



***«Подготовительный курс для абитуриентов  
колледжа»  
по Математике***

***Четырехугольники. Виды, свойства, формулы  
площади.***

**Автор: Зеленская О.Ю.**



*Основные понятия, виды и свойства четырехугольников.*

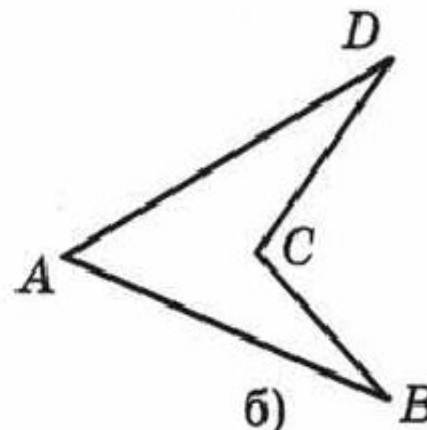
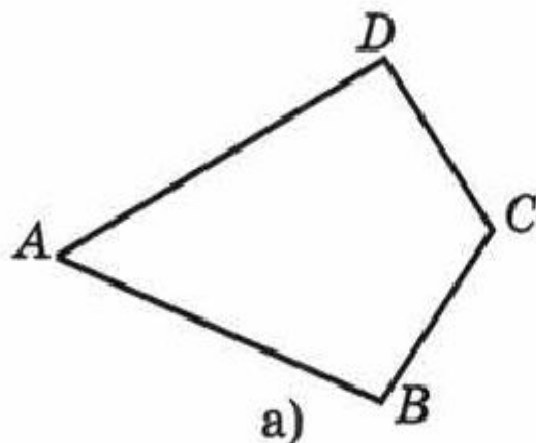


# Основные элементы 4-угольников



**Четырёхугольником** называется многоугольник с четырьмя углами.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые



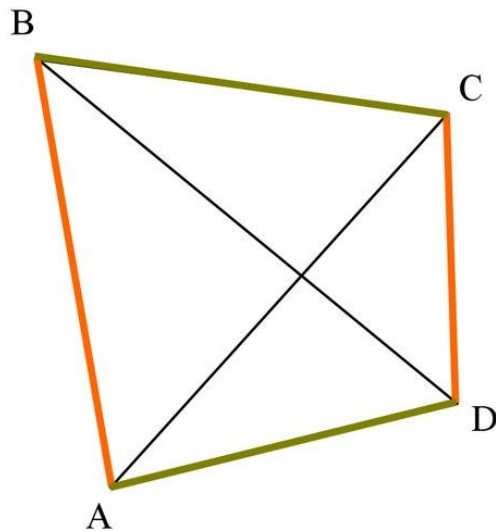
A, B, C, D - вершины четырёхугольника

A и B - соседние вершины

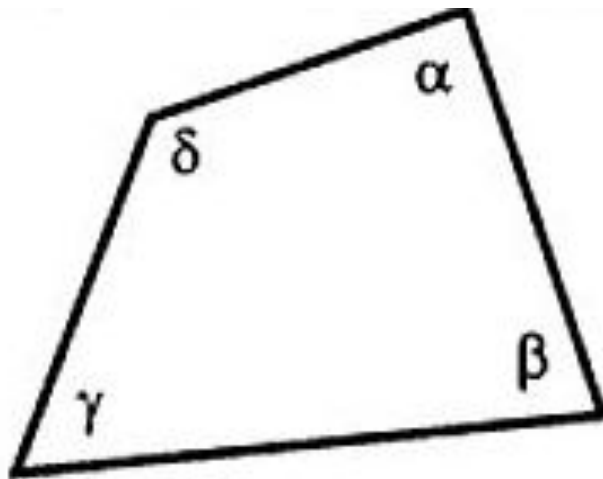
AD, BC, CD, BA - стороны многоугольника

AD и CD - смежные стороны многоугольника

# Свойства выпуклого четырехугольника



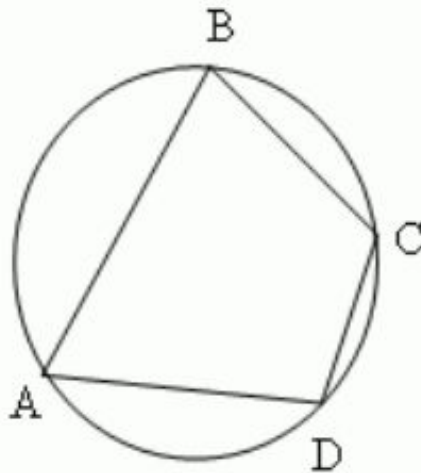
**Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются в одной точке.**



**Сумма внутренних углов равна  $360^\circ$ :**

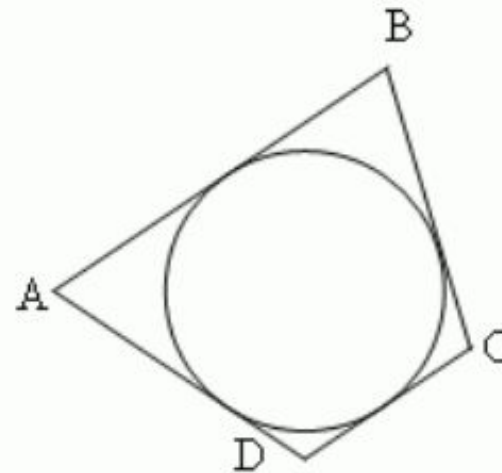
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

# Свойства выпуклого четырехугольника



В любом вписанном  
четырёхугольнике сумма  
противолежащих углов  
равна  $180^\circ$ .

$$A + C = D + B = 180^\circ.$$



В любом описанном  
четырёхугольнике суммы  
противоположных сторон  
равны.

