

**Исследование выполнил:**  
**ученик 11а класса сш №177**  
**САБИРОВ ИЛЬДАР**

- **Научный руководитель: учитель математики высшей категории Хабибуллина А.Я**

Координатный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем - исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Мы уже хорошо знакомы с векторами, координатами и их свойствами. Цель моей работы: научиться применять знания для решения задач стереометрии (С2).

## Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

# В задании С2 чаще всего требуется найти:

- угол между двумя скрещивающимися прямыми,
- угол между прямой и плоскостью,
- угол между двумя плоскостями,
- расстояние между двумя скрещивающимися прямыми,
- расстояние от точки до прямой,
- расстояние от точки до плоскости.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.

При нахождении угла между прямыми используют формулу

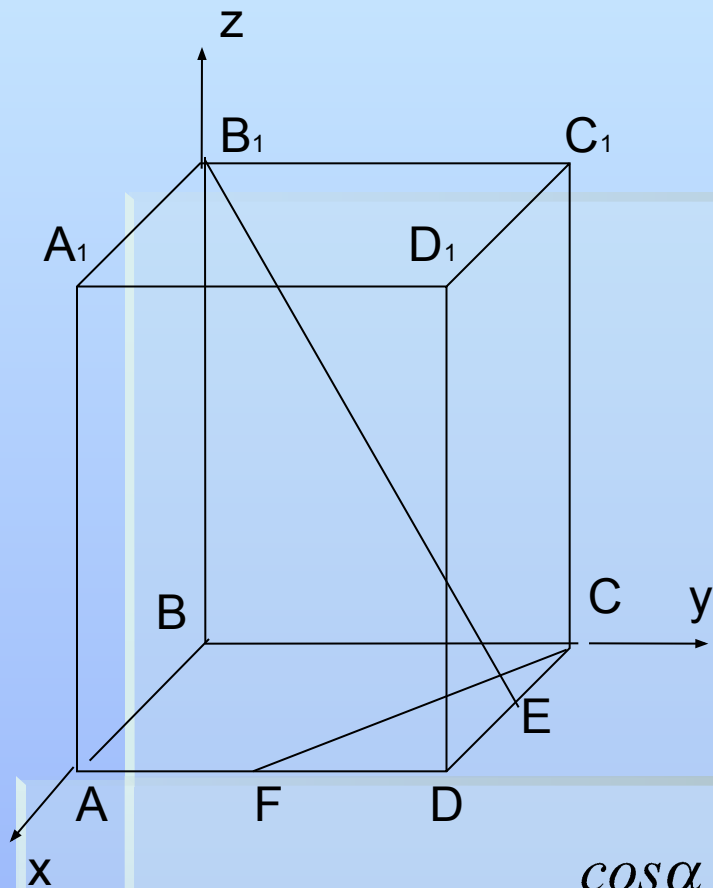
$$\cos \phi = \frac{|\vec{q} \cdot \vec{p}|}{|\vec{q}| \cdot |\vec{p}|} \quad \text{или в координатной форме} \quad \cos \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

для нахождения угла  $\phi$  между прямыми  $m$  и  $l$ , если векторы  $\vec{q}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$  параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые  $m$  и  $l$  были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы  $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$  или  $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ .

## Задача на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 2, высота — 4. Точка  $E$  — середина отрезка  $CD$ , точка  $F$  — середина отрезка  $AD$ . Найдите угол между прямыми  $CF$  и  $B_1 E$ .

# Решение



Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке, и найдём искомый угол как угол между векторами.

Выпишем координаты точек  $B_1$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $F$  в этой системе координат:  $B_1 (0; 0; 4)$ ,  $E(1; 2; 0)$ ,  $C (0; 2; 0)$ ,  $F (2; 1; 0)$ .

Тогда  $\overrightarrow{CF}\{2; -1; 0\}$ ,  $\overrightarrow{B_1E}\{1; 2; -4\}$ . Найдём угол между этими векторами по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_1 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$$

То есть искомый угол  $\alpha = 90^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .



Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Угол между прямой  $l$  и плоскостью  $\alpha$  можно вычислить:

1) по формуле  $\sin \phi = \sin(l; \alpha) = \frac{\rho(M; \alpha)}{AM}$ , где  $M \in l, l \cap \alpha = A$ ;

2) по формуле  $\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$  или в координатах

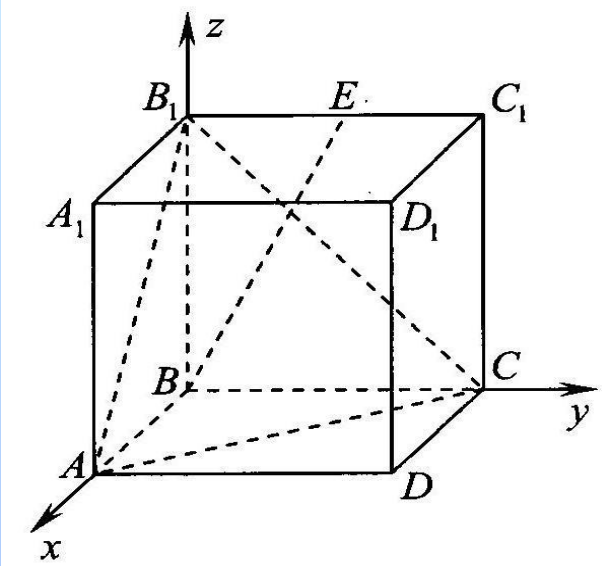
$$\sin \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \text{ где } \vec{n} = \{x_1; y_1; z_1\} \text{ и } \vec{p} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$\vec{n} = \{x_1; y_1; z_1\}$  — вектор нормали к плоскости  $\alpha$ ,  
 $\vec{p} = \{x_2; y_2; z_2\}$  — направляющий вектор прямой  $l$

# Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью.

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  рёбра  $AB$  и  $AA_1$  равны 1, а ребро  $AD=2$ . Точка  $E$  - середина ребра  $B_1 C_1$ .  
Найдите угол между прямой  $BE$  и плоскостью  $AB_1 C_1$ .

# Решение



Для решения этой задачи необходимо воспользоваться уравнением плоскости, имеющим общий вид  $ax+by+cz+d=0$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  - координаты нормали к плоскости.

Чтобы составить это уравнение, необходимо определить координаты трёх точек, лежащих в данной плоскости:  $A(1; 0; 0)$ ,  $B_1(0; 0; 1)$ ,  $C(0; 2; 0)$ .

Решая систему

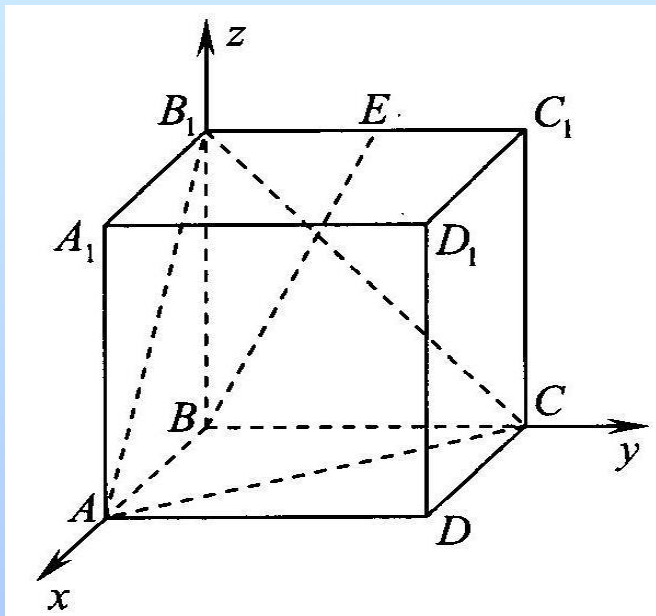
$$\begin{cases} a + d = 0, \\ c + d = 0, \\ 2b + d = 0, \end{cases}$$

находим коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  уравнения  $ax+by+cz+d=0$ :  $a=-d$ ,

$b = -\frac{d}{2}$ ,  $c=-d$ . Таким образом, уравнение примет вид

$-dx - \frac{d}{2}y - dz + d = 0$  или, после упрощения,  $2x+y+2z-2=0$ . Значит

нормаль  $n$  к этой плоскости имеет координаты  $\vec{n}\{2;1;2\}$ .



