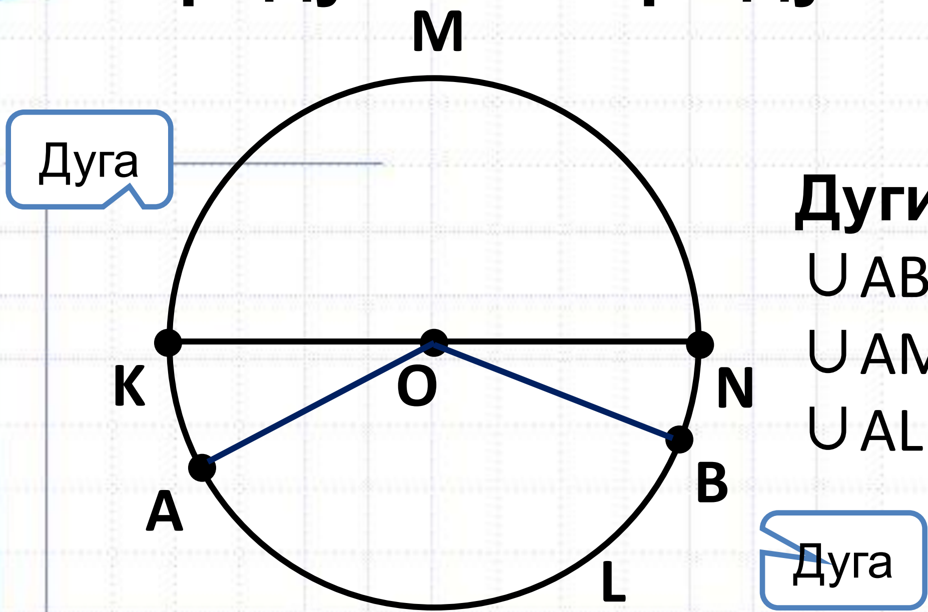
П. №72-73.

# Центральные и вписанные углы

*

# I. Градусная мера дуги окружности




**Дуги:**
∪AB
∪AMB
∪ALB

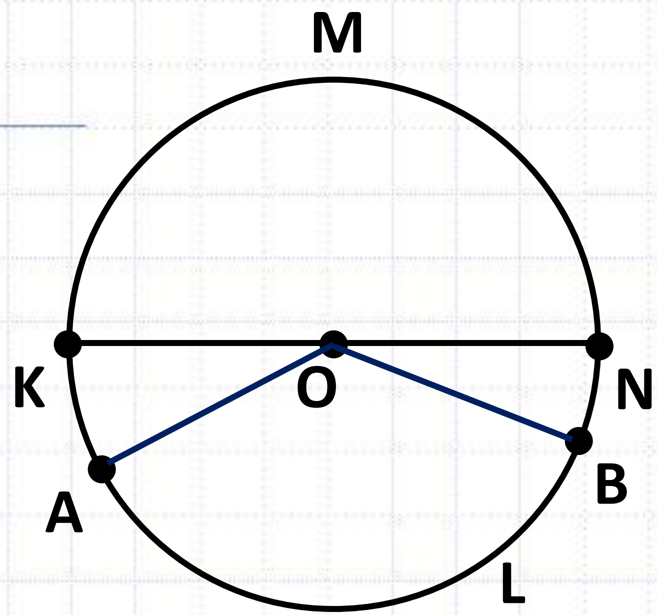
**Полуокружность –** Это дуга, у которой отрезок, соединяющий её концы, является диаметром.
∪*KN* - *полуокружность*

**Центральный угол –** угол с вершиной в центре окружности

*∠AOB – центральный угол*

*∠KON – развёрнутый центральный угол (ему соответствует 2 полуокружности)*

*∠AOB – неразвёрнутый:*
⇒ ∪ALB меньше полуокружности
⇒ ∪AMB больше полуокружности