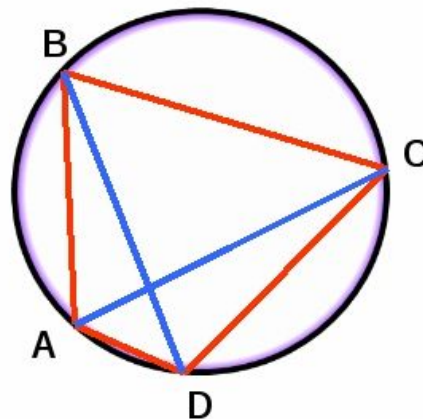
$$AB + CD = AD + BC$$

# Теорема Птолемея

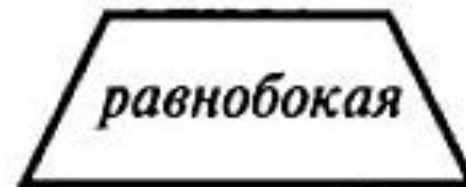
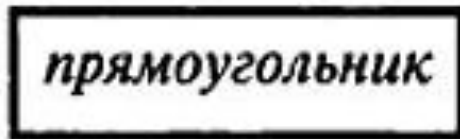
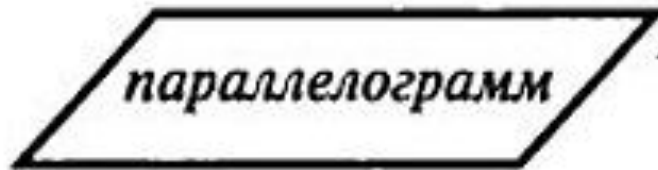
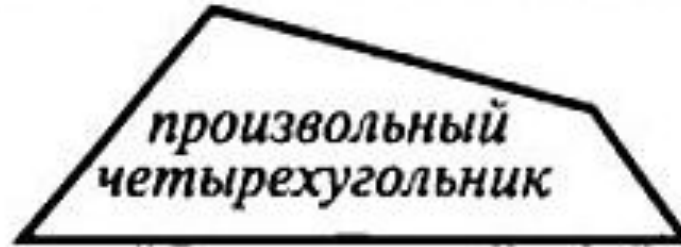


Произведение диагоналей  
вписанного в окружность  
четырехугольника равно сумме  
произведений противоположных  
сторон.

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



# Виды выпуклых 4-угольников





# Параллелограмм



**Параллелограмм** — четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны.



Противоположные стороны попарно равны.

$$a = c, b = d$$

Противоположные углы попарно равны.

$$\alpha = \gamma, \beta = \delta$$

Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$$

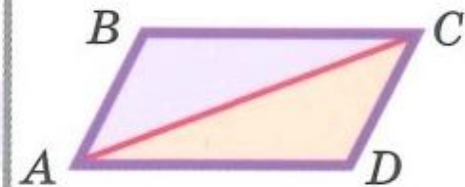
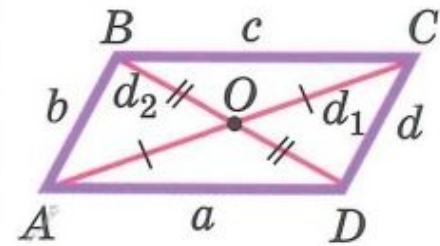
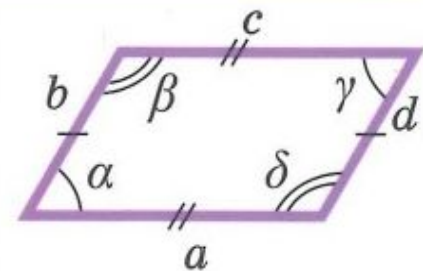
Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

$$AO = OC, BO = OD$$

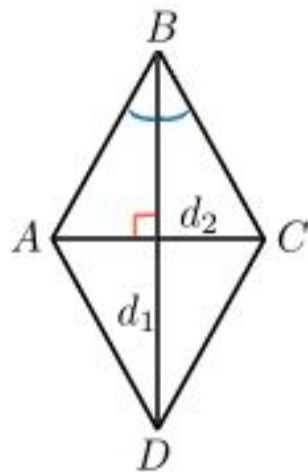
Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон.

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Каждая из диагоналей делит параллелограмм на два

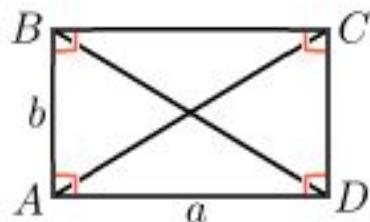






**Ромб** - это параллелограмм,  
у которого все стороны равны.

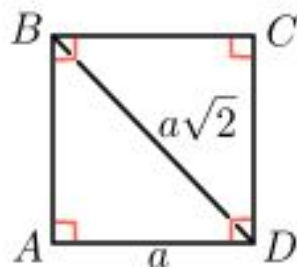
Диагонали ромба перпендикулярны и являются  
биссектрисами углов ромба.



$$AC = BD$$

**Прямоугольник** - это параллелограмм,  
у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.



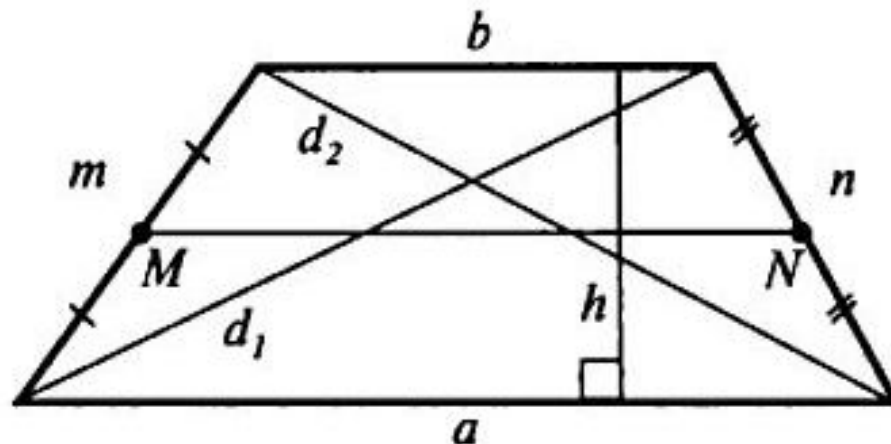
**Квадрат** - это прямоугольник,  
у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

# Трапеция



Так называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие — не параллельны (боковые стороны). Трапеция с равными боковыми сторонами называется равнобокой (равнобедренной, равнобочной).



