



***«Подготовительный курс для абитуриентов
колледжа»
по Математике***

***Четырехугольники. Виды, свойства, формулы
площади.***

Автор: Зеленская О.Ю.



Основные понятия, виды и свойства четырехугольников.

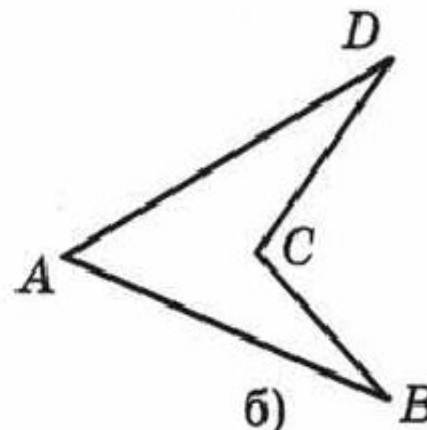
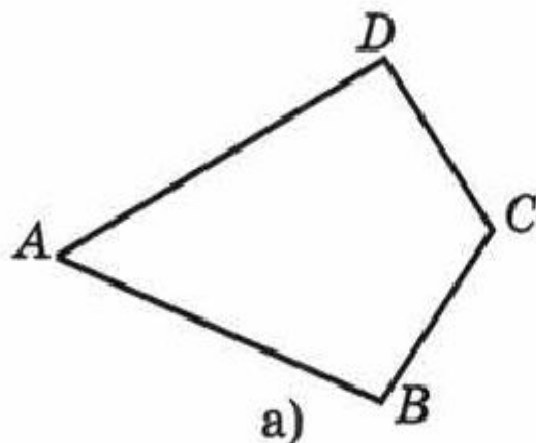


Основные элементы 4-угольников



Четырёхугольником называется многоугольник с четырьмя углами.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые



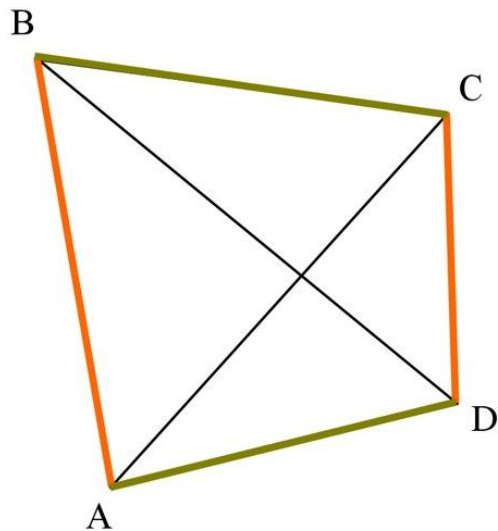
A, B, C, D - вершины четырёхугольника

A и B - соседние вершины

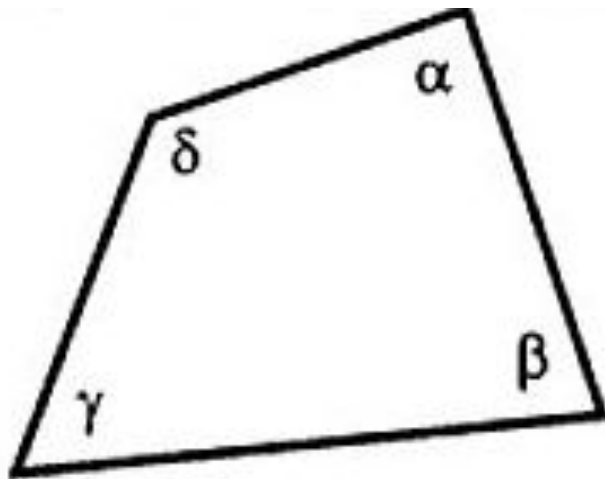
AD, BC, CD, BA – стороны многоугольника

AD и CD - смежные стороны многоугольника

Свойства выпуклого четырехугольника



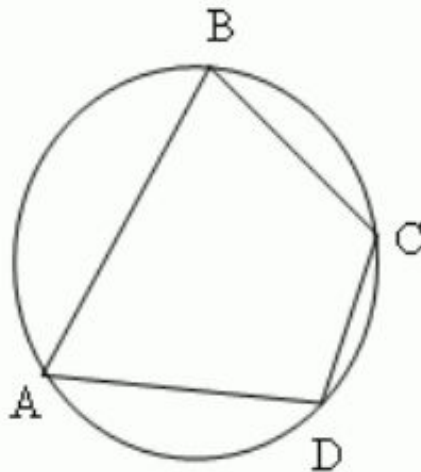
**Диагонали выпуклого
четырёхугольника
пересекаются в одной точке.**



**Сумма внутренних углов
равна 360° :**

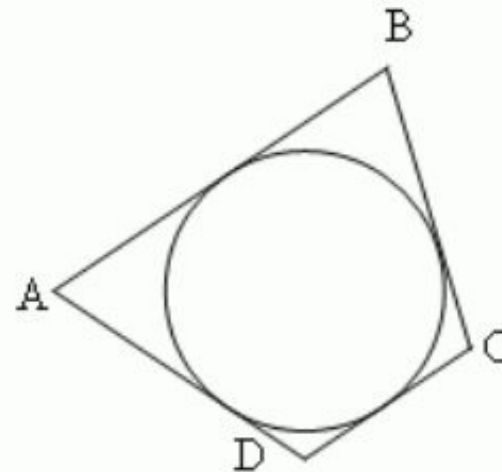
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

Свойства выпуклого четырехугольника



В любом вписанном
четырёхугольнике сумма
противоположных углов
равна 180° .

$$A + C = D + B = 180^\circ.$$



В любом описанном
четырёхугольнике суммы
противоположных сторон
равны.

