Признак параллельности прямой и плоскости

Признак параллельности плоскостей

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема 1.1

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть α и β— данные плоскости, a1 и a2 — прямые в плоскости α , пересекающиеся в точке А, b1, и b2 — соответственно параллельные им прямые в плоскости β. Допустим, что плоскости α и β не параллельны, т. е. пересекаются по некоторой прямой с. По теореме 1.1 прямые а1 и а2, как параллельные прямым b1и b2, параллельны плоскости β и поэтому они не пересекают лежащую в этой плоскости прямую с. Таким образом, в плоскости α через точку А проходят две прямые (а1 и а2), параллельные прямой с. Но это невозможно по аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

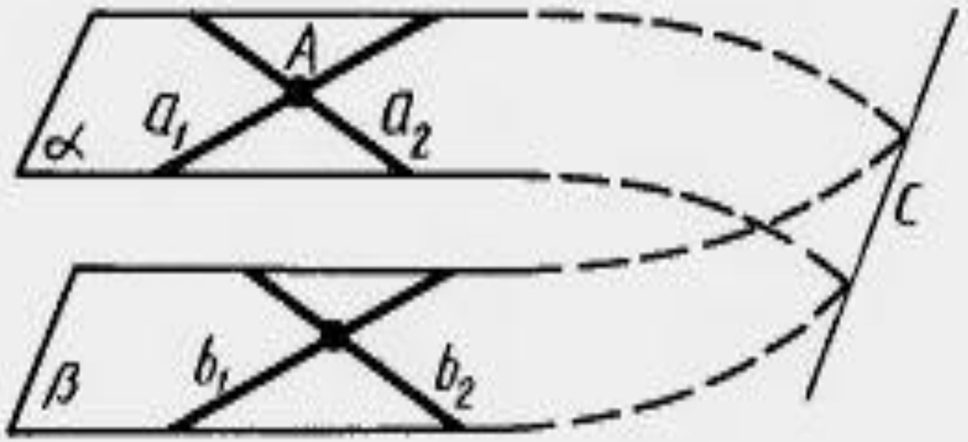


Рис. 329

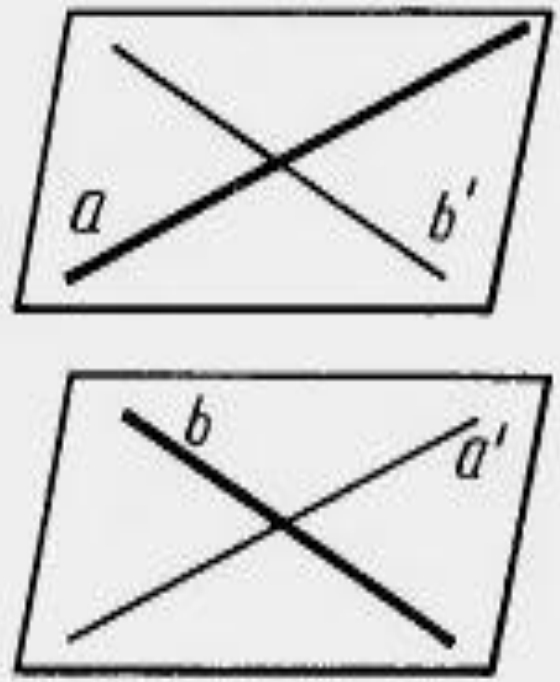
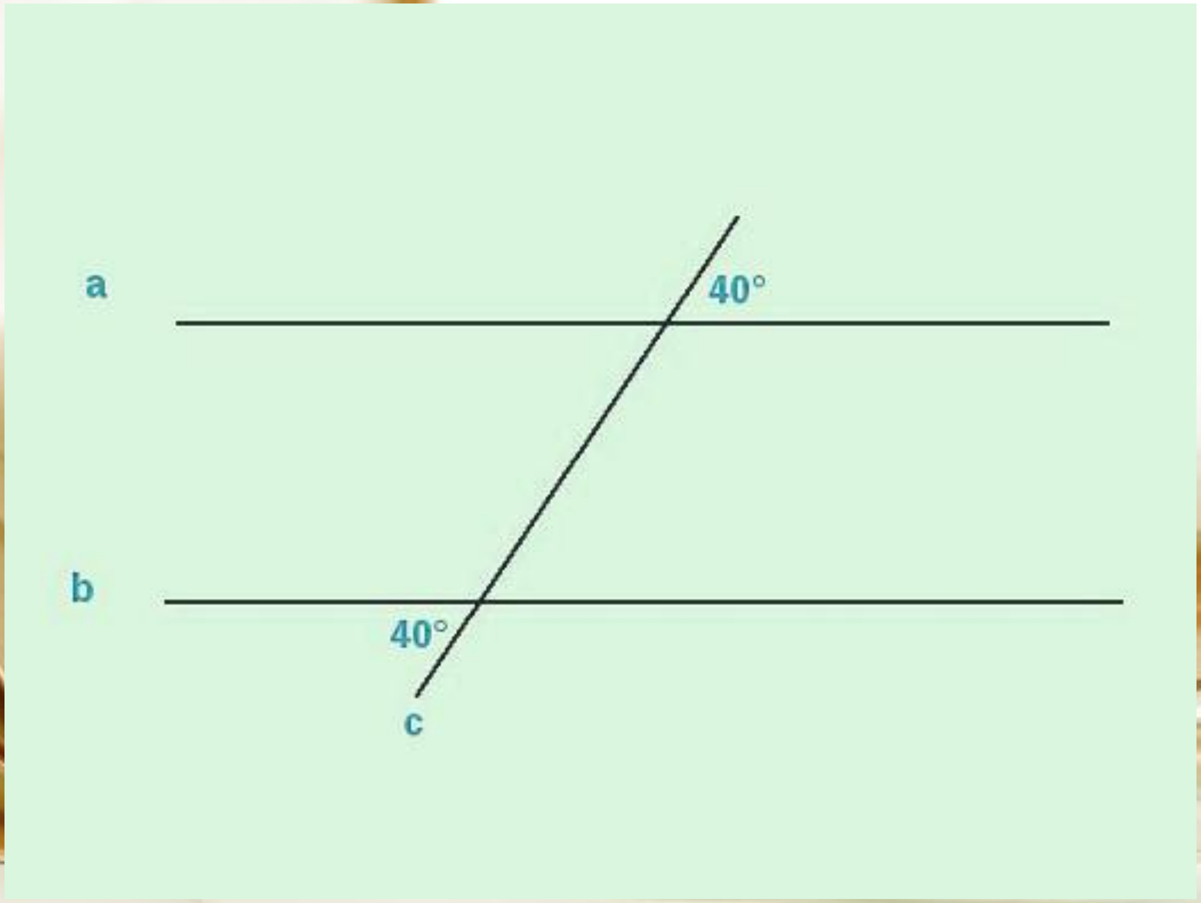