Длину вектора легко найти

геометрически:  $|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2}$

Но его координаты нам всё равно

необходимы. Из простых вычислений

находим, что  $\overrightarrow{BE} \{0; -1; -1\}$

Найдем угол между вектором и

нормалью к плоскости по формуле

скалярного произведения векторов:

$$\sin \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{|-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Ответ:  $45^\circ$**

**Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.**

**Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно вычислить:**

1) по формуле  $\sin \angle(\alpha, \beta) = \frac{\rho(M; \beta)}{\rho(M; l)}$ , где  $M \in \alpha, \alpha \cap \beta = l$

2) как угол между нормальными по формуле  $\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

или в координатной форме  $\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

где  $\vec{n}_1 \{A_1; B_1; C_1\}$  - вектор нормали плоскости  $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ ,

$\vec{n}_2 \{A_2; B_2; C_2\}$  - вектор нормали плоскости  $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ .

# Задача на нахождение угла между двумя плоскостями.

В единичном кубе  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол  
между плоскостями  $AD_1 E$  и  
 $D_1 F C$ , где точки  $E$  и  $F$ -  
середины ребер  $A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$ .

# Решение.

Введём прямоугольную систему координат. Тогда  $A(0;0;0)$ ,  $C(1;1;0)$ ,  $D_1(1;0;1)$ ,  $E(0;0,5;1)$ ,  $F(0,5;1;1)$ . 1) Решая систему

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ 0,5b + c + d = 0 \end{cases}$$

составляем уравнение плоскости  $AD_1E$ :

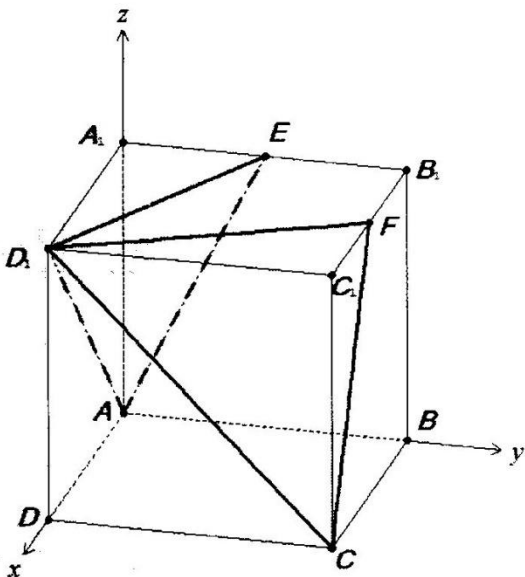
$$x + 2y - z = 0.$$

2) плоскость  $CFD_1$ :

$$\begin{cases} a + c + d = 0, \\ 0,5a + b + c + d = 0, \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

отсюда находим

уравнение  $2x + y + z - 3 = 0$ .



Найдём искомый угол как угол между нормальными плоскостей:

$$\vec{n}\{1;2;-1\}, \vec{m}\{2;1;1\} \quad \cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = 60^\circ$$

**Ответ:**  $60^\circ$

# Расстояние между точками A и B

МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ:

1) по формуле

$$\rho(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

где  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ;

2) по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$$



# Задача на нахождение расстояния между двумя точками.

---

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит ромб со стороной 2 и острым углом в  $60^\circ$ . Боковое ребро  $SA$  перпендикулярно основанию пирамиды и равно 4. Найдите расстояние от середины  $H$  ребра  $SD$  и серединой  $M$  ребра  $BC$ .