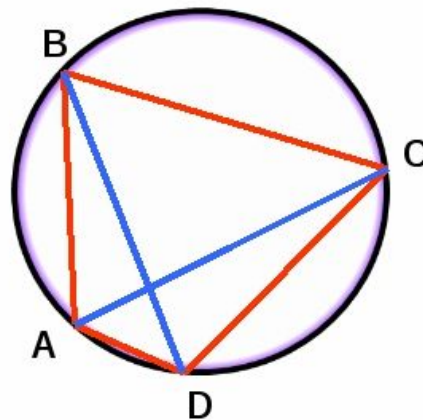
$$AB + CD = AD + BC$$

Теорема Птолемея

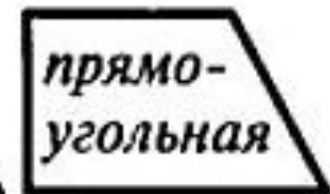
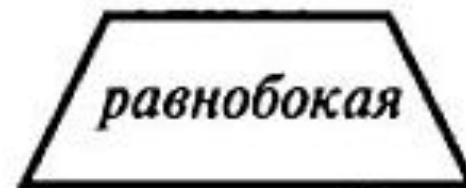
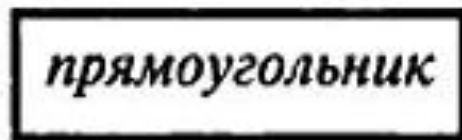
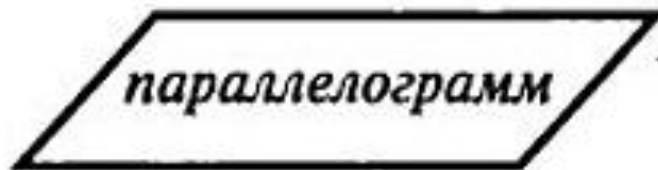
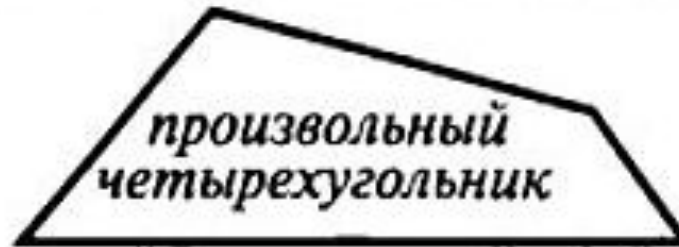


Произведение диагоналей
вписанного в окружность
четырехугольника равно сумме
произведений противоположных
сторон.

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



Виды выпуклых 4-угольников



Параллелограмм



Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны.



Противоположные стороны попарно равны.

$$a = c, b = d$$

Противоположные углы попарно равны.

$$\alpha = \gamma, \beta = \delta$$

Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180° .

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$$

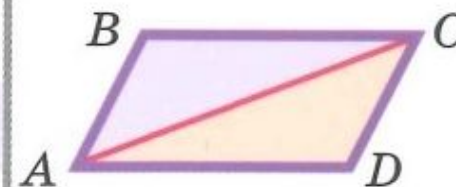
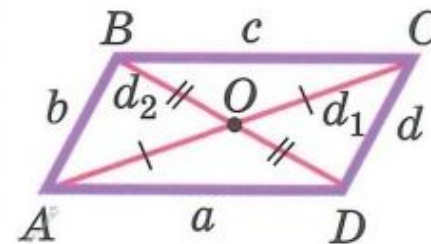
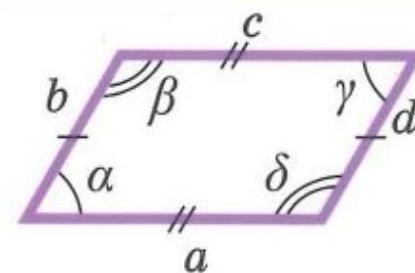
Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

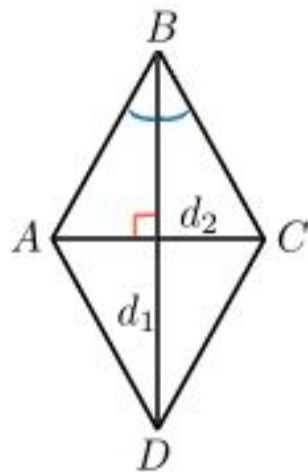
$$AO = OC, BO = OD$$

Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон.

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

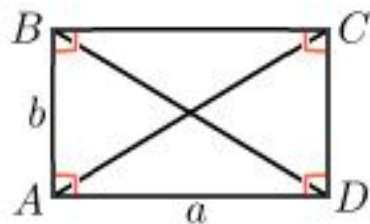
Каждая из сторон и каждая из диагоналей являются...





Ромб - это параллелограмм,
у которого все стороны равны.

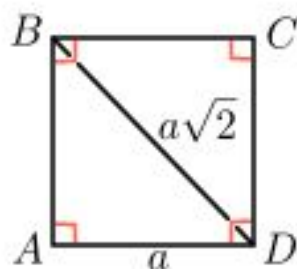
Диагонали ромба перпендикулярны и являются
биссектрисами углов ромба.



$$AC = BD$$

Прямоугольник - это параллелограмм,
у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.



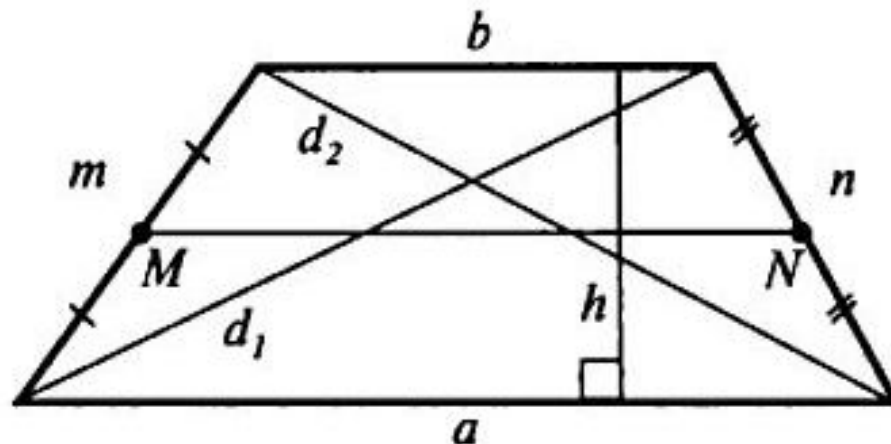
Квадрат - это прямоугольник,
у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Трапеция



Так называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие — не параллельны (боковые стороны). Трапеция с равными боковыми сторонами называется равнобокой (равнобедренной, равнобочной).



a, b — основания ($a \parallel b$),
 m, n — боковые стороны,
 d_1, d_2 — диагонали,

h — высота (отрезок, соединяющий основания и перпендикулярный им),
 MN — средняя линия (отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

