Решение геометрических задач при подготовке к ОГЭ

«Лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач - одним»

ПОЙА

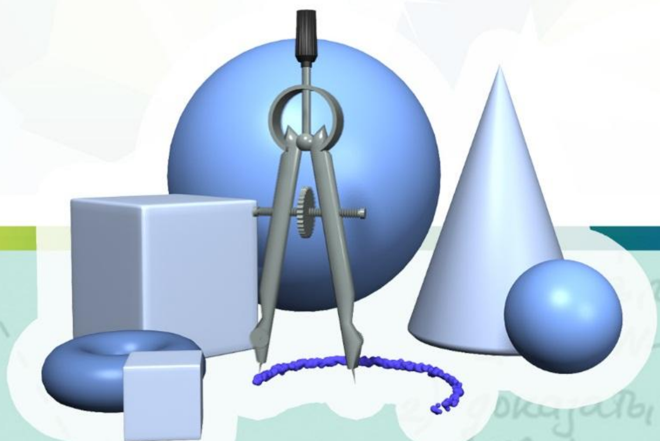
Геометрия – это не просто наука о свойствах геометрических фигур. Геометрия – это целый мир, который окружает нас с самого рождения. Ведь все, что мы видим вокруг, так или иначе относится к геометрии, ничто не ускользает от ее внимательного взгляда. Геометрия помогает человеку идти по миру с широко открытыми глазами, учит внимательно смотреть вокруг и видеть красоту обычных вещей, смотреть и думать, думать и делать выводы.

В качестве эпиграфа своего выступления я взяла слова известного математика Пойа:

«Лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач – одним»

И это не случайно. Я хочу показать, что при подготовке к экзаменам, необходимо отрабатывать умения решать задачи именно так как сказал великий математик, т.е. решать задачи несколькими способами.

Начну с решения задачи из первой части.

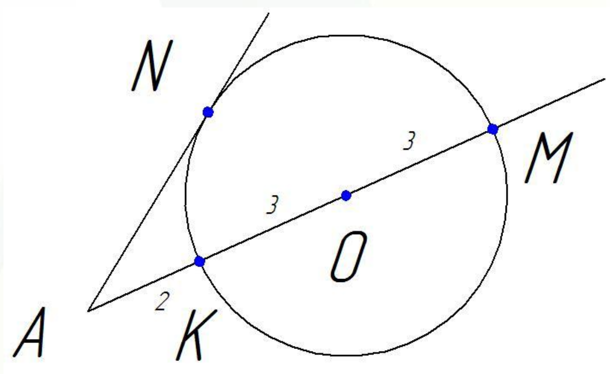


Задача 1.

Найдите длину отрезка AN, если радиус изображенной на рисунке окружности $OK = 3$, $AK = 2$.

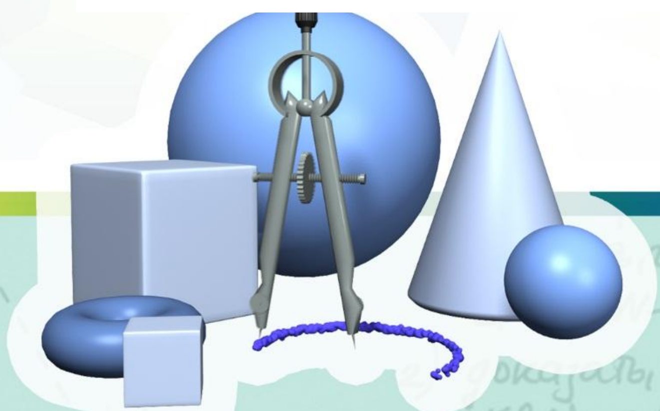
Решение.

