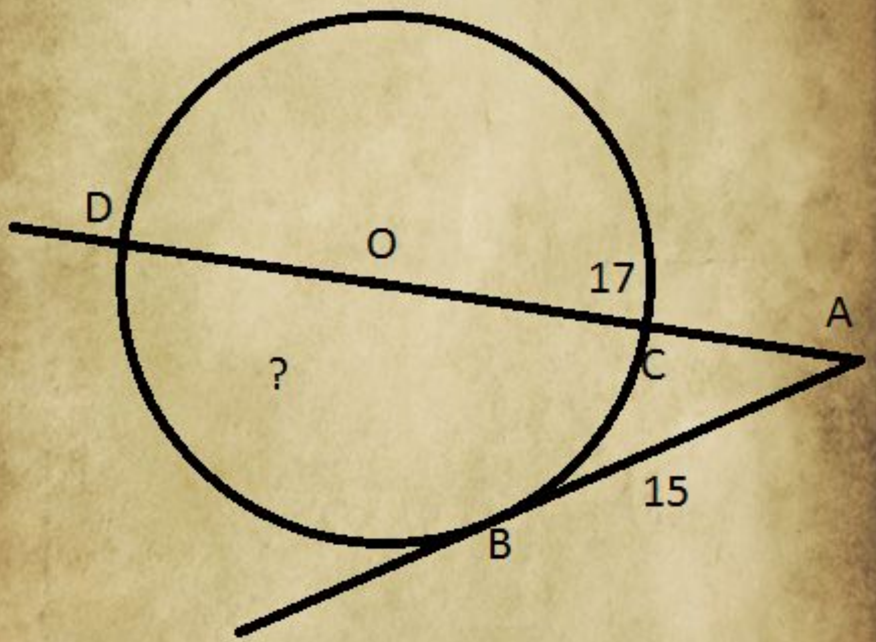
- Найдите угол *ACO*, если его сторона *CA* касается окружности, *O* — центр окружности, а большая дуга *AD* окружности, заключенная внутри этого угла, равна 136˚. Ответ дайте в градусах.



- Центральный угол AOD, как опирающийся на дугу AD, равен 136˚.
- Тогда смежный ему угол AOB равен 44˚.
- Далее задача

Задача

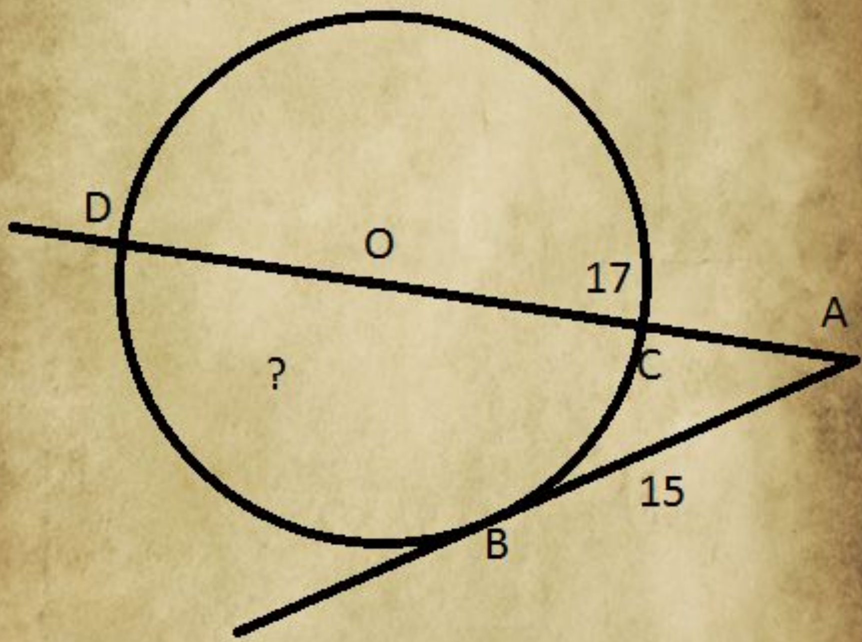
- К окружности с центром в точке О проведены касательная АВ и секущая АО. Найдите радиус окружности, если АВ=15, АО=17.



