

**Математика 11 класс**  
**Модуль «Геометрия»**

**«Угол между векторами. Скалярное  
произведение векторов»**

**Климова О.Н., учитель математики высшей  
квалификационной категории  
МБОУ СОШ №108 г. Новосибирска**

# Угол между векторами

Рисунок 1



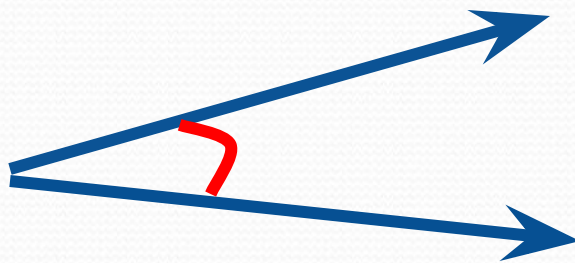
1. Вектора называются .....

2. Угол между векторами равен.....?

# Угол между векторами

Рисунок 2

- Если векторы не являются сонаправленными, то лучи образуют угол

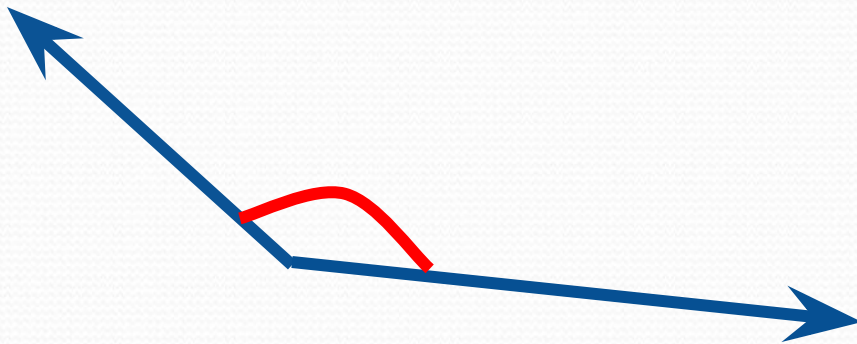


**1. острый угол**

# Угол между векторами

Рисунок 2

- Если векторы не являются сонаправленными, то лучи образуют угол

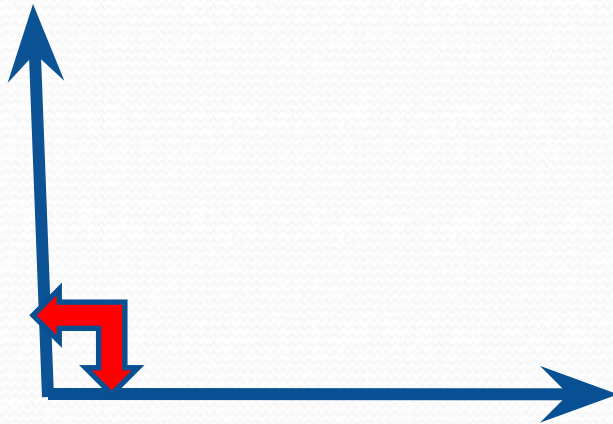


**2. тупой угол**

# Угол между векторами

Рисунок 2

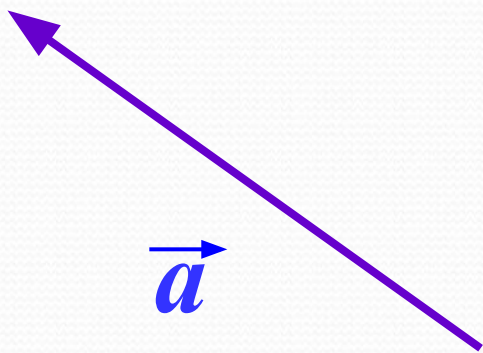
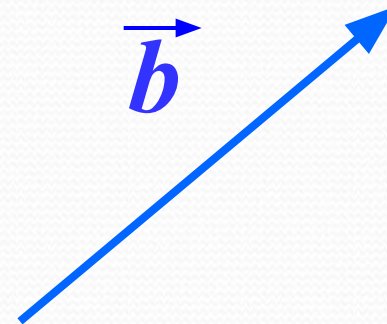
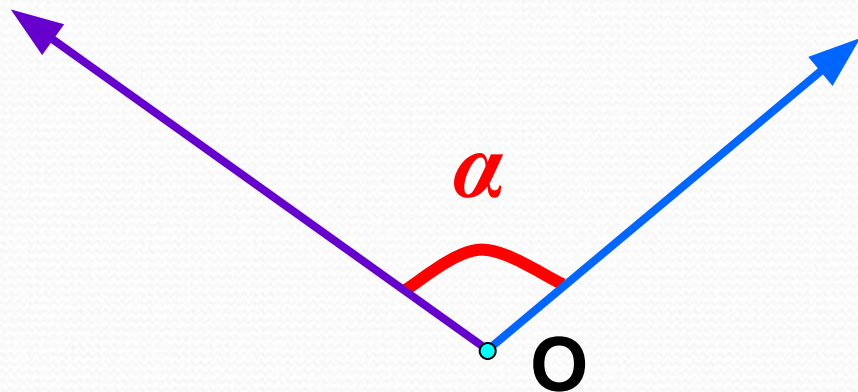
- Если векторы не являются сонаправленными, то лучи образуют угол