$a, b$  — основания ( $a \parallel b$ ),  
 $m, n$  — боковые стороны,  
 $d_1, d_2$  — диагонали,

$h$  — высота (отрезок, соединяющий основания и перпендикулярный им),  
 $MN$  — средняя линия (отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

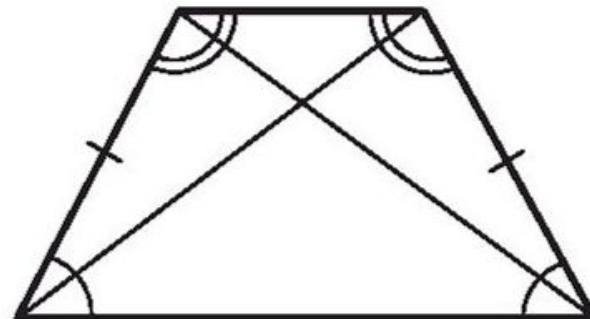
# Свойства равнобедренной трапеции



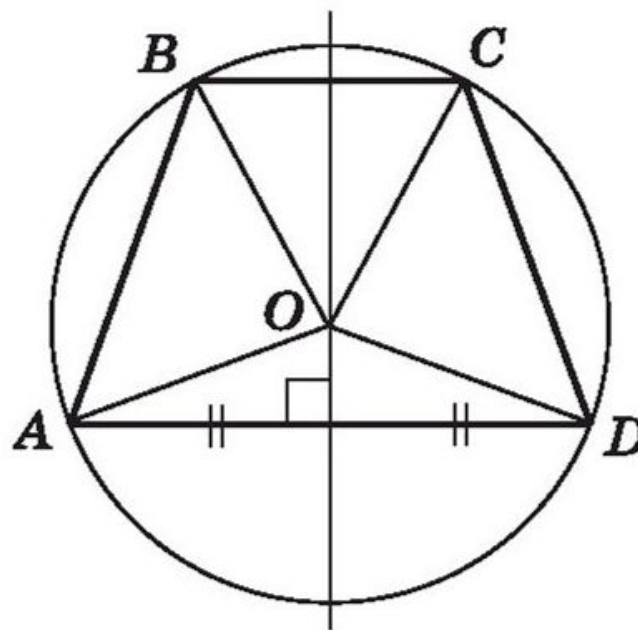
Если

1) Диагонали равны.

2) Углы при одном основании равны.



3) Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность (ее центр лежит на серединном перпендикуляре к основанию).



4) В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если средняя линия равна боковой стороне.

# Ответить на вопросы



- 1) У какой из фигур диагонали, пересекаясь, делятся пополам?
- 2) У какой из фигур диагонали равны?
- 3) У какой из фигур диагонали делят углы пополам?
- 4) У какой из фигур диагонали перпендикулярны?
- 5) У какой из фигур равны противолежащие углы?
- 6) У какой из фигур равны углы, прилежащие к одной стороне?
- 7) У какой из фигур параллельна одна пара противолежащих сторон?

# Докажите, что ABCD - параллелограмм



<p>1</p>	<p>2</p>	<p>3</p>
<p>4</p>	<p>5</p>	<p>6</p>



# Решить задачи



1. Найдите углы параллелограмма, если:

1) один из его углов равен  $46^\circ$ ;

2) сумма двух его углов равна  $186^\circ$ ;

3) один из его углов на  $56^\circ$  больше другого;

4) один из его углов в 3 раза меньше другого;

5) два угла параллелограмма относятся как  $5 : 7$ .

2. Найдите углы параллелограмма  $ABCD$  рис.

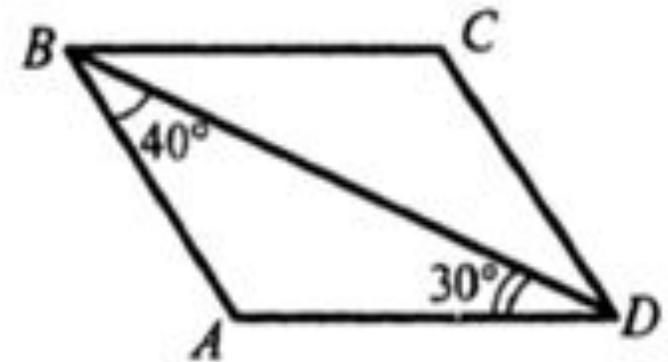
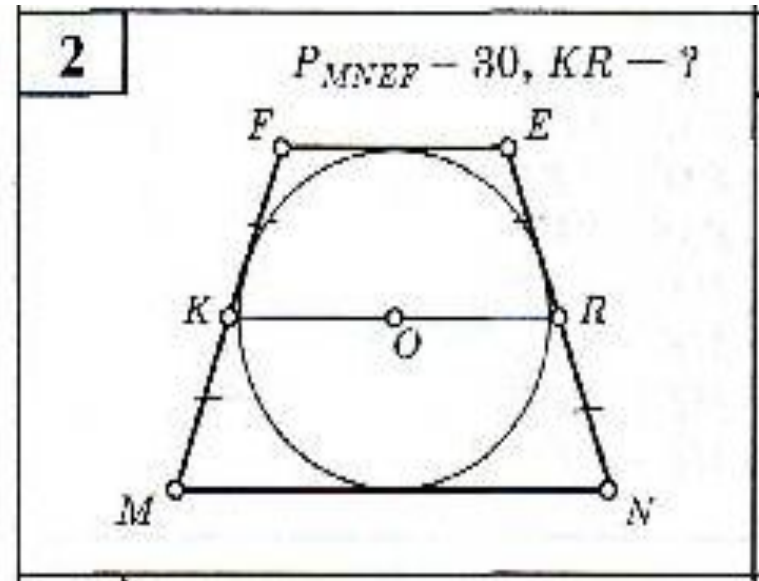
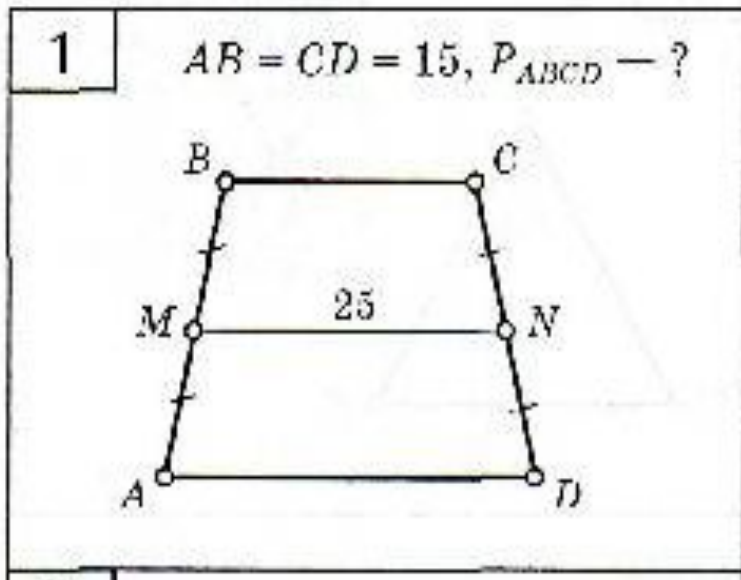


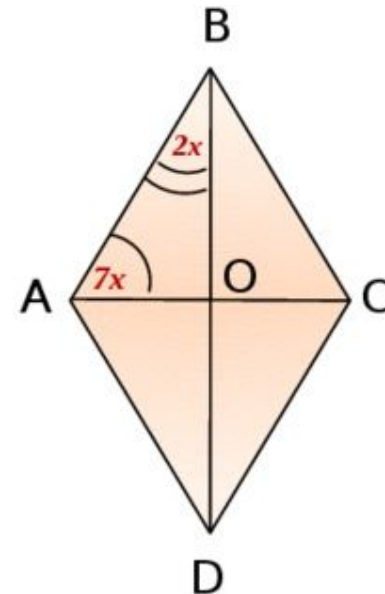
Рис.