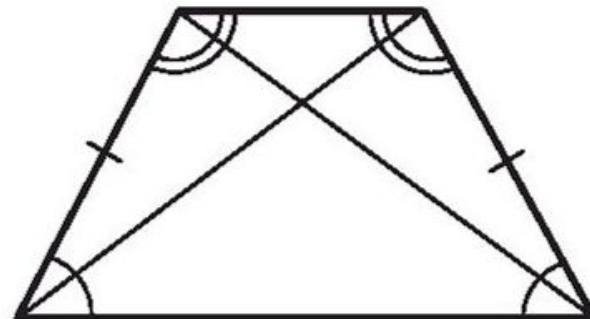
Свойства равнобедренной трапеции



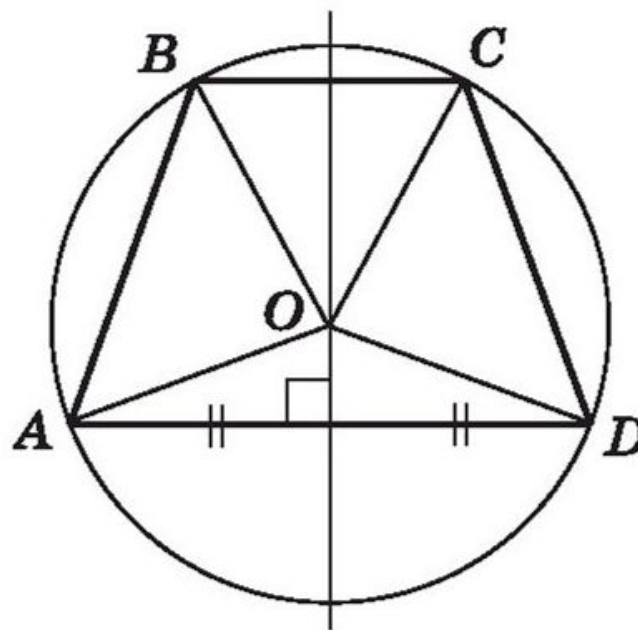
Если

1) Диагонали равны.

2) Углы при одном основании равны.



3) Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность (ее центр лежит на серединном перпендикуляре к основанию).



4) В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если средняя линия равна боковой стороне.

Ответить на вопросы



- 1) У какой из фигур диагонали, пересекаясь, делятся пополам?
- 2) У какой из фигур диагонали равны?
- 3) У какой из фигур диагонали делят углы пополам?
- 4) У какой из фигур диагонали перпендикулярны?
- 5) У какой из фигур равны противолежащие углы?
- 6) У какой из фигур равны углы, прилежащие к одной стороне?
- 7) У какой из фигур параллельна одна пара противолежащих сторон?

Докажите, что ABCD - параллелограмм



| | | |
|----------|----------|----------|
| <p>1</p> | <p>2</p> | <p>3</p> |
| <p>4</p> | <p>5</p> | <p>6</p> |

Решить задачи



1. Найдите углы параллелограмма, если:

1) один из его углов равен 46° ;

2) сумма двух его углов равна 186° ;

3) один из его углов на 56° больше другого;

4) один из его углов в 3 раза меньше другого;

5) два угла параллелограмма относятся как $5 : 7$.

2. Найдите углы параллелограмма $ABCD$ рис.

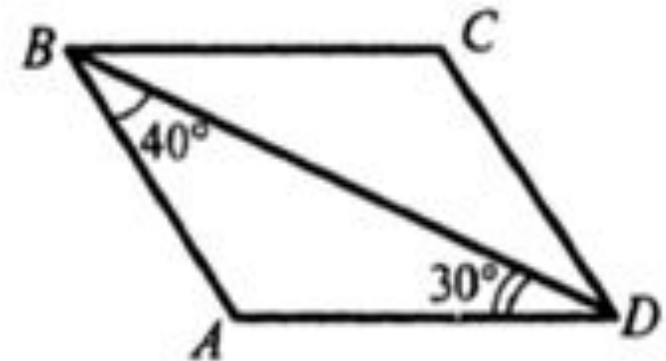
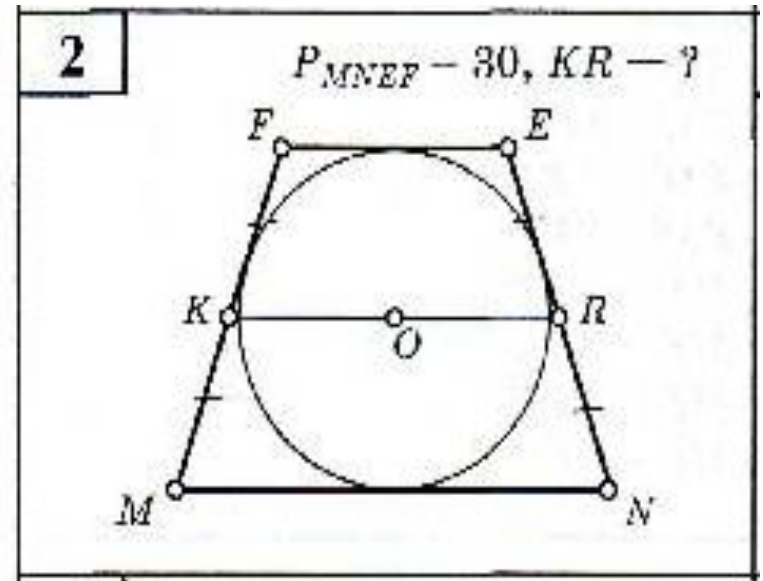
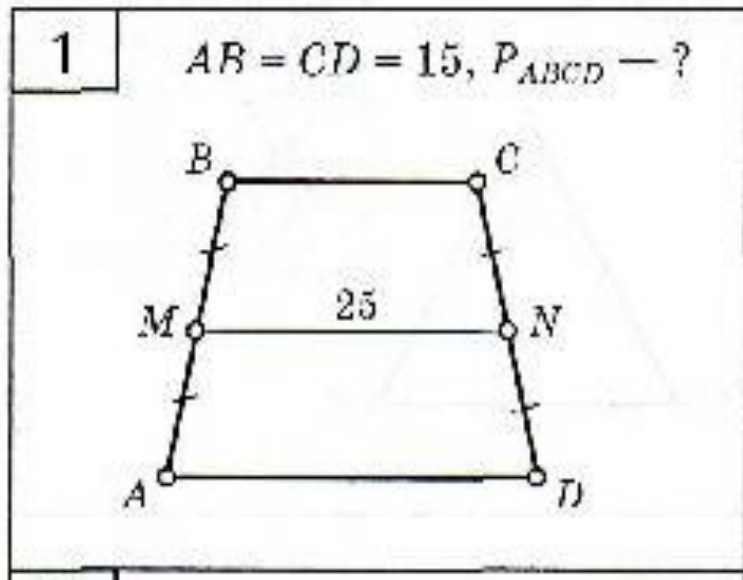
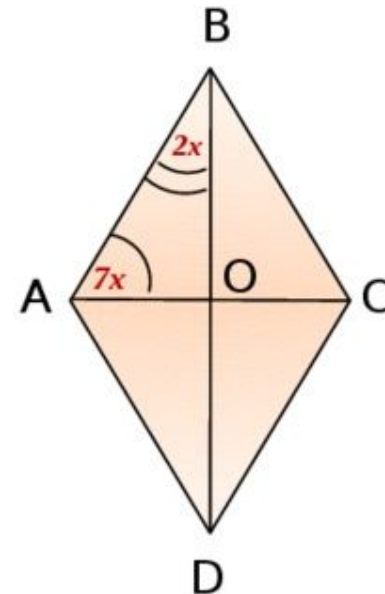