∪AMB = 360° - ∠AOB
∪ALB = ∠AOB

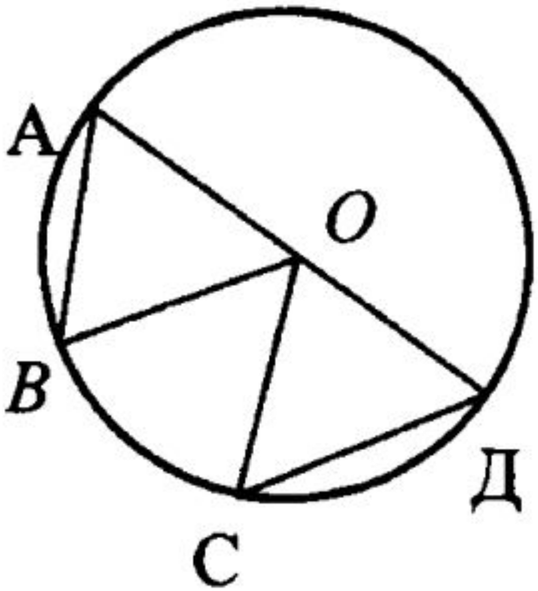
Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360 °

Если ∪ AB ω (O, r) меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера равна градусной мере центрального угла AOB.

Если ∪ AB больше полуокружности, то её градусная мера 360° - ∠AOB.

**№716**

Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$.




**Дано:**

$\omega(O, r)$,

$A \in \omega$, $B \in \omega$, $C \in \omega$, $D \in \omega$,

$\cup AB = \cup CD$

**Доказать:**

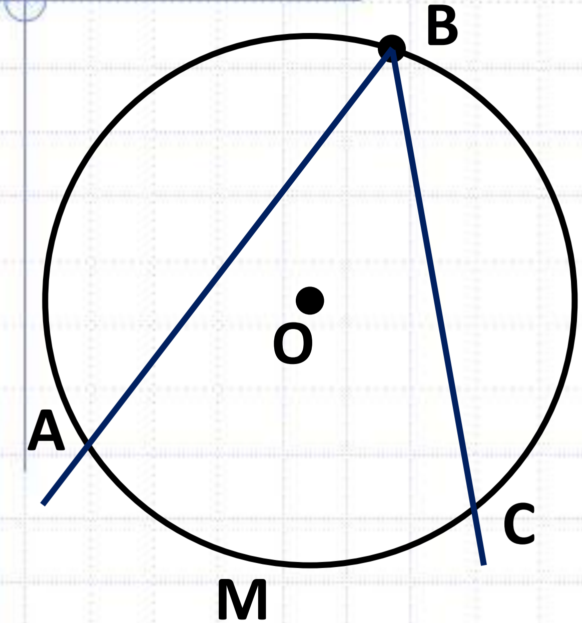
$AB = CD$

**Доказательство:**

1. $(\cup AB = \angle AOB) \wedge (\cup CD = \angle COD)$
2. $\cup AB = \cup CD \Rightarrow \angle AOB = \angle COD$
3. $(AO = OD = OC = OB = r) \wedge (\angle AOB = \angle COD) \Rightarrow$ $\Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow AB = CD$

ЧТД

# II. Вписанный угол (ВУ)




**ВУ –**

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны её пересекают.

$\angle ABC$ *– вписанный угол*

$\cup$AMC расположена внутри угла $\Rightarrow$

$\angle ABC$ *опирается на* $\cup$AMC

**Теорема о вписанном угле**

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Случаи расположения луча ВО относительно ∠ABC

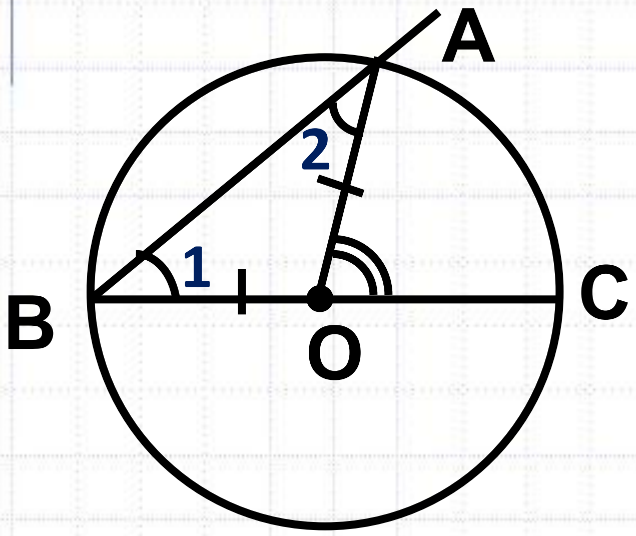
**1. Луч ВО совпадает с одной из сторон ∠ABC**