1 способ. AN – касательная к окружности, AM – секущая. Если

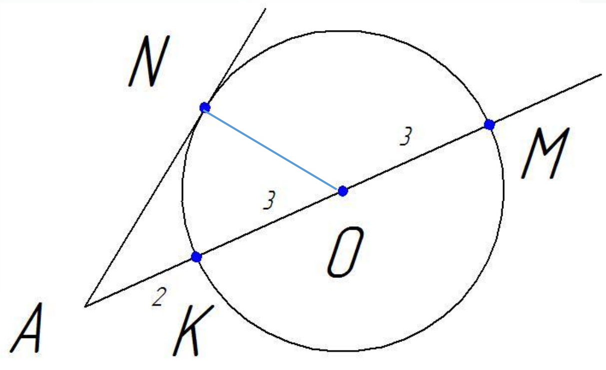


из точки A к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки A до точки касания равен произведению отрезков секущей от точки A до точек пересечения секущей с окружностью. $AN^2 = AK \cdot AM = 2 \cdot 8 = 16$

$AN = 4.$



2 способ



Проведем радиус *ON*. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Значит, $\triangle ANO$ – прямоугольный.

AO = 5, *NO* = 3. По теореме Пифагора

$$AN = \sqrt{AO^2 - NO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\sin A = \frac{3}{5}$$

3 способ

По основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AN}{AO} = \cos A \Rightarrow AN = AO \cdot \cos A = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

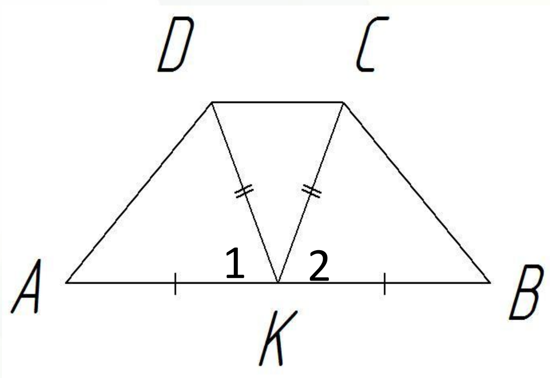
Задачи из второй части экзаменационной работы

Задача 2.

В трапеции *ABCD* точка *K* – середина основания *AB*. Известно, что *CK* = *KD*. Докажите, что трапеция равнобедренная.

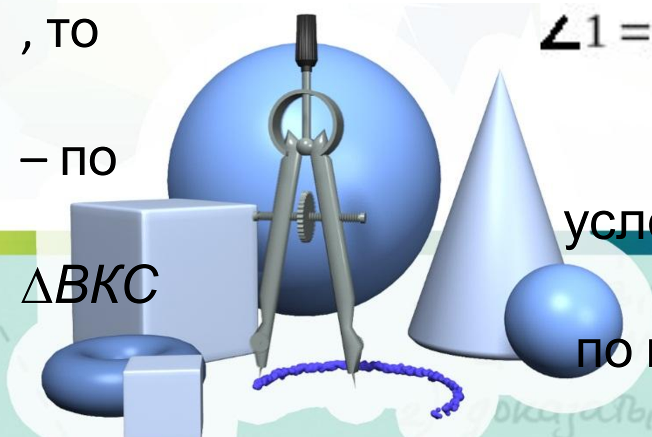
Решение.

1 способ.



Т. к. *CK* = *KD*, то ΔCKD – равнобедренный, а в равнобедренном треугольнике углы при основании равны $\Rightarrow$ $\angle KDC = \angle KCD$.