Рис.

Решить задачи



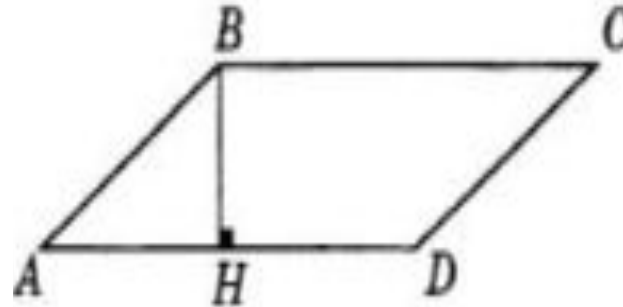
3. Углы, образуемые стороной ромба и его диагоналями, относятся как 7:2.
Найдите больший угол ромба.



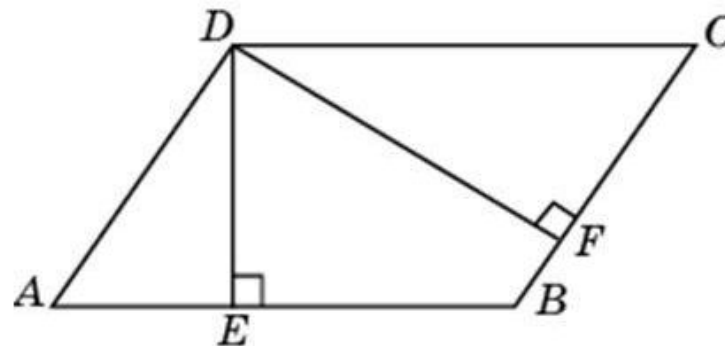
Решить задачи



Высота BH параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник. Найдите градусную меру угла ADC .



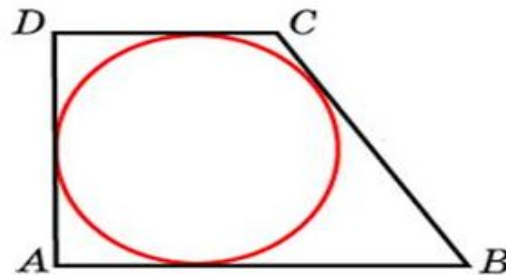
Острый угол параллелограмма равен 60° . Найдите угол между высотами этого параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла.



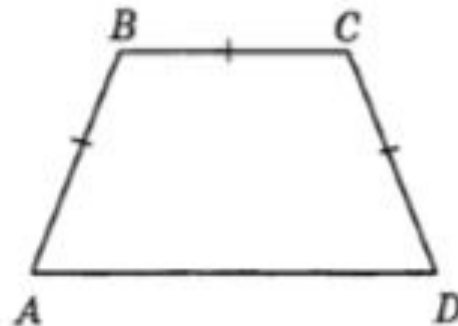


Решить задачи

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

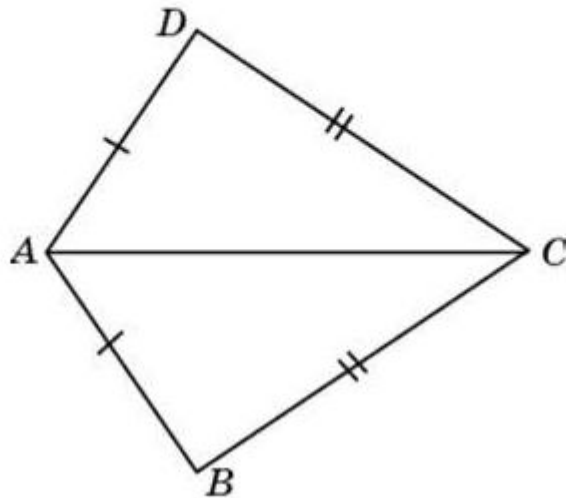


В трапеции ABCD стороны AB, BC и CD равны. Основание AD в два раза больше основания BC. Найдите угол CDA.



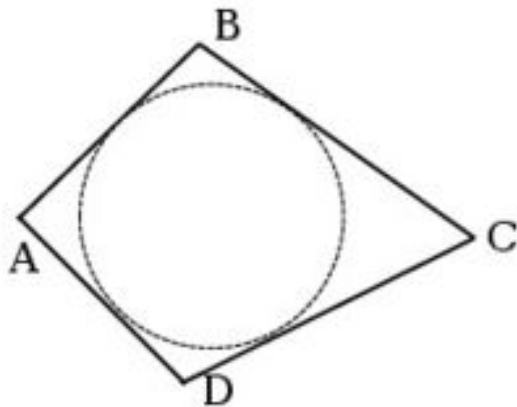


В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $AB < BC$. Докажите, что угол A больше угла C .