Рис. 330

Признаки параллельности прямых

Параллельность двух прямых можно доказать на основе теоремы, согласно которой, два проведенных перпендикуляра по отношению к одной прямой, будут параллельны. Существуют определенные признаки параллельности прямых – всего их три, и все их мы рассмотрим более конкретно.

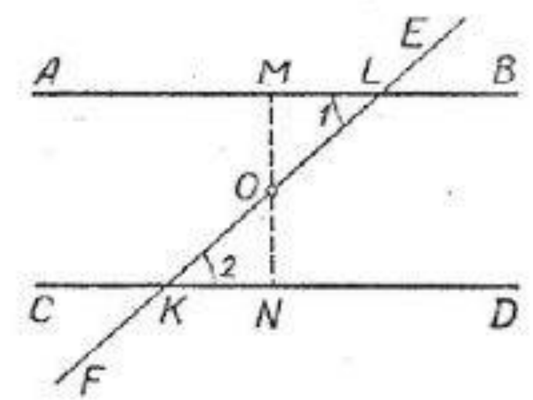


Первый признак параллельности

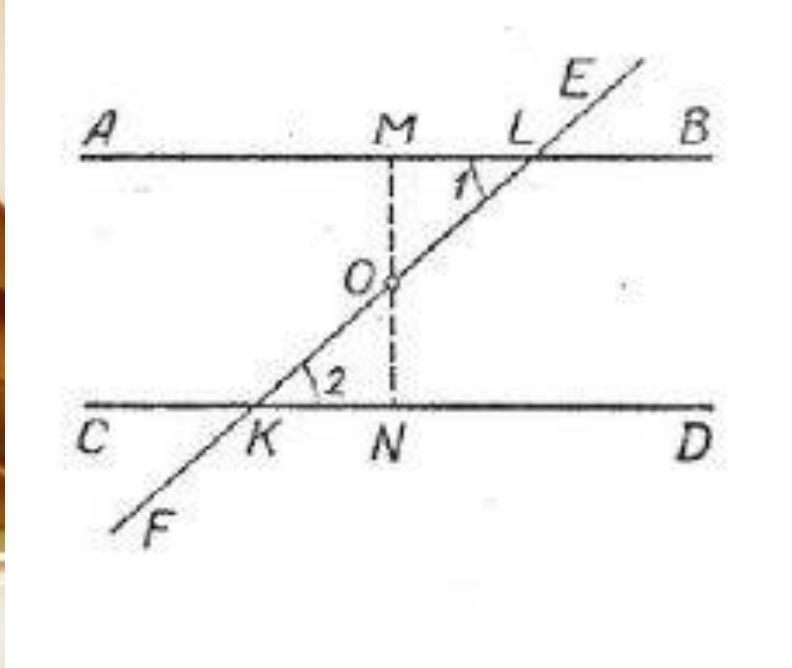
Прямые параллельны, если при пересечении их третьей прямой, образуемые внутренние углы, лежащие накрест, будут равны.