$\angle 1 = \angle KDC$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых *DC* и *AB* секущей *DK*, $\angle 2 = \angle KCD$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых *DC* и *AB* секущей *CK*. $\angle KDC = \angle KCD$, то $\angle 1 = \angle 2$

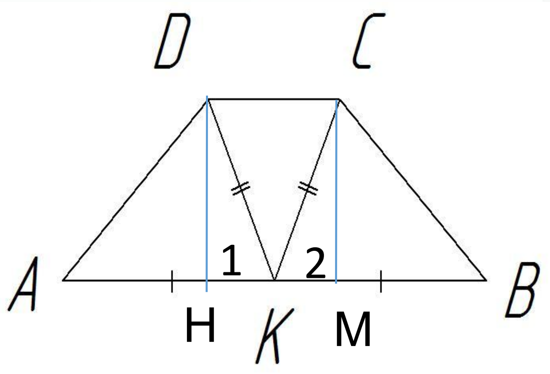


. Р $\angle 1 = \angle 2$ им ΔAKD и ΔBKC. *AK* = *KB*, *DK* = *CK* – по условию, – по доказанному, то ΔAKD = ΔBKC по первому признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников следует, что *AD*= *CB* ,

следовательно, трапеция *ABCD*

2 способ



Проведем высоты *DH* и *CM*. $\Delta DKH = \Delta CKM$ по гипотенузе и катету (*DH = CM* как расстояния между параллельными прямыми, *DК = СК* – по условию) $\Longrightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$

(Дальше как в первом способе).

3 способ

Из равенства ΔDKH и ΔCKM следует, что *HK = KM*.

$$\left.\begin{array}{l} AK - HK = AH \\ KB - KM = MB \end{array}\right| \Rightarrow AH = MB$$

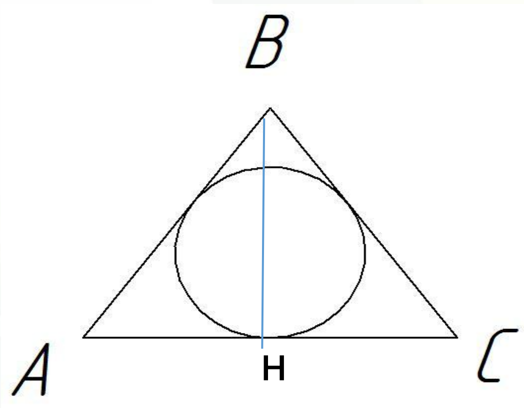
Значит, прямоугольные треугольники *ADH* и *BCM* равны по двум катетам (*DH = CM* как расстояния между параллельными прямыми, *AH = MB* по доказанному). Из равенства треугольников следует, что *AD= CB* трапеция *ABCD* – равнобедренная.

Задача 3

В равнобедренном треугольнике *ABC* стороны *AB* = *BC* = 10, $\cos ABC = \frac{7}{25}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

1 способ.



По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$

$$AC^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{7}{25}$$

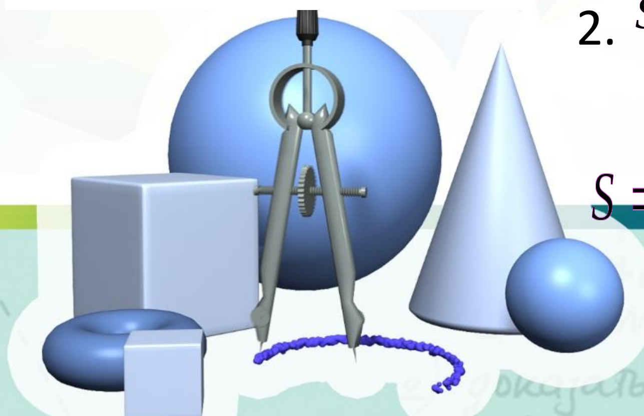
$$AC^2 = 144 \qquad AC = 12$$

Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти с помощью формулы $r = \frac{S}{p}$.