[Решение](#)

Задача

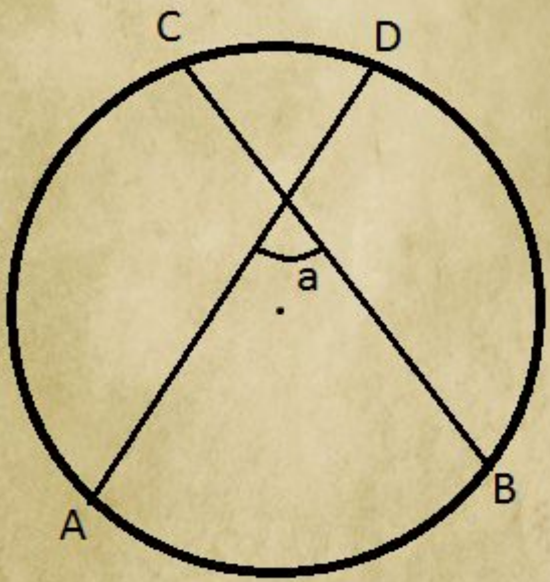
- К окружности с центром в точке О проведены касательная АВ и секущая АО. Найдите радиус окружности, если АВ=15, АО=17.



- По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности
- $AB^2 = AC*AD$
- $15^2 = (17-R)(17+R)$, где R=OC=OD
- $R^2 = 17^2 - 15^2$
- $R^2 = (17-15)(17+15)$
- $R^2 = 64$
- R=8
- Ответ:8

Дополнительные Свойства, используемые для решения задач.

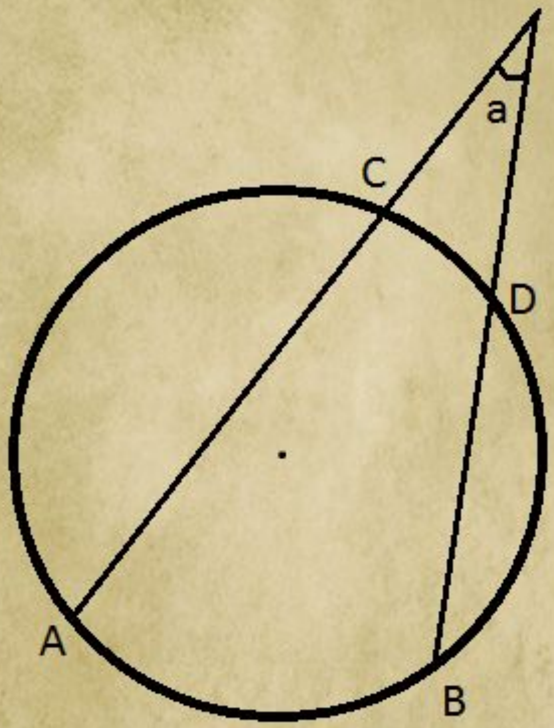
Свойство первое



a=1/2(◡AB+◡CD)

Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая – между

Свойство второе

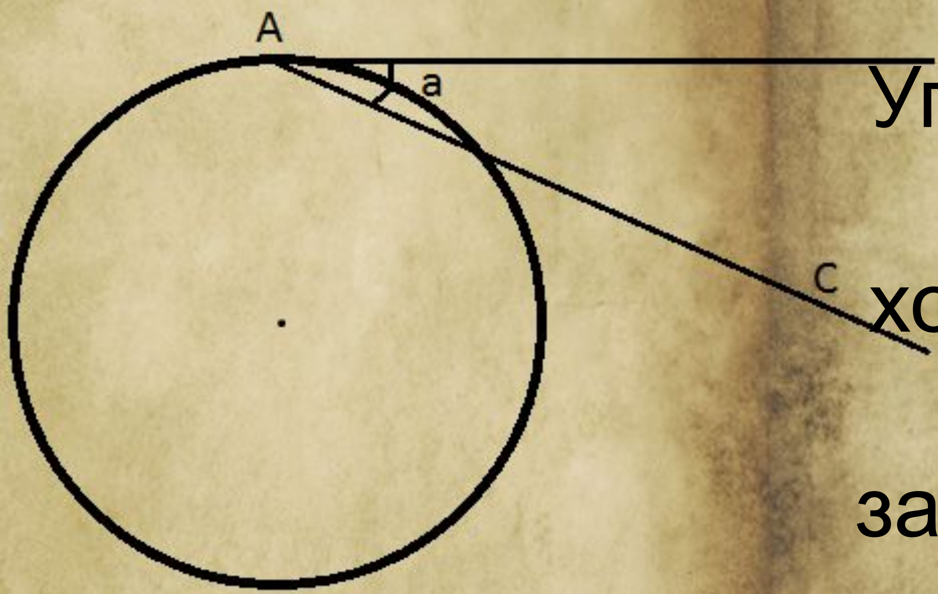


a=1/2(◡AB-◡CD)

Угол, вершина которого лежит вне круга, измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами.