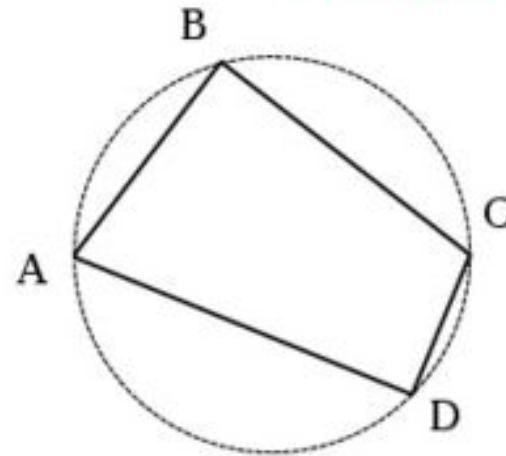


Задача 1.



В четырёхугольнике $ABCD$
 $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 14$.
Найдите AD , если
известно, что в четырёх-
угольнике $ABCD$ можно
вписать окружность.

Задача 2.



Четырёхугольник $ABCD$
вписан в окружность.
Известно, что угол B равен
 83° , угол A меньше угла D
на 20° . Найдите угол C .



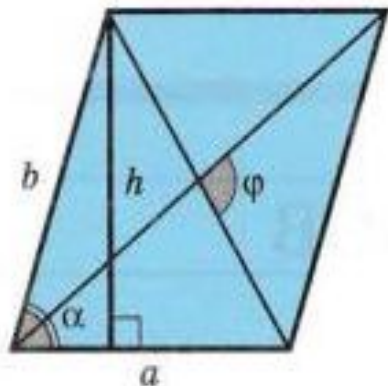
Площади четырехугольников



Площади



Параллелограмм

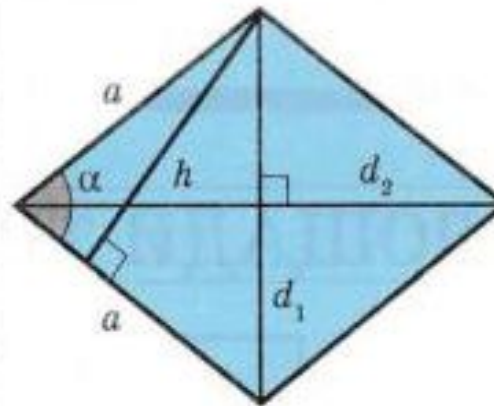


$$S = a \cdot h$$

$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Ромб

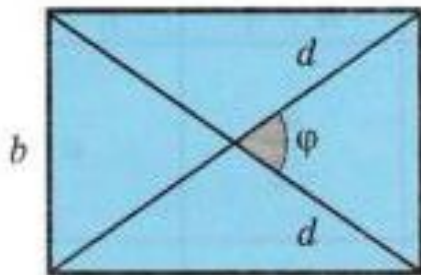


$$S = a \cdot h$$

$$S = a^2 \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

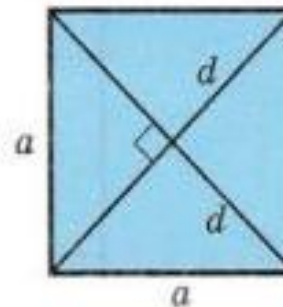
Прямоугольник



$$S = ab$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

Квадрат

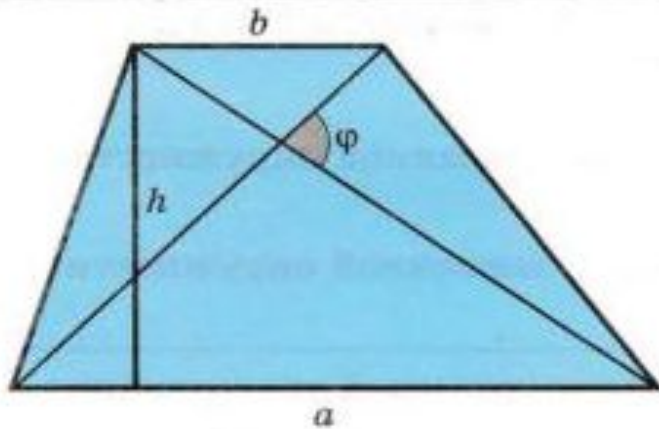


$$S = a^2$$

$$S = \frac{1}{2} d^2$$



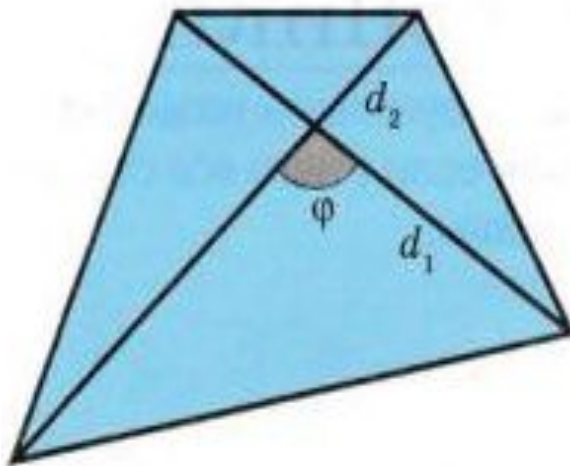
Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S = m \cdot h \quad (m \text{ — длина средней линии})$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