Площадь данного треугольника можно найти следующими способами: 1. $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

2. $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$ 3. $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$

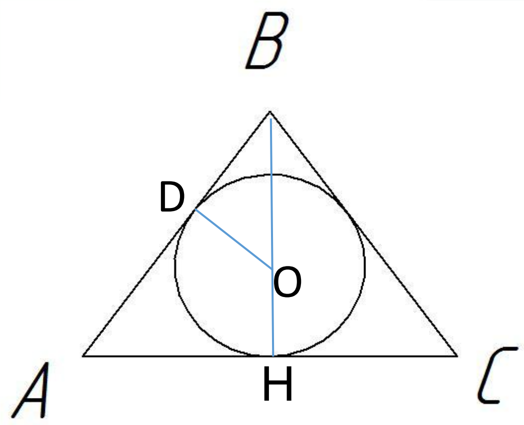
$$p = \frac{1}{2}(10 + 10 + 12) = 16$$



$$S = \sqrt{16(16 - 10)(16 - 10)(16 - 12)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$$

Значит, $r = \frac{48}{16} = 3$

2 способ



Мы знаем, что центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения его биссектрис. Проведем биссектрису *BH*. Т. к. в равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают, то биссектриса *BH* будет и медианой, и высотой.

$$AH = HC = \frac{1}{2}AC = 6$$

Из ΔABH по теореме Пифагора

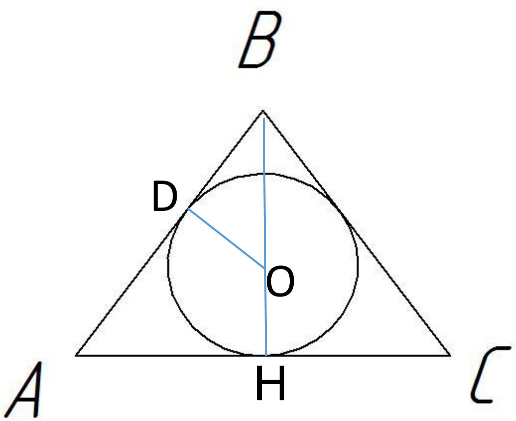
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

Проведем радиус *OD* в точку касания. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Прямоугольные треугольники *ABH* и *OBD* подобны по двум углам (угол *ABH* – общий, углы *H* и *D* равны как прямые). В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны.

Пусть *OH*= *x*, тогда *BO* = 8 – *x*.

$$\frac{BO}{AB} = \frac{OD}{AH} \Rightarrow \frac{8 - x}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow 10x = 6(8 - x) \Rightarrow$$ *x* = 3. Значит, радиус *HO* = 3.

3 способ



Начало такое же, как во 2-м способе. Только рассмотрим не подобные треугольники, а прямоугольный треугольник *OBD*.

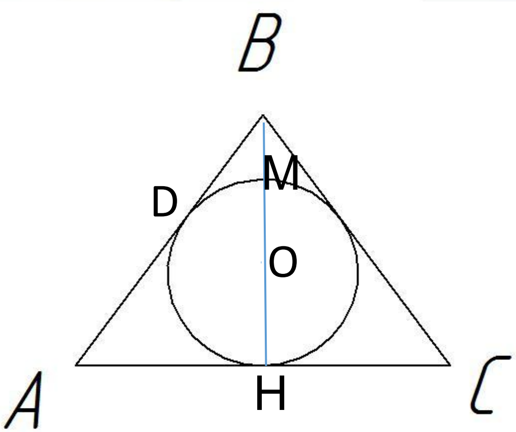
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Значит, *AD* = *AH* = 6. *BD* = 10 – 6 = 4.

Пусть *OH* = *OD* = *x*, тогда *BO* = 8 – *x*. По теореме Пифагора имеем уравнение:

$$(8-x)^2 = 16 + x^2$$
$$64 - 16x + x^2 = 16 + x^2$$
$$16x = 48$$
$$x = 3$$

Значит, радиус *HO* = 3.