# Решение.

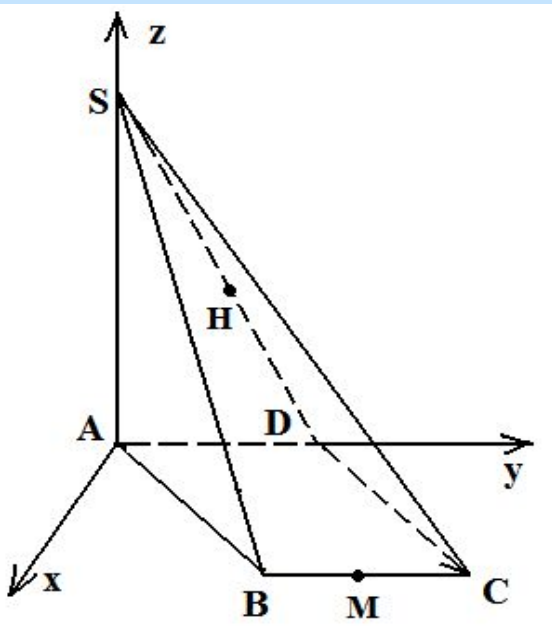
Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Найдём координаты точки  $H$  как координаты середины отрезка  $SD$ :  $S(0; 0; 4)$ ,  $D(0; 2; 0)$ .

$$x = \frac{0+0}{2} = 0, y = \frac{0+2}{2} = 1, z = \frac{4+0}{2} = 2 \Rightarrow H(0; 1; 2)$$

Чтобы найти координаты точек  $B$  и  $C$ , найдём координаты их проекций на оси.

$$AB_x = AC_x = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$AB_y = AC_y - 2 = 2 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$



Отсюда  $B(\sqrt{3}; 1; 0)$ ,  $C(\sqrt{3}; 3; 0)$ . Тогда координаты точки  $M$  равняются:

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, y = \frac{1+3}{2} = 2, z = \frac{0+0}{2} = 0 \Rightarrow M(\sqrt{3}; 2; 0)$$

Теперь находим расстояние между точками, заданными своими координатами:

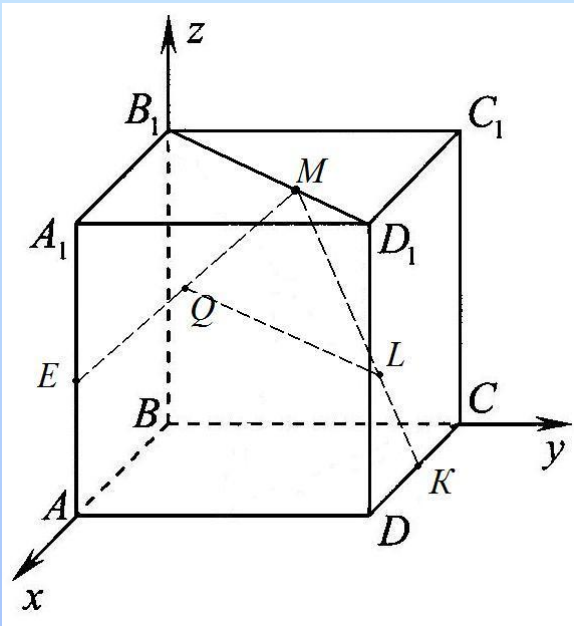
$$\rho(H; M) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ответ:  $2\sqrt{2}$

# Задача.

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $E$  и  $K$  - середины ребер  $AA_1$  и  $CD$  соответственно, а точка  $M$  расположена на диагонали  $B_1 D_1$  так, что  $B_1 M = 2 M D_1$ .  
Найдите расстояние между точками  $Q$  и  $L$ , где  $Q$  - середина отрезка  $EM$ , а  $L$  - точка отрезка  $MK$  такая, что  $ML = 2LK$ .