**2. прямой угол**

Вектора называются перпендикулярными

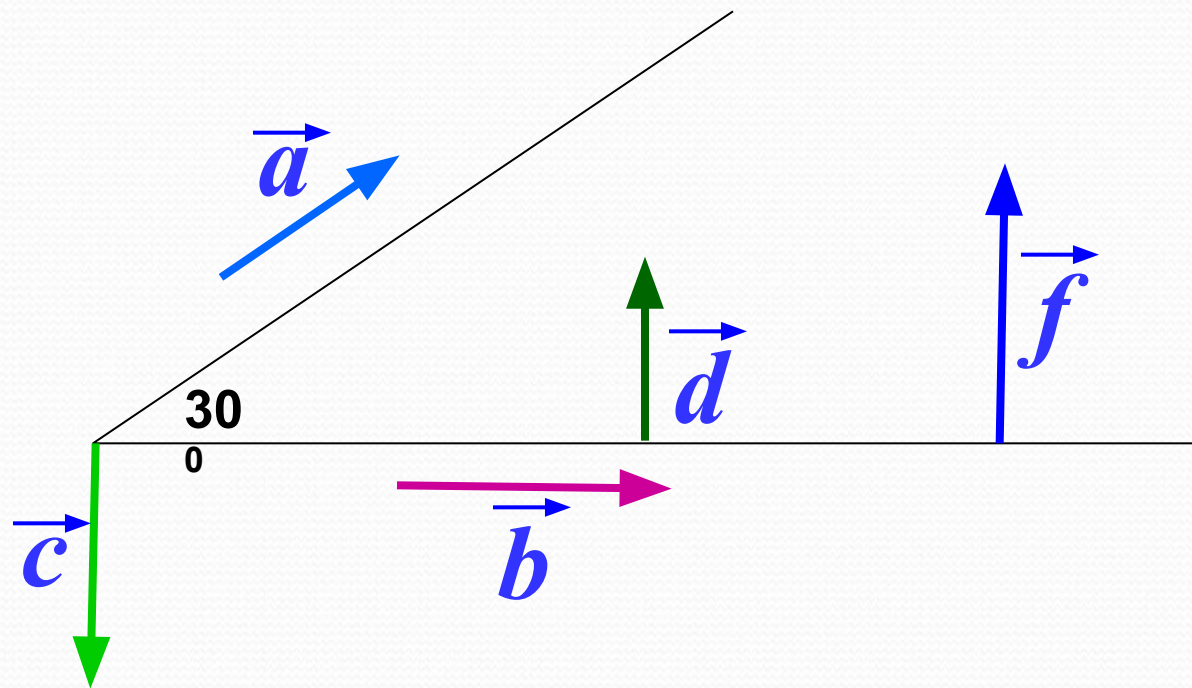
# Построение угла между векторами



Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\alpha$ .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

# Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

# Скалярное произведение векторов

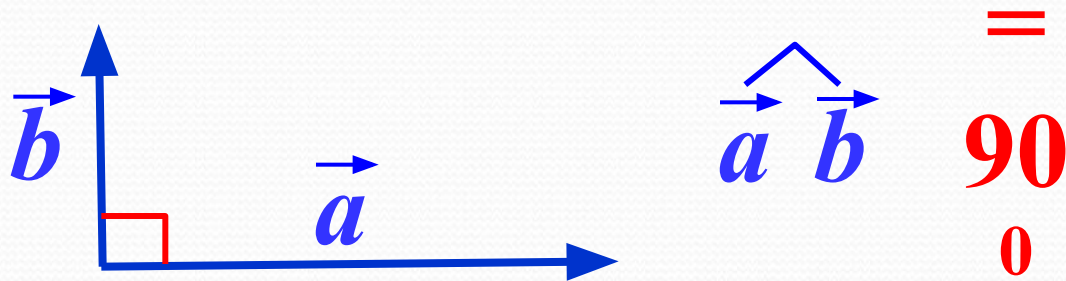
Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).