4 способ



Проведем *BH* (не будем проводить *OD*, но точку касания *D* обозначим). Из второго способа $AH = HC = \frac{1}{2}AC = 6$

Из ΔABH по теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$

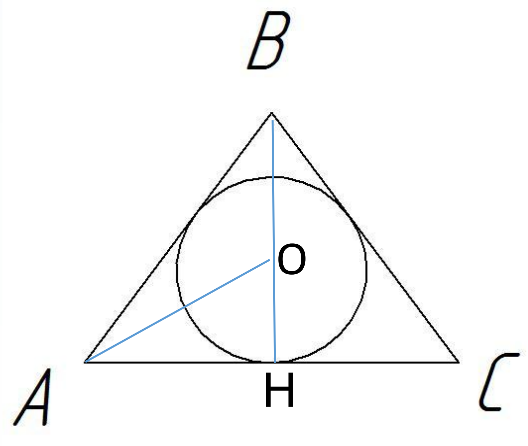
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Значит, *AD* = *AH* = 6. *BD* = 10 – 6 = 4.

По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BM \cdot BH$

16 = *BM* · 8, *BM* = 2

MH = 2*r* = 8 – 2 = 6 $\Rightarrow$ *r* = 3. Значит, радиус *HO* = 3.

5 способ

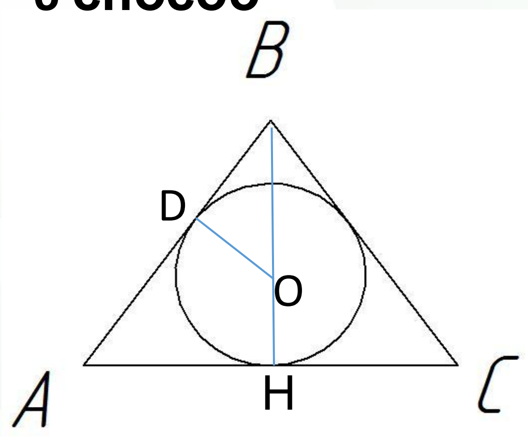


Проведем *BH* и *AO*. Т.к. центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис, то *AO* – биссектриса угла *A*, а значит, и биссектриса треугольника *ABH*. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$\frac{BO}{AB} = \frac{OH}{AH}$ Пусть *OH* = *x*, тогда *BO* = 8 – *x*. $\frac{8-x}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow$

16*x* = 48, *x* = 3. Значит, радиус *HO* = 3.

6 способ



Из ΔABH: $tg\alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \Rightarrow$ *BD* = 4.

Из ΔOBD: $tg\alpha = \frac{OD}{BD} \Rightarrow \frac{OD}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ *OD* = 3.