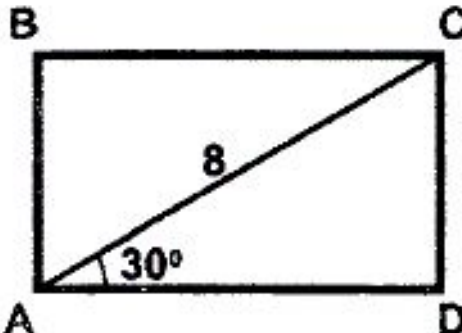
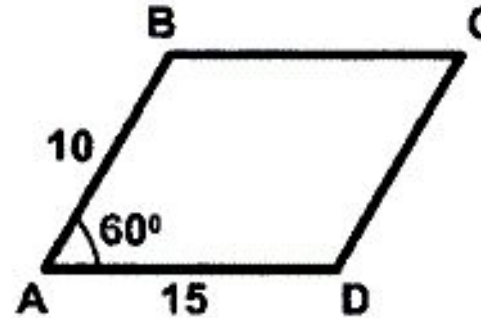
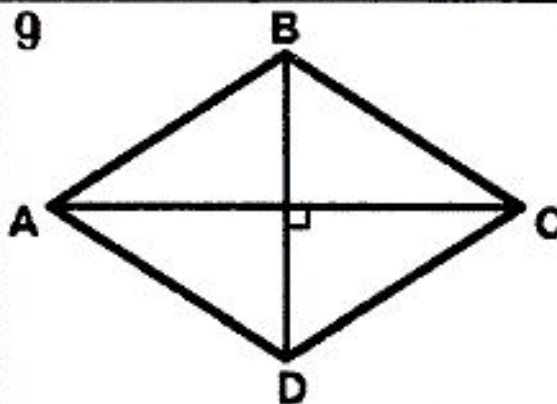
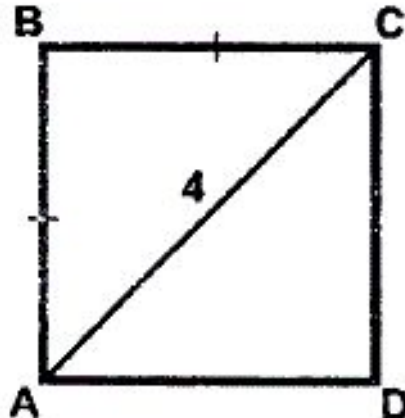
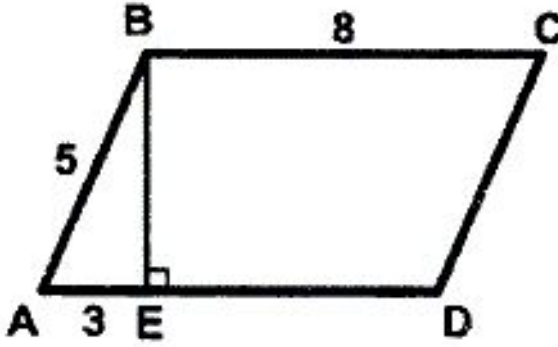
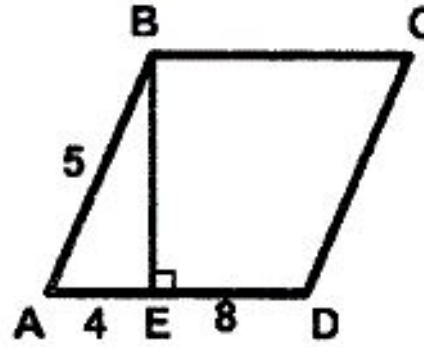


$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Найти площадь фигуры



| Прямоугольник | Параллелограмм | Ромб |
|--|---|--|
| <p>1</p>  <p>Rectangle ABCD with diagonal AC = 8 and angle A = 30°.</p> | <p>5</p>  <p>Parallelogram ABCD with side AB = 10, side AD = 15, and angle A = 60°.</p> | <p>9</p>  <p>Rhombus ABCD with diagonals AC and BD intersecting at a right angle.</p> <p>Дано: $AC = 8$, $BD = 5$</p> |
| <p>2</p>  <p>Square ABCD with diagonal AC = 4 and equal sides.</p> | <p>6</p>  <p>Parallelogram ABCD with side AB = 5, side BC = 8, and height BE = 3.</p> | <p>10</p>  <p>Parallelogram ABCD with side AB = 5, side AD = 8, and height BE = 4.</p> |

Решить задачи



1. Площадь параллелограмма равна 72 см^2 , высоты 4 см и 6 см . Найдите периметр параллелограмма.
2. Стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см , а одна из высот равна 15 см . Найдите вторую высоту.
3. Найдите площадь прямоугольника, если меньшая из его сторон равна 5 см , а угол между диагоналями равен 60 градусов.
4. Найти площадь ромба с диагоналями 10 см и 6 см .
5. Найти площадь ромба, если его сторона равна 5 , а большая диагональ – 8 .
6. Высота ромба равна 10 см , острый угол равен 60 градусов, найти периметр этого ромба.

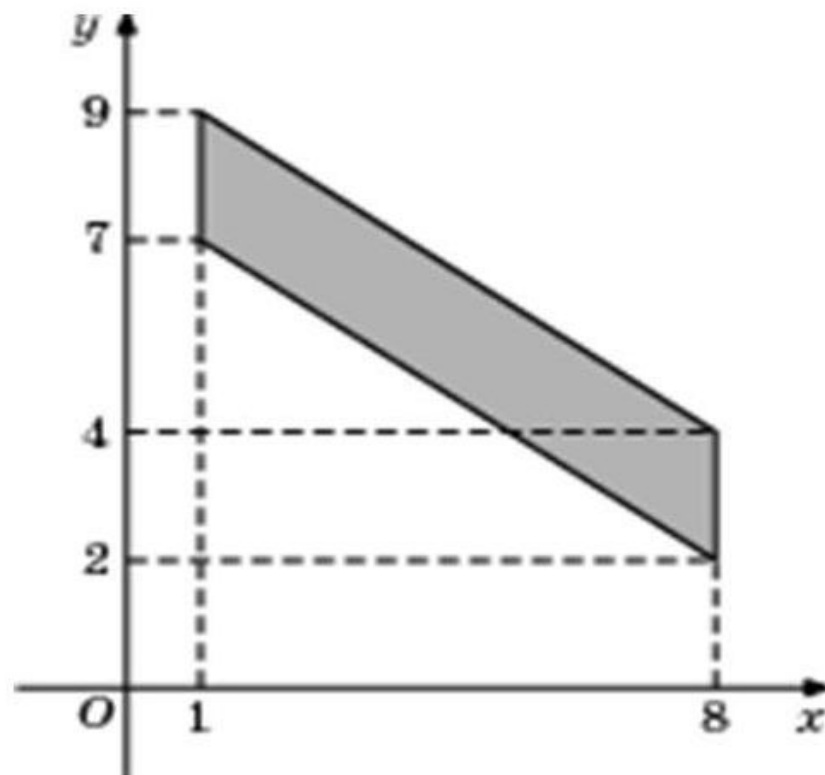
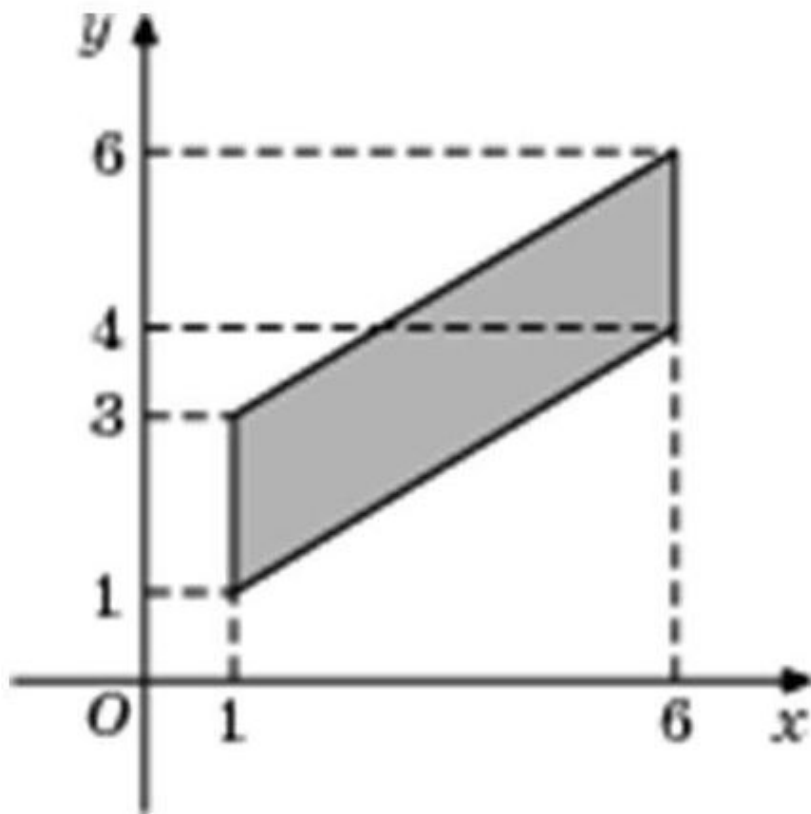
Решить задачи