# Угол между векторами

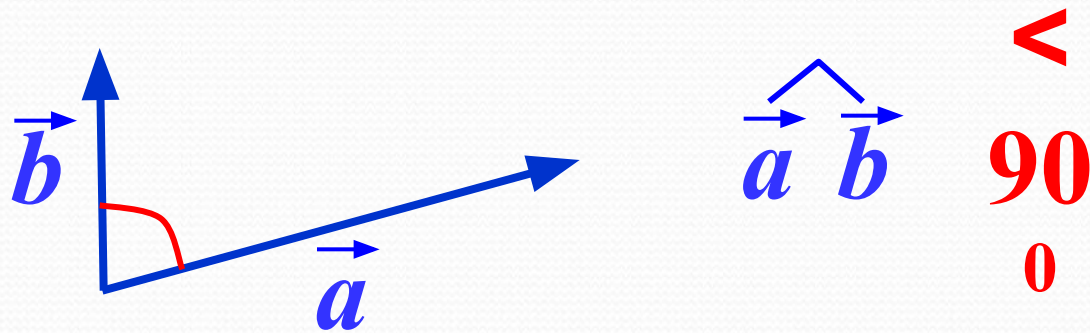


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов **равно нулю** тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

# Угол между векторами



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad >$$

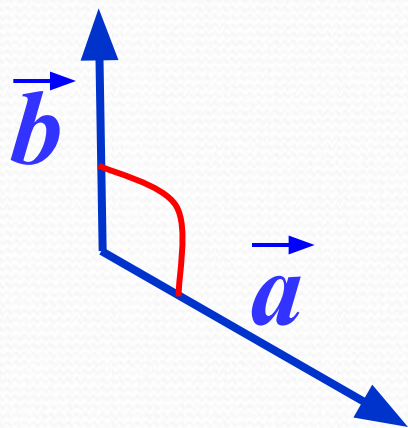
$0$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \quad \vec{b} \quad <$$

$90$   
 $0$

# Угол между векторами



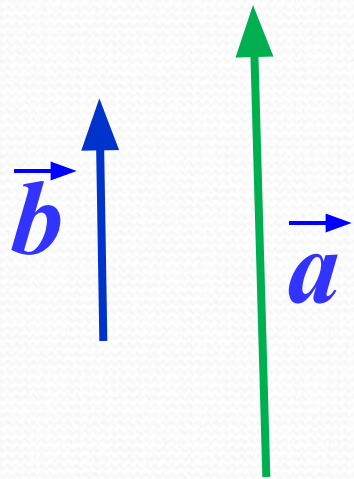
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

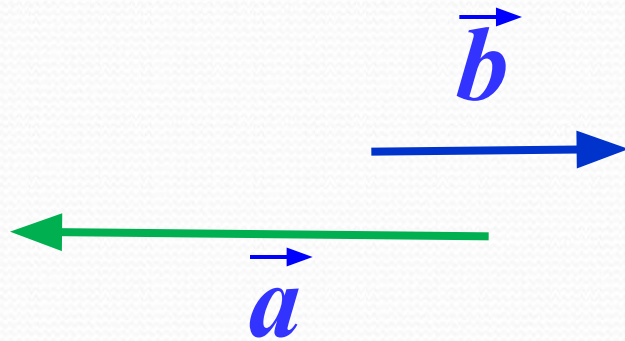
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

# Угол между векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ \quad \cos 0^\circ = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



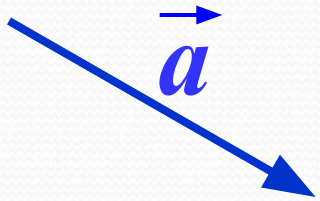
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

# Угол между векторами

$$\overbrace{\vec{a} \quad \vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется  
скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$  и обозначают  $\vec{a}^2$

**Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

# Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

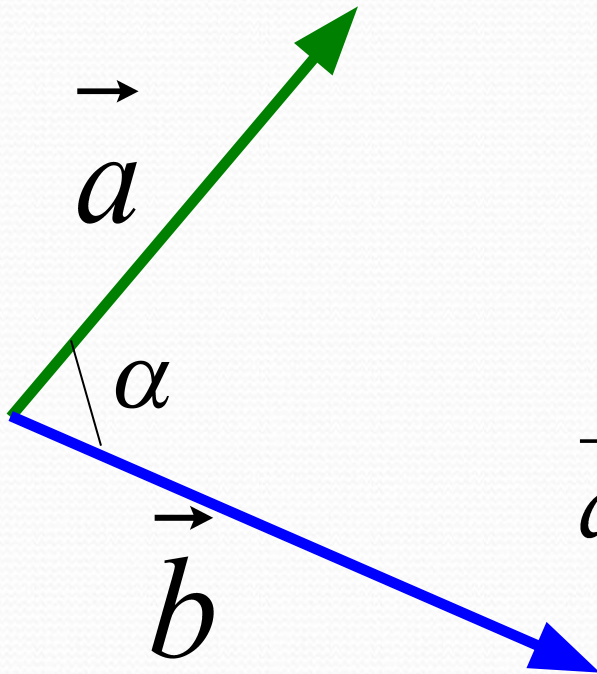
*Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.*

## Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## Скалярное произведение векторов



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