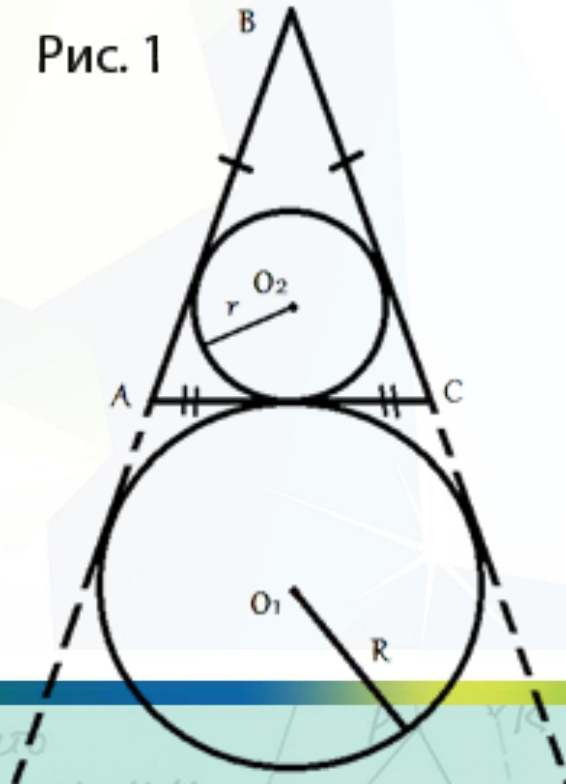
Значит, радиус *HO* = 3

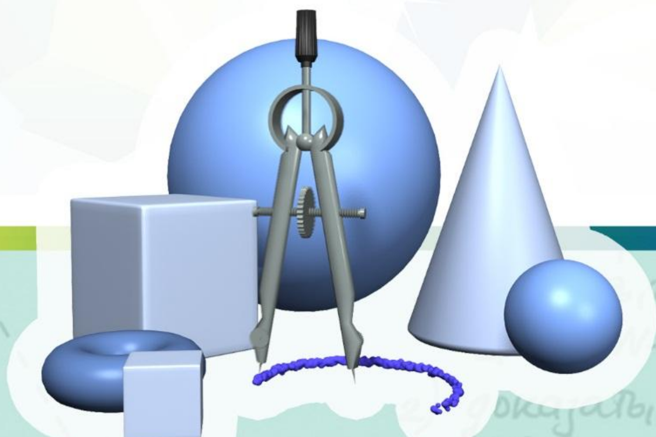
Ответ: радиус вписанной окружности равен 3.

Задача 4.

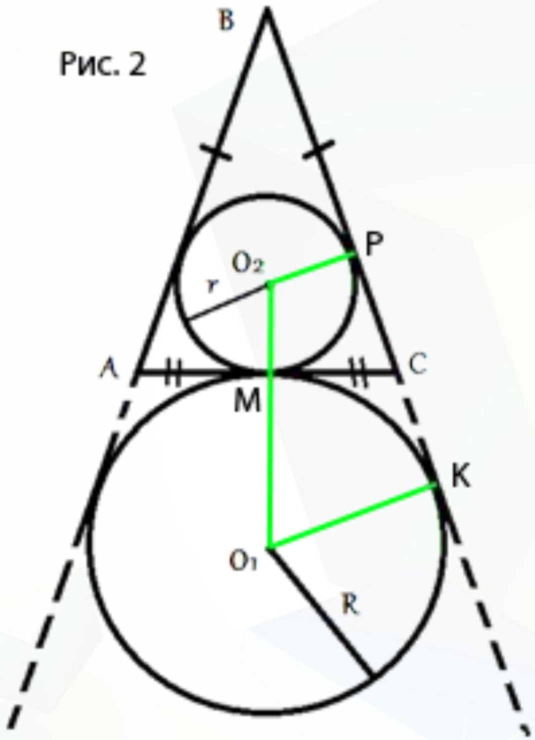
Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Рис. 1

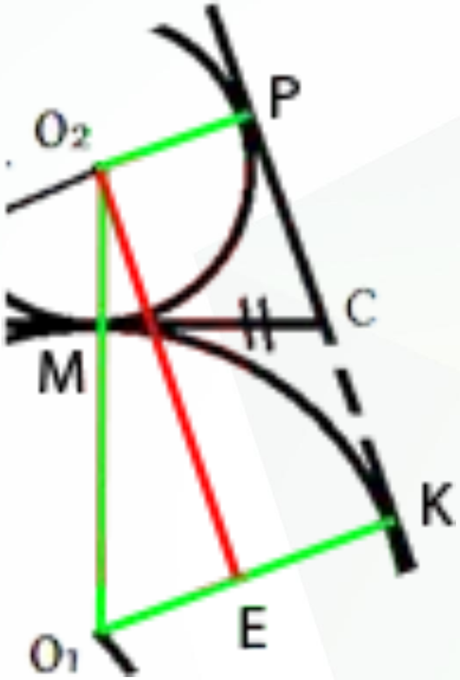




Решение.
1 способ.



Проведем следующие отрезки (как показано на рисунке 2): 1) Из точки O_2 к точке касания окружности и продолжения стороны ВС. (точка Р) 2) Из точки O_1 к точке касания окружности и продолжения стороны ВС. (Точка К) 3) Из точки О1 к точке О2. Заметим, что: 1) СМ=АС/2, 2) СР=СМ, 3) СМ=СК, 4) O_1O_2=R+r, 5) O_2P перпендикулярна ВС, п6) О1К тоже перпендикулярна ВС, 7) Из пунктов 2) и 3) следует, что СР=СК=СМ=АС/2. Тогда РК=АС/2+АС/2=АС. Следовательно, O_2P || O_1K (по свойству параллельных прямых). Отсюда следует, что O_1O_2PK - прямоугольная трапеция (по определению трапеции).