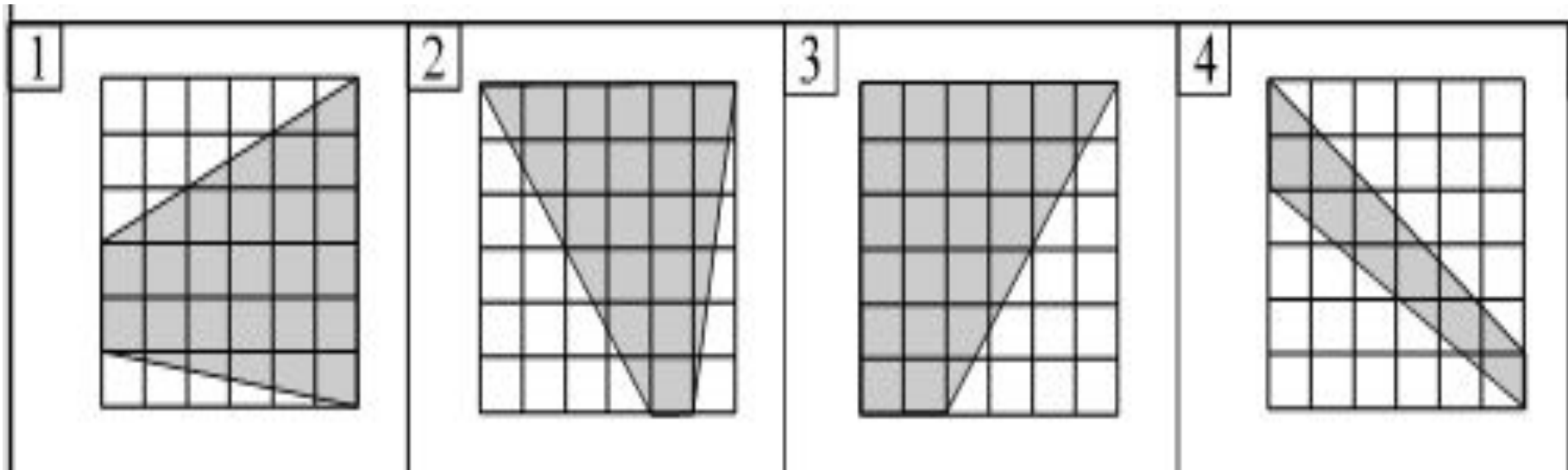
7. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 8 см, диагональ - 10 см.
8. Биссектриса угла прямоугольника делит противоположную сторону на части, равные 4 см и 2 см. Найдите площадь этого прямоугольника.
9. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1:4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.
10. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30° . Найти площадь параллелограмма.
11. Найти периметр прямоугольника, если его площадь равна 36 см², а одна из сторон 9 см.
12. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна 16 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.



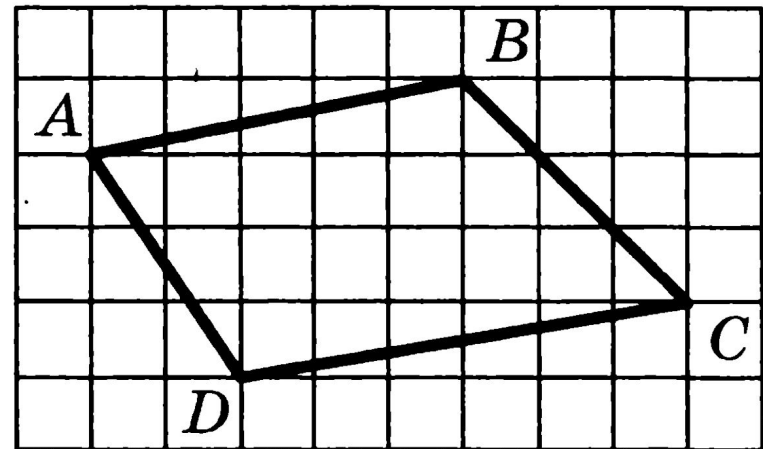
Найти площадь параллелограмма, изображенного на рисунке