**Дано:** ω (O, r),

∠ABC – вписанный угол, опирающийся на ∪AC

A∈ω, B∈ω, C∈ω

**Доказать:** ∠ABC = ½ ∪AC

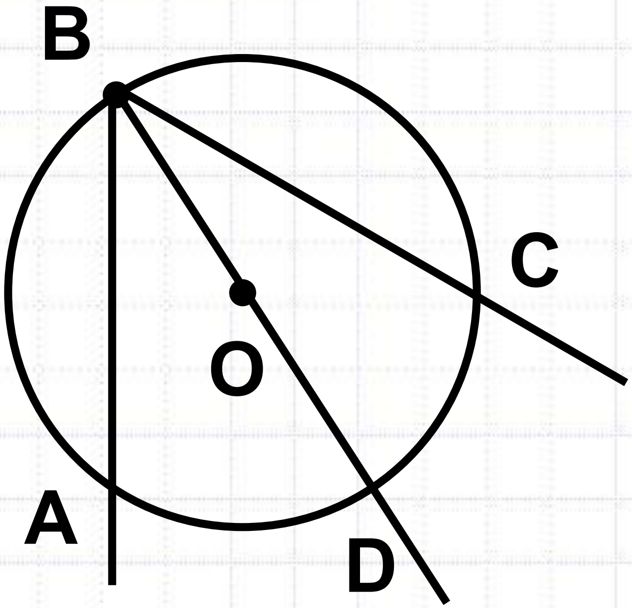



**Доказательство:**

1. ∪AC < полуокружности ⇒ ∠AOC = ∪AC
2. ∠AOC – внешний угол ΔAOB ⇒ ∠AOC = ∠1 + ∠2
3. BO = OA = r ⇒ ΔAOB – равнобедренный ⇒ ∠1 = ∠2
4. П. 2, п. 3 ⇒ ∠AOC = 2 · ∠1 ⇒ ∠ABC = ½ ∪AC

**ЧТД**

2. Луч ВО делит ∠АВС на два угла



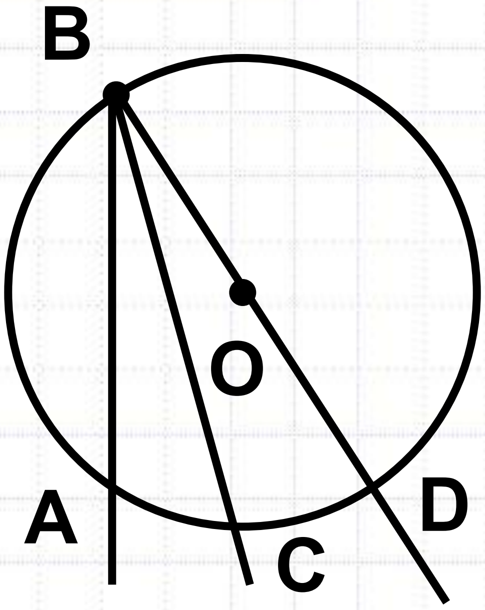

**Дано:** ω (O, r),
∠ABC – вписанный угол, опирающийся на ∪AC
A∈ω, B∈ω, C∈ω
**Доказать:** ∠ABC = ½ ∪AC

**Доказательство:**

1. BO ∩ ∪AC = {D}
2. ∠ABC = ∠ABD + ∠DBC
3. ∠ABD = ½ ∪AD, ∠DBC = ½ ∪DC (Случай №1)
4. ∠ABC = ½ ∪AD + ½ ∪DC ⇒ ∠ABC = ½ ∪AC

**ЧТД**

**3. Луч BO не делит ∠ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла**