Допустим, при пересечении прямых AB и CD прямой линией EF, были образованы $\angle 1$ и $\angle 2$. Они равны, так как прямая линия EF проходит под одним уклоном по отношению к двум остальным прямым. В местах пересечения линий, ставим точки K и L – у нас получился отрезок секущей EF. Находим его середину и ставим точку O

На прямую AB опускаем перпендикуляр из точки O. Назовем его OM. Продолжаем перпендикуляр до тех пор, пока он не пересечется с прямой CD. В результате, первоначальная прямая AB строго $\perp$ MN, а это значит, что и CD $\perp$ MN, но это утверждение требует доказательства. В результате проведения перпендикуляра и линии пересечения, у нас образовалось два треугольника. Один из них – MOE, второй – NOK.



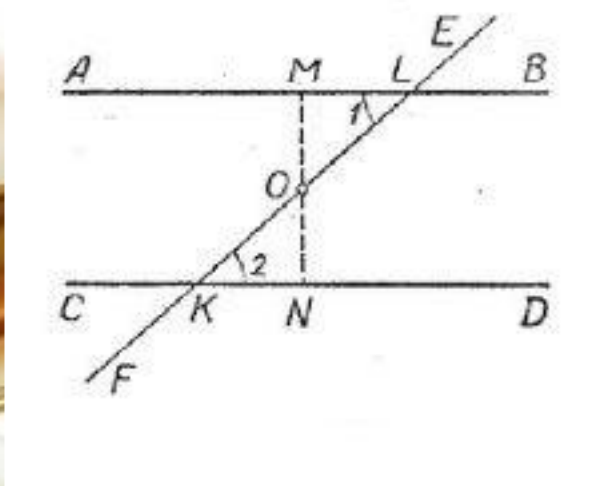
Данные треугольники равны, поскольку, в соответствии с условиями теоремы, ∠1 =∠2, а в соответствии с построением треугольников, сторона OK = стороне OL. ∠ MOL = ∠NOK, поскольку это вертикальные углы. Из этого следует, что сторона и два угла, прилежащие к ней одного из треугольников соответственно равны стороне и двум углам, прилежащим к ней, другого из треугольников. Таким образом, треугольник MOL = треугольнику NOK, а значит, и ∠LMO = ∠KNO, но нам известно, что LMO прямой, значит, и соответствующий ему, ∠KNO тоже прямой. То есть, нам удалось доказать, что к прямой MN, как прямая AB, так и прямая CD перпендикулярны. То есть, AB и CD по отношению друг к другу являются параллельными. Это нам и требовалось доказать.



Второй признак параллельности

Согласно второму признаку параллельности прямых, нам необходимо доказать, что углы, полученные в процессе пересечения параллельных прямых AB и CD прямой EF, будут равны. Таким образом, признаки параллельности двух прямых, как первый, так и второй, основывается на равности углов, получаемых при пересечении их третьей линией. Допускаем, что $\angle 3 = \angle 2$, а $\angle 1 = \angle 3$, поскольку он вертикален ему. Таким образом, и $\angle 2$ будет равен $\angle 1$, однако следует учитывать, что как $\angle 1$, так и угол 2 являются внутренними, накрест лежащими углами. Следовательно, нам остается применить свои знания, а именно то, что два отрезка будут параллельными, если при их пересечении третьей прямой образованные, накрест лежащие углы будут равными. Таким образом, мы выяснили, что AB || CD.

Нам удалось доказать, что при условии параллельности двух перпендикуляров к одной прямой, согласно соответствующей теореме, признак параллельности прямых очевиден.



Третий признак параллельности

Существует еще и третий признак параллельности, который доказывается посредством суммы односторонних внутренних углов. Такое доказательство признака параллельности прямых позволяет сделать вывод, что две прямые будут параллельны, если при пересечении их третье прямой, сумма полученных односторонних внутренних углов, будет равна 2d.