# Решить задачи



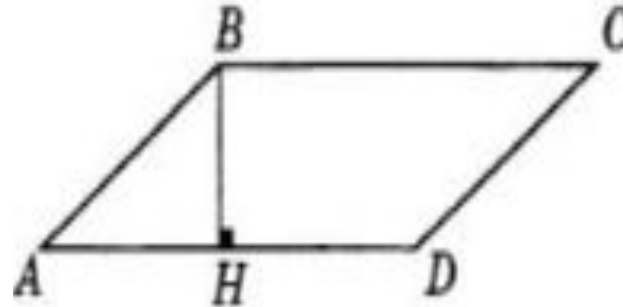
3. Углы, образуемые стороной ромба и его диагоналями, относятся как 7:2.  
Найдите больший угол ромба.



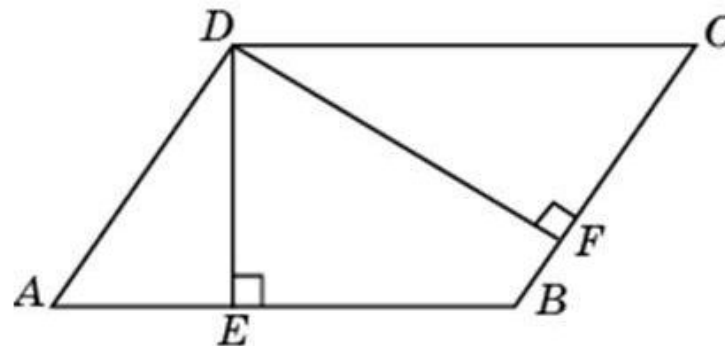
# Решить задачи



Высота  $BH$  параллелограмма  $ABCD$  отсекает от него равнобедренный треугольник. Найдите градусную меру угла  $ADC$ .



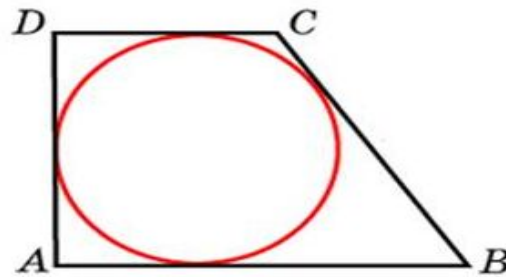
Острый угол параллелограмма равен  $60^\circ$ . Найдите угол между высотами этого параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла.



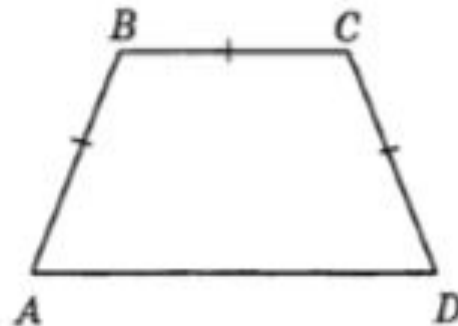


# Решить задачи

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

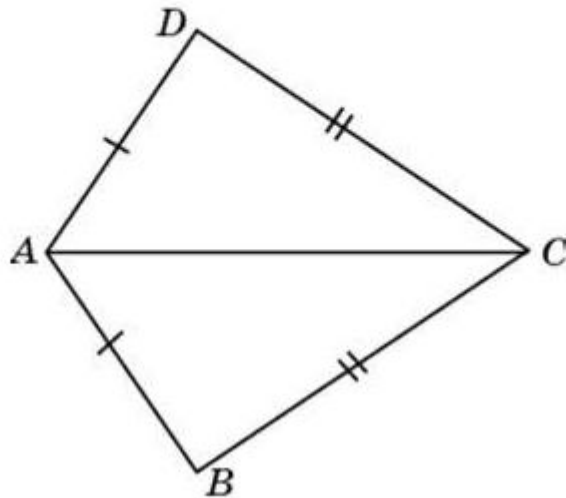


В трапеции ABCD стороны AB, BC и CD равны. Основание AD в два раза больше основания BC. Найдите угол CDA.



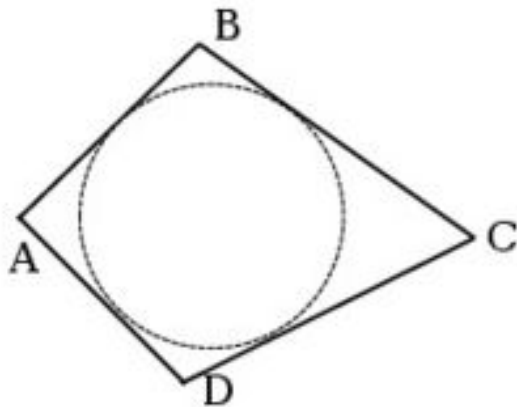


В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = AD$ ,  $BC = CD$ ,  $AB < BC$ . Докажите, что угол  $A$  больше угла  $C$ .



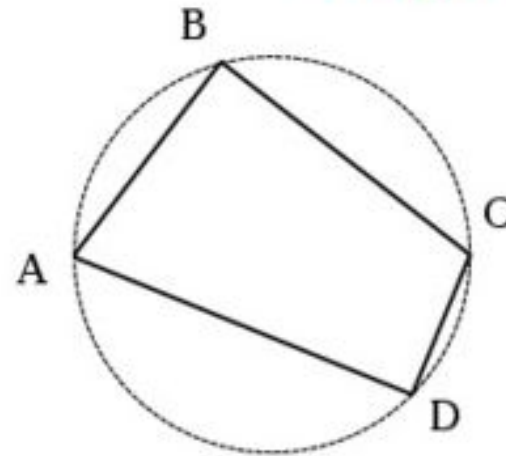


## Задача 1.



В четырёхугольнике  $ABCD$   
 $AB = 6$ ,  $BC = 9$ ,  $CD = 14$ .  
Найдите  $AD$ , если  
известно, что в четырёх-  
угольнике  $ABCD$  можно  
вписать окружность.