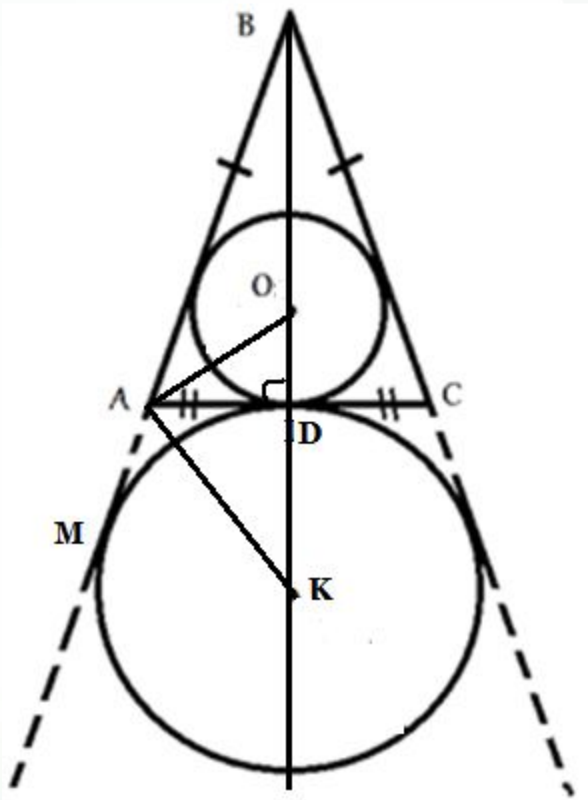
Рассмотрим эту трапецию. Проведем отрезок O_2E параллельный РК, а раз он параллелен РК, то в свою очередь перпендикулярен O_1K и равен ему. Следовательно получившийся треугольник O_1O_2E - прямоугольный. Тогда, по теореме Пифагора, мы можем записать: $(O_1O_2)^2=(O_2E)^2+(O_1E)^2$. Подставим известные нам данные, полученные ранее: $(R+r)^2=AC^2+(R-r)^2$. Раскрываем скобки, получаем: $R^2+2Rr+r^2=AC^2+R^2-2Rr+r^2$

$2Rr=AC^2-2Rr$, $4Rr=AC^2$, $r=AC^2/4R$, $r=12^2/4*8$

$r=144/4*8$, $r=4,5$

Ответ: радиус вписанной окружности равен 4,5.

2 способ



1) O – центр вписанной окружности, AO и BD – биссектрисы углов A и B
2) Т.к. △ ABC по условию равнобедренный, то биссектриса BD – медиана и высота
3) AK - биссектриса < MAC (по свойству отрезков касательных, проведенных из т.A)
4) $$< KAO = < KAD + < OAD = \frac{1}{2} < MAD + \frac{1}{2} < BAD =$$
$$= \frac{1}{2}(< MAD + < BAD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$
5) △ OAK – прямоугольный, AD – высота

$AD^2 = OD \cdot DK$, $OD = \frac{AD^2}{DK} = \frac{6^2}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

Ответ: радиус вписанной окружности равен 4,5.

Задания на экзамене предлагаются каждый год разные. Мы не можем знать заранее, какие задачи будут на экзамене. Поэтому, чтобы ученики могли уверенно решать предложенные задачи, им надо хорошо знать теорию, т.е. определения и формулировки теорем. А решая задачу разными способами, они повторяют весь изученный теоретический материал.

Материал подготовила учитель математики МКОУ «Каменская ОШ»
Астапенко Татьяна Васильевна

РМО учителей математики, май 2017