# Решение.



Введём декартову систему координат.

$E(1;0;0,5)$ ,  $K(0,5;1,0)$ ,  $B_1(0;0;1)$ ,  $D_1(1;1;1)$ .

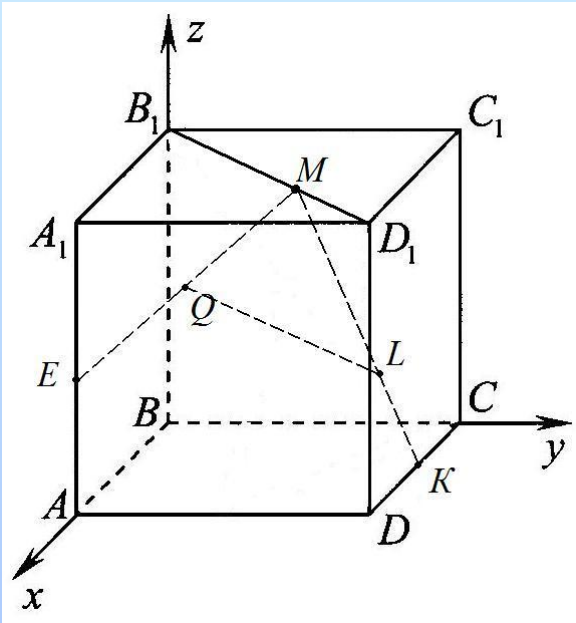
Чтобы вычислить координаты т.М, воспользуемся формулой для нахождения координат точки, которая делит отрезок  $B_1D_1$  в отношении  $\lambda=2:1$ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

$$x_M = \frac{0 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{0 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}, z_M = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1 \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$$

Аналогично находим координаты точки L:

$$x_L = \frac{\frac{2}{3} + 2 \cdot 0,5}{2 + 1} = \frac{5}{9}, y_L = \frac{\frac{2}{3} + 2}{3} = \frac{8}{9}, z_L = \frac{1}{3} \Rightarrow L\left(\frac{5}{9}; \frac{8}{9}; \frac{1}{3}\right)$$



Координаты точки Q находим по формуле координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\rho(Q; L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{18}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{324}} = \frac{13}{18}$$

**Ответ:**  $\frac{13}{18}$ .

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$

1) вычисляется по формуле  $\rho = \rho_1 \frac{r}{r_1}$ , где  $\rho = \rho(M; \alpha)$ ,  $\rho_1 = \rho(M_1; \alpha)$ ,  $OM = r$ ,  $OM_1 = r_1$ ,  $MM_1 \perp \alpha$ ; в частности,  $\rho = \rho_1$ , если  $r = r_1$ : прямая  $m$ , проходящая через точку  $M$ , пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $O$ , а точка  $M_1$  лежит на прямой  $m$ ;

2) вычисляется по формуле

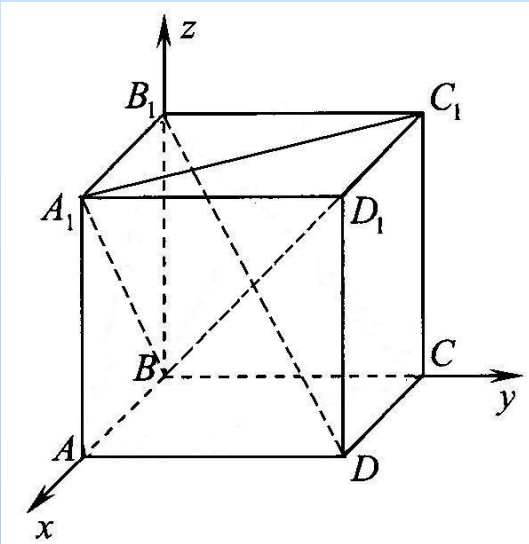
где  $M(x_0; y_0; z_0)$ , плоскость  $\alpha$  задана уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ ;

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

# Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости.