## Задача 2.



Четырёхугольник  $ABCD$   
вписан в окружность.  
Известно, что угол  $B$  равен  
 $83^\circ$ , угол  $A$  меньше угла  $D$   
на  $20^\circ$ . Найдите угол  $C$ .



# *Площади четырехугольников*

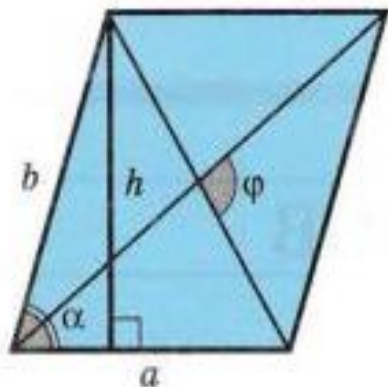




# Площади



## Параллелограмм

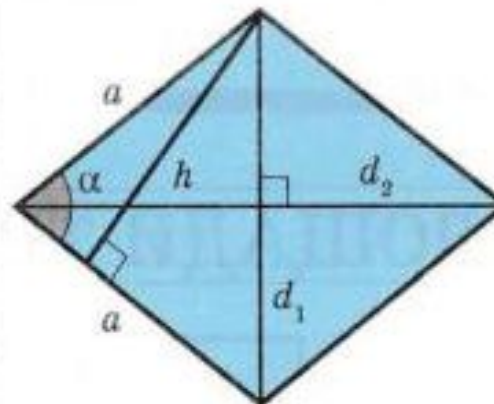


$$S = a \cdot h$$

$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

## Ромб

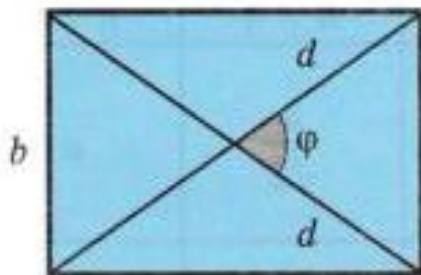


$$S = a \cdot h$$

$$S = a^2 \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

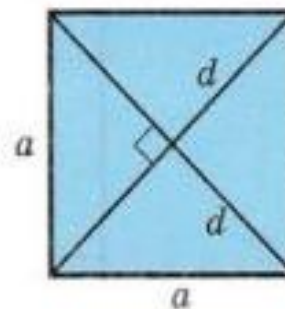
## Прямоугольник



$$S = ab$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

## Квадрат

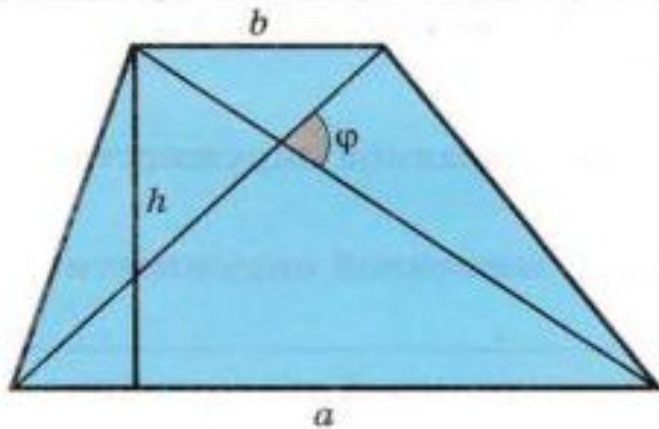


$$S = a^2$$

$$S = \frac{1}{2} d^2$$



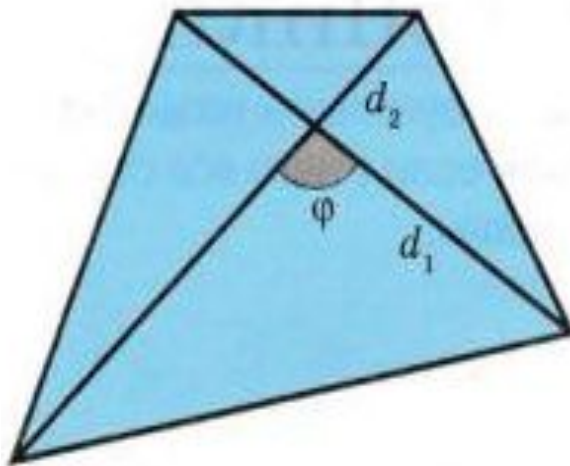
## Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S = m \cdot h \quad (m \text{ — длина средней линии})$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

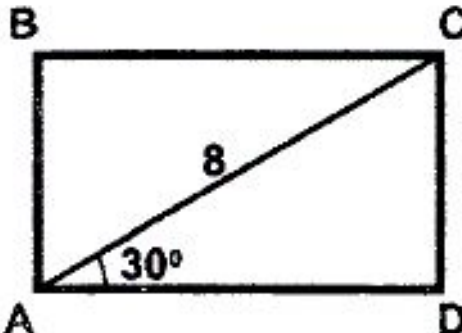
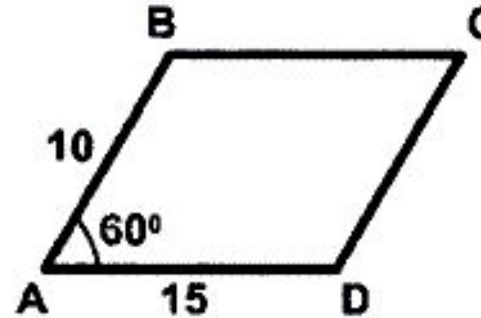
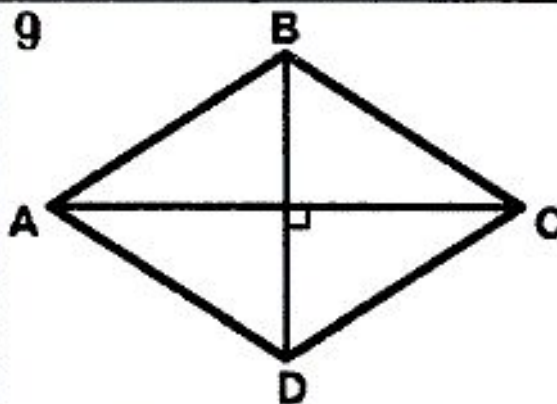
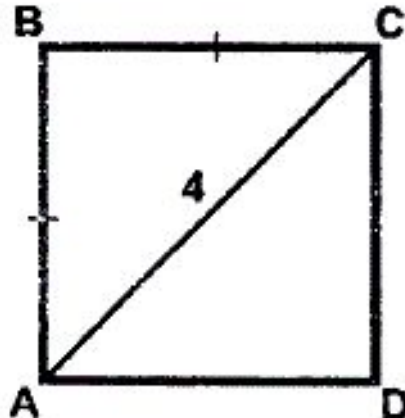
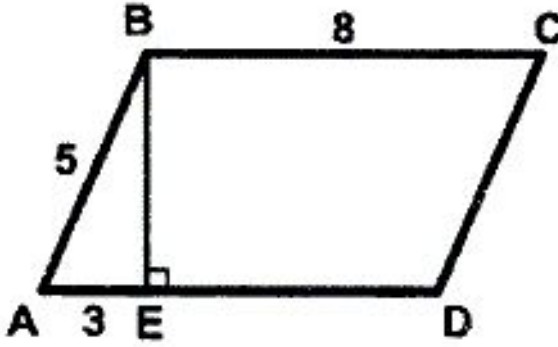
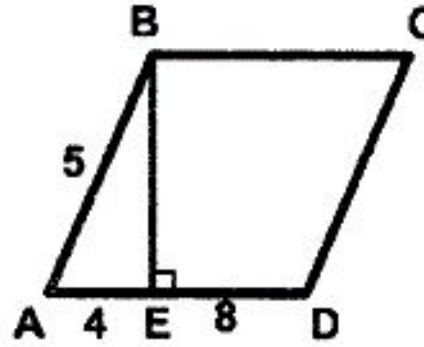