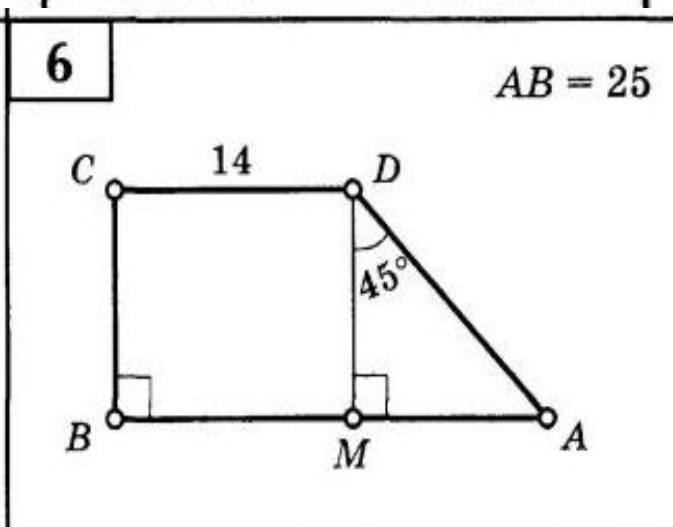
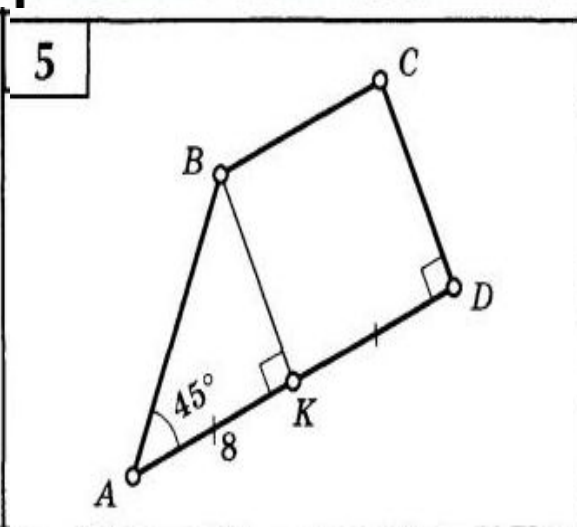
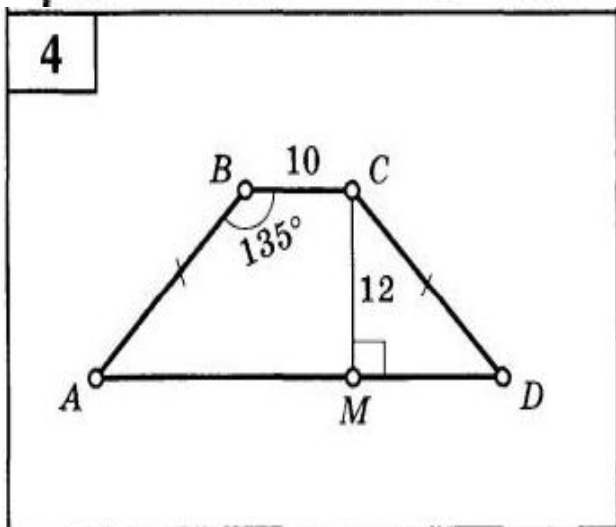
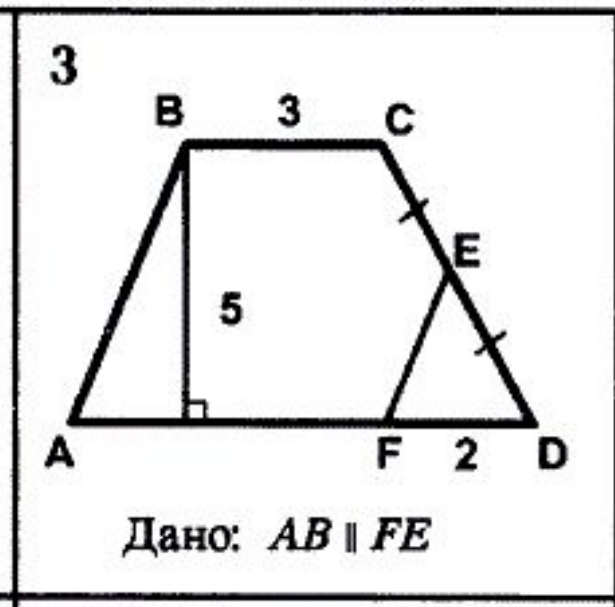
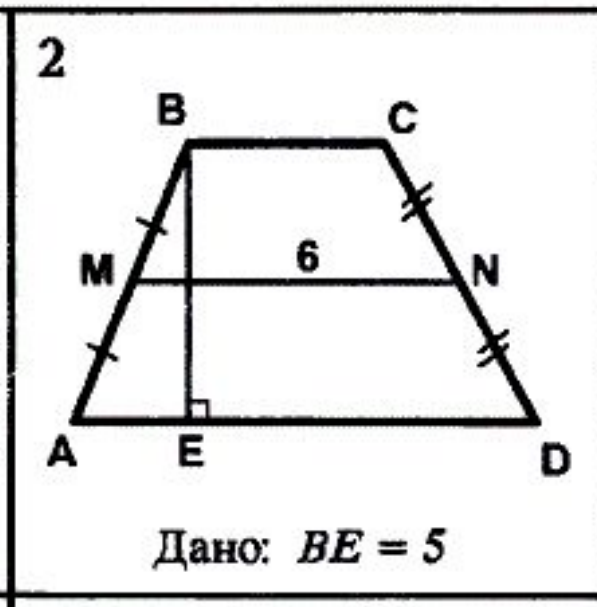
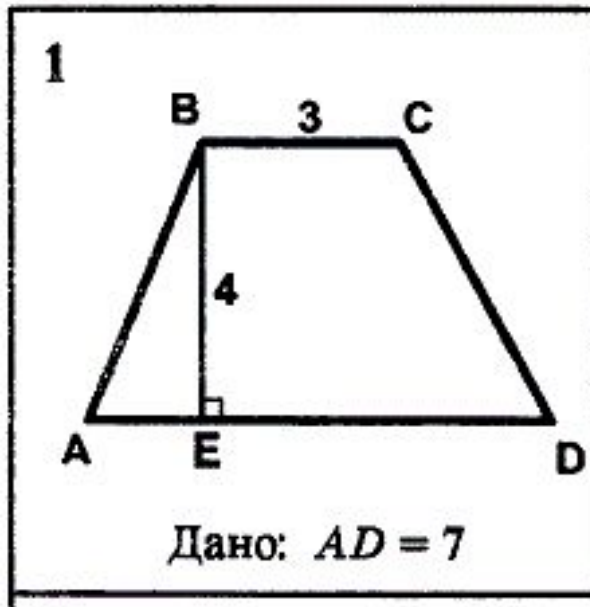
Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке



5. Учитывая, что площадь маленького квадрата равна 1, на рисунке площадь четырехугольника $ABCD$ будет равна



Найти площадь трапеции ABCD



ОГЭ 2 часть(задание 24)



Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 12$.

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 42$, $BC = 14$, $CF:DF = 4:3$.