В кубе  $ABCA_1B_1C_1D_1$   
проведена диагональ  $B_1D$ . В каком  
отношении, считая от вершины  $B_1$ ,  
плоскость  $A_1BC_1$  делит  
диагональ  $B_1D$ ?

# Решение.



Составим уравнение плоскости  $A_1BC_1$  и найдём расстояние от этой плоскости до каждой из точек  $B_1$  и  $D$ . Пусть  $l$  - ребро куба.  $B(0;0;0)$ ,  $A_1(l;0;l)$ ,  $C_1(0;l;l)$ .

Решив систему 
$$\begin{cases} d = 0, \\ la + lz + d = 0, \\ lb + lc + d \end{cases}$$

определяем, что уравнение плоскости имеет вид:  $x+y-z=0 \rightarrow a=1, b=1, c=-1$ .  $B_1(0;0;1)$ ,  $D(1;1;0)$ .

Теперь найдём расстояние от каждой точки до плоскости по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho_1(D; A_1C_1B) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\rho_2(B_1; A_1C_1B) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rho_1 : \rho_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 : 1$$

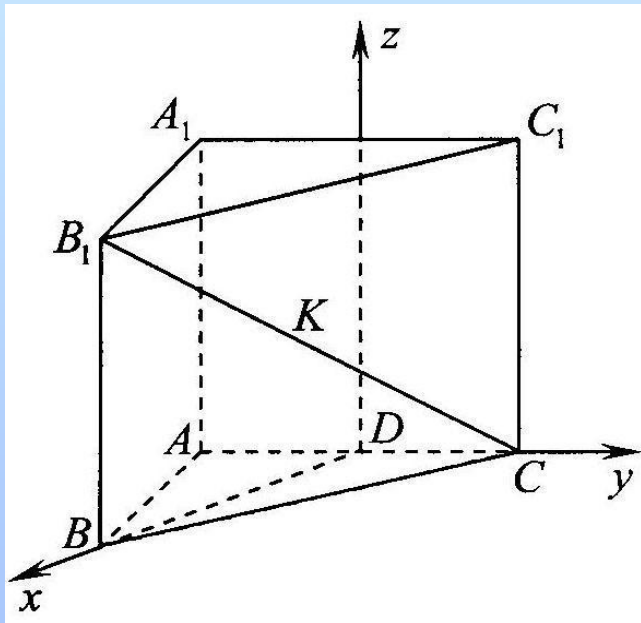
**Ответ: 2:1.**



# Задача.

Основание прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  – равнобедренный треугольник  $ABC$ , основание  $AC$  и высота  $BD$  которого равны 4. Боковое ребро равно 2. Через середину  $K$  отрезка  $B_1C_1$  проведена плоскость, перпендикулярная к этому отрезку. Найдите расстояние от вершины  $A$  до этой плоскости.

# Решение.



Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной призмы и точки  $K$  в этой системе координат:  $A(0;-2;0)$ ,  $B(0;0;0)$ ,  $C(0;2;0)$ ,  $B_1(4;0;2)$ ,  $K(2;1;1)$ . Тогда  $\overrightarrow{B_1C} \{-4;2;-2\}$ . Этот вектор перпендикулярен плоскости, значит, он является его нормалью. К тому же плоскость проходит через точку  $K$ . То есть уравнение плоскости имеет вид  $-2(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0$  или, после упрощения,  $2x-y+z-4=0$ .

Теперь находим расстояние от т.  $A(0;-2;0)$  до плоскости:

$$\rho(A; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Как вы видите, все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), координатным методом получаются в ходе несложных алгебраических вычислений. Нам не нужно задумываться, к примеру, как проходит та или иная плоскость, как упадет перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, каким образом скрещивающиеся прямые перенести, чтобы они были пересекающимися и т.д. Нам просто надо поместить тело в прямоугольную систему координат, определить координаты точек, векторов или плоскостей и воспользоваться формулой.

**Благодаря**

---

**м за**

**внимание!**

---