$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

# Найти площадь фигуры



Прямоугольник	Параллелограмм	Ромб
<p>1</p>  <p>Rectangle <math>ABCD</math> with diagonal <math>AC = 8</math> and angle <math>\angle CAD = 30^\circ</math>.</p>	<p>5</p>  <p>Parallelogram <math>ABCD</math> with side <math>AB = 10</math>, side <math>AD = 15</math>, and angle <math>\angle A = 60^\circ</math>.</p>	<p>9</p>  <p>Rhombus <math>ABCD</math> with diagonals <math>AC</math> and <math>BD</math> intersecting at a right angle.</p> <p>Дано: <math>AC = 8</math>, <math>BD = 5</math></p>
<p>2</p>  <p>Square <math>ABCD</math> with diagonal <math>AC = 4</math> and equal sides.</p>	<p>6</p>  <p>Parallelogram <math>ABCD</math> with side <math>AB = 5</math>, side <math>BC = 8</math>, and height <math>BE</math> drawn from <math>B</math> to <math>AD</math>.</p>	<p>10</p>  <p>Parallelogram <math>ABCD</math> with side <math>AB = 5</math>, side <math>AD = 8</math>, and height <math>BE</math> drawn from <math>B</math> to <math>AD</math>.</p>

# Решить задачи



1. Площадь параллелограмма равна  $72 \text{ см}^2$ , высоты  $4 \text{ см}$  и  $6 \text{ см}$ . Найдите периметр параллелограмма.
2. Стороны параллелограмма равны  $12 \text{ см}$  и  $16 \text{ см}$ , а одна из высот равна  $15 \text{ см}$ . Найдите вторую высоту.
3. Найдите площадь прямоугольника, если меньшая из его сторон равна  $5 \text{ см}$ , а угол между диагоналями равен  $60$  градусов.
4. Найти площадь ромба с диагоналями  $10 \text{ см}$  и  $6 \text{ см}$ .
5. Найти площадь ромба, если его сторона равна  $5$ , а большая диагональ –  $8$ .
6. Высота ромба равна  $10 \text{ см}$ , острый угол равен  $60$  градусов, найти периметр этого ромба.

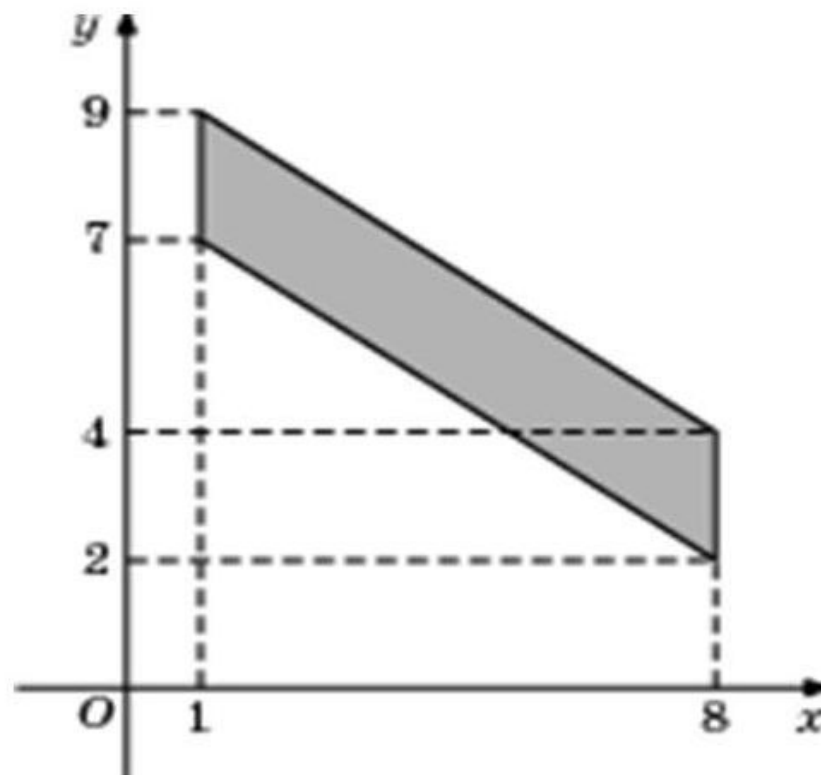
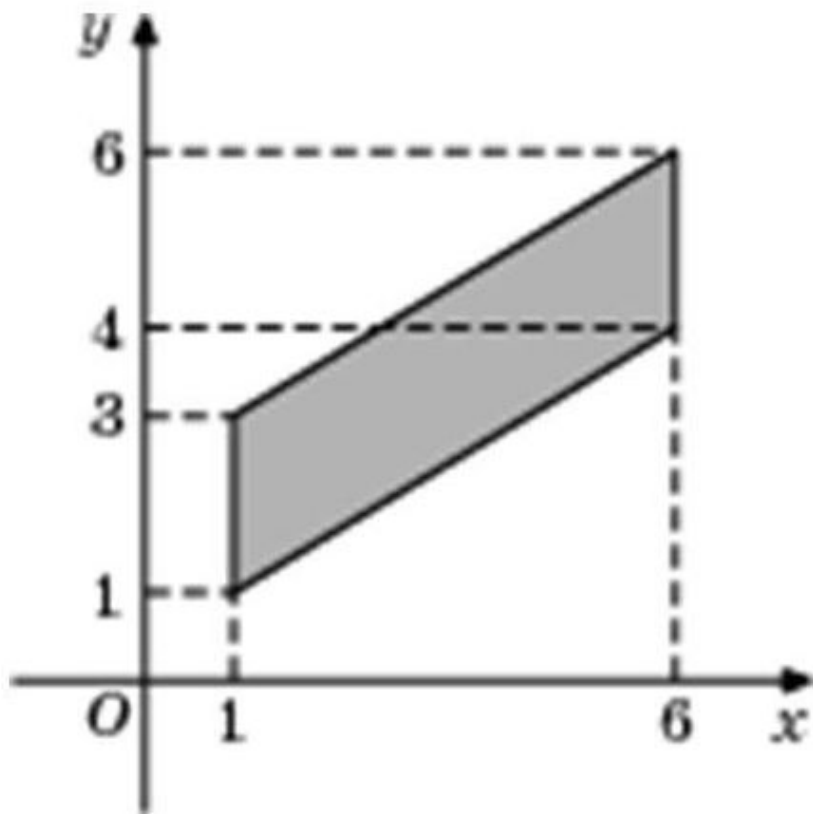
# Решить задачи



7. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 8 см, диагональ - 10 см.
8. Биссектриса угла прямоугольника делит противоположную сторону на части, равные 4 см и 2 см. Найдите площадь этого прямоугольника.
9. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1:4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.
10. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен  $30^\circ$ . Найти площадь параллелограмма.
11. Найти периметр прямоугольника, если его площадь равна  $36 \text{ см}^2$ , а одна из сторон 9 см.
12. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна 16 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

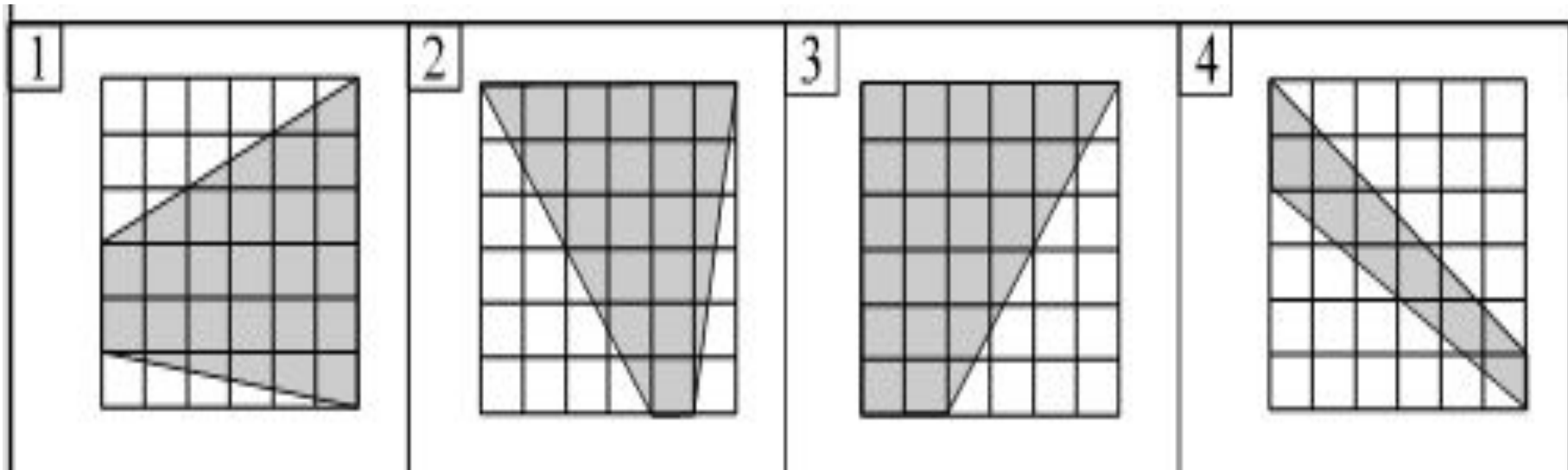


Найти площадь параллелограмма, изображенного на рисунке

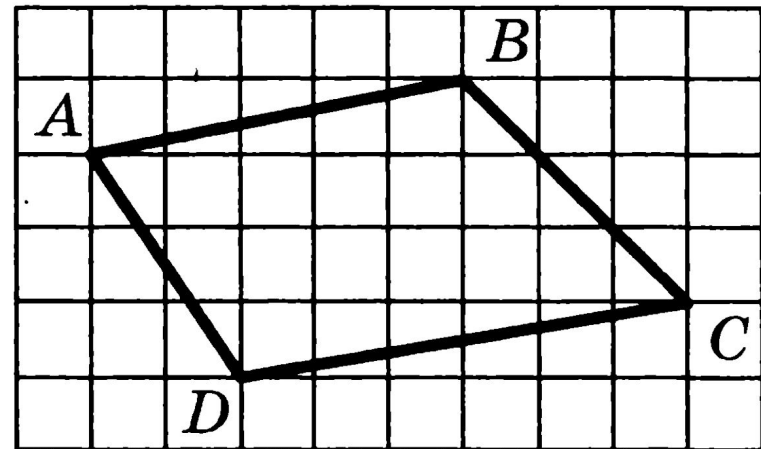




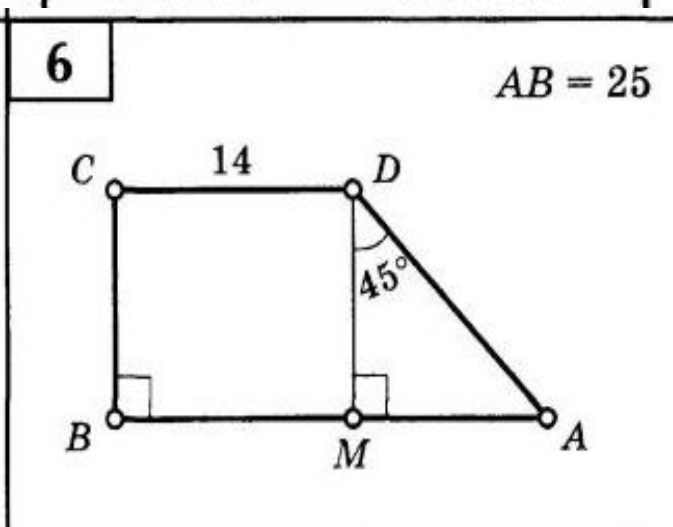
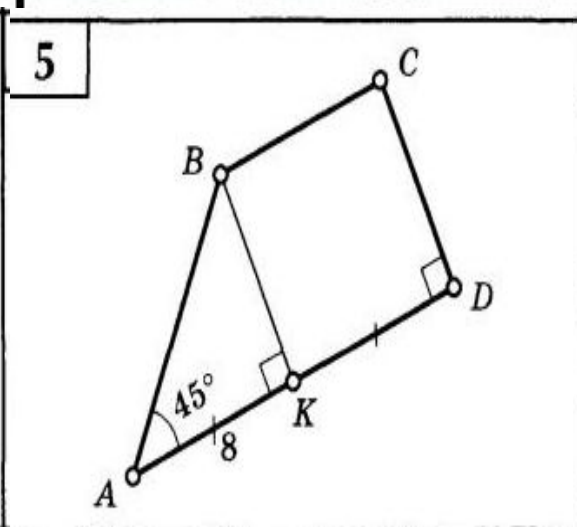