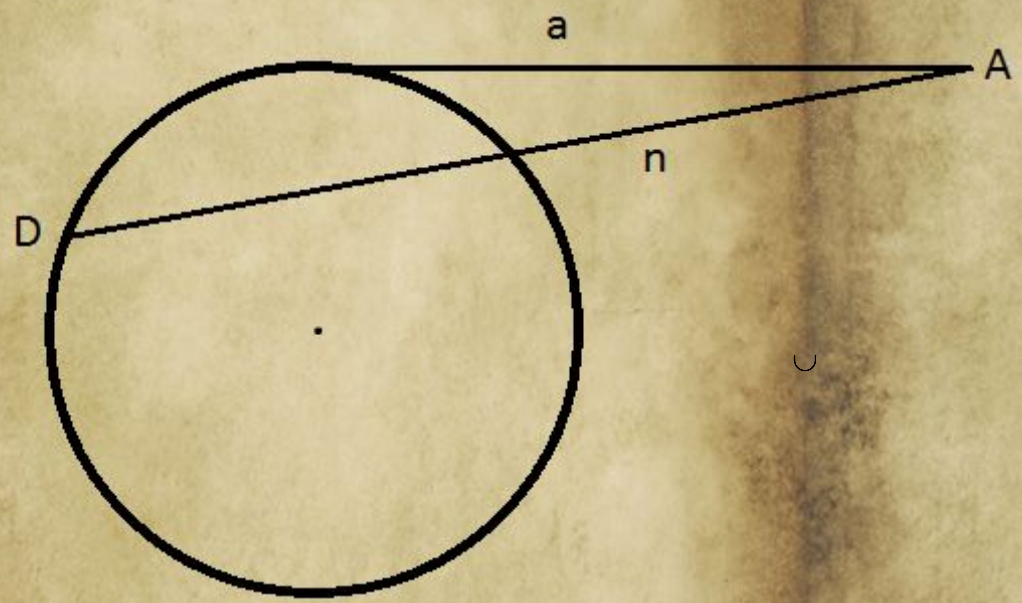
Свойство третье

a=1/2◡AC



Угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри его.

Свойство четвертое



$a^2 = AD * n$

Теорема о касательной и секущей

Теорема первая

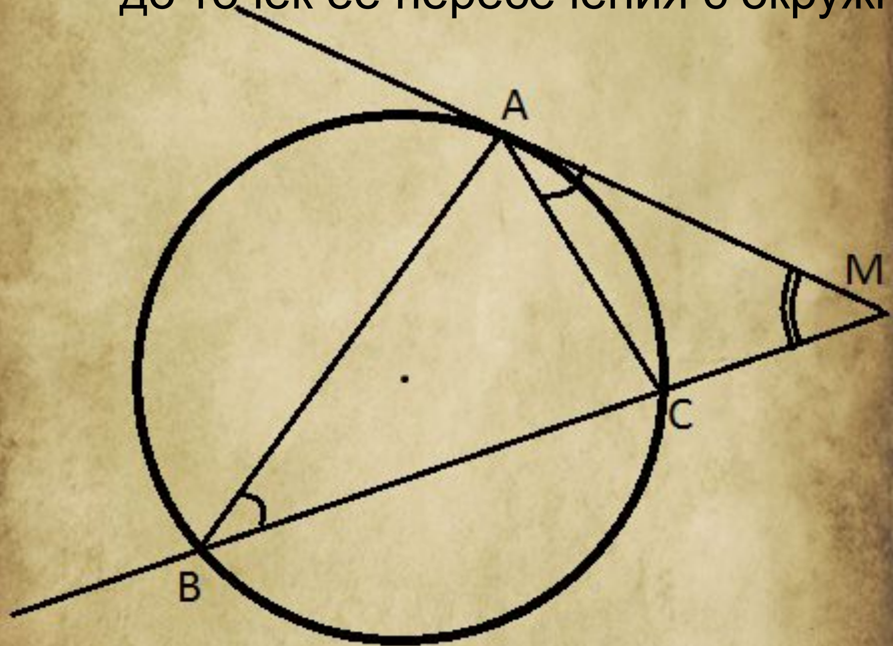
- Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине угловой величины дуги, заключенной между его сторонами.

Доказательство

Рассмотрим угол NAB, образованный касательной NA и хордой AB.
Проведем диаметр AC. Касательная перпендикулярна диаметру, проведенному в точке касания, следовательно, угол (CAN)=90°
Известно, что вписанный угол равен половине центрального угла дуги, на которую он опирается. Отсюда имеем, что угол(BAC) равен половине угловой величины дуги BC или половине угла(BOC).
угол(BAC)=угол(BOC)/2.
угол(NAB)=90°-угол(BAC), отсюда получаем угол(NAB)=90°-угол(BOC)/2=(180°-угол (BOC))/2=угол(AOB)/2
то есть равен половине угловой величины дуги BA.
Фактически, это вырожденный случай

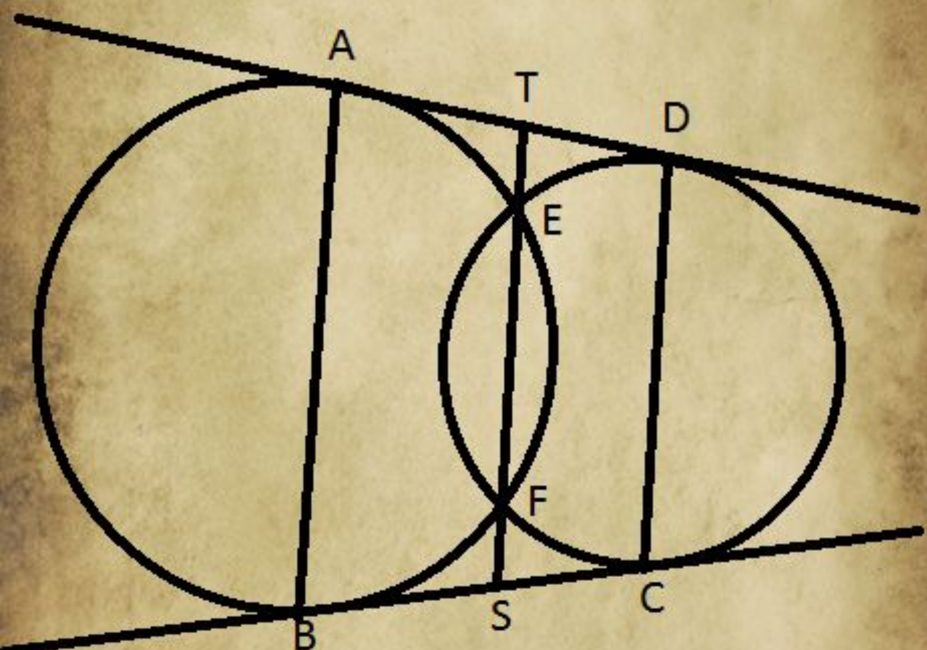
Теорема вторая

- Если из внешней точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от данной точки до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от данной точки до точек её пересечения с окружностью.



- На рисунке, где MA - касательная, а MCB - секущая, эта теорема выглядит так: $MA^2=MB*MC$. Докажем это. По предыдущей теореме угол MAC равен половине угловой величины дуги AC. Но вписанный угол ABC тоже опирается на дугу AC, и по теореме о величине вписанного угла равен половине угловой величины дуги AC. Оба угла равны половине угловой величины дуги AC, следовательно, эти углы равны между собой. угол (MAC)= угол(ABC). Принимая во внимание то, что у треугольников AMC и

Задача



- Пусть E и F - общие точки двух неравных пересекающихся окружностей, AD и BC - общие внешние касательные этих окружностей (A, B, C и D - точки касания, первые две - на одной окружности, остальные - на второй).
- Пусть T - пересечение прямых AD и EF, а S - пересечение BC и EF.