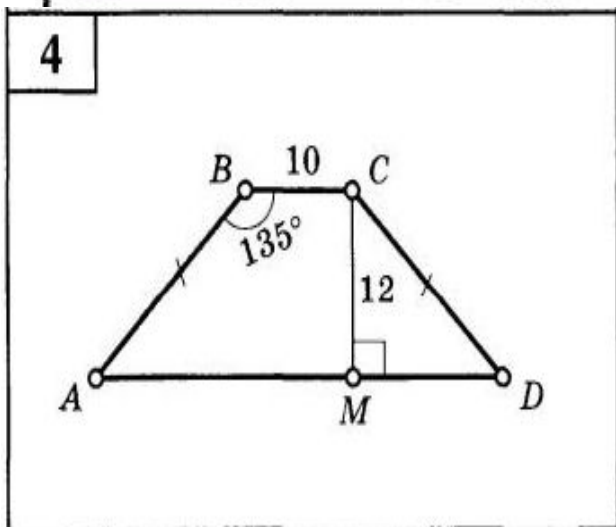
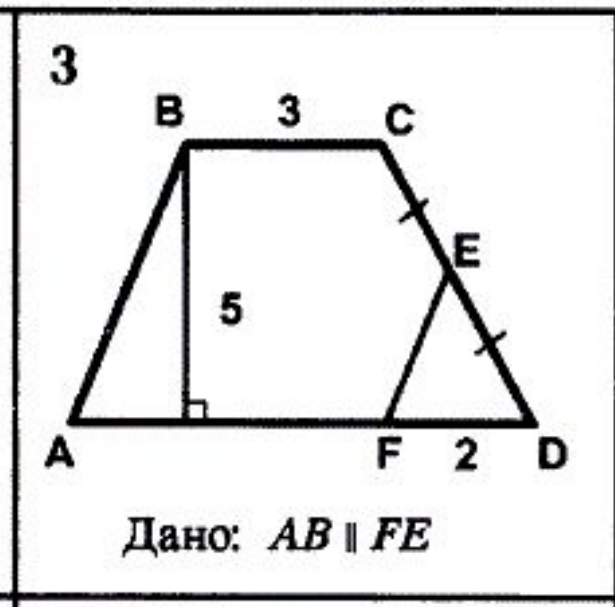
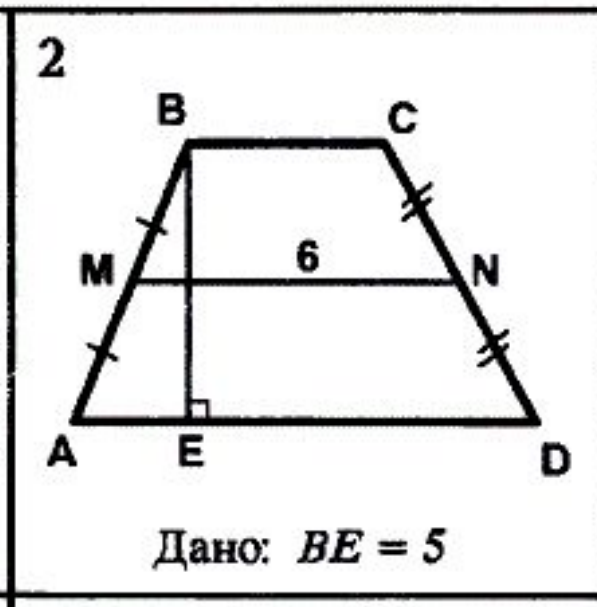
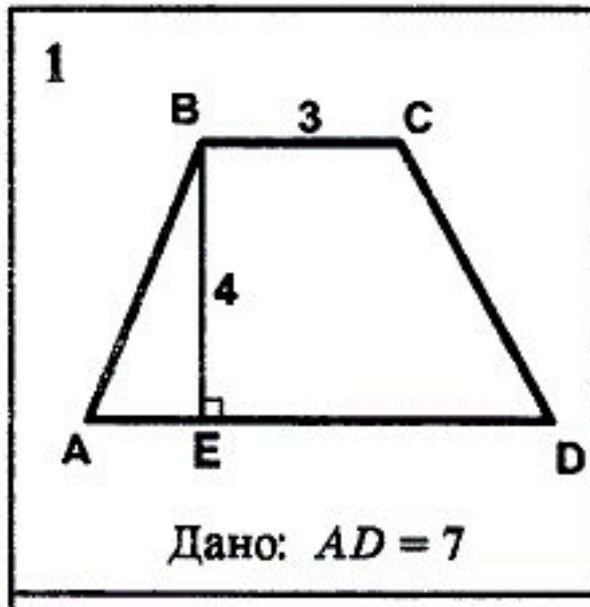
# Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке



5. Учитывая, что площадь маленького квадрата равна 1, на рисунке площадь четырехугольника  $ABCD$  будет равна



# Найти площадь трапеции ABCD



## ОГЭ 2 часть(задание 24)



Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найдите периметр параллелограмма, если  $BK = 7$ ,  $CK = 12$ .

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.

Высота  $AH$  ромба  $ABCD$  делит сторону  $CD$  на отрезки  $DH = 8$  и  $CH = 2$ . Найдите высоту ромба.

Прямая, параллельная основаниям трапеции  $ABCD$ , пересекает её боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите длину отрезка  $EF$ , если  $AD = 42$ ,  $BC = 14$ ,  $CF:DF = 4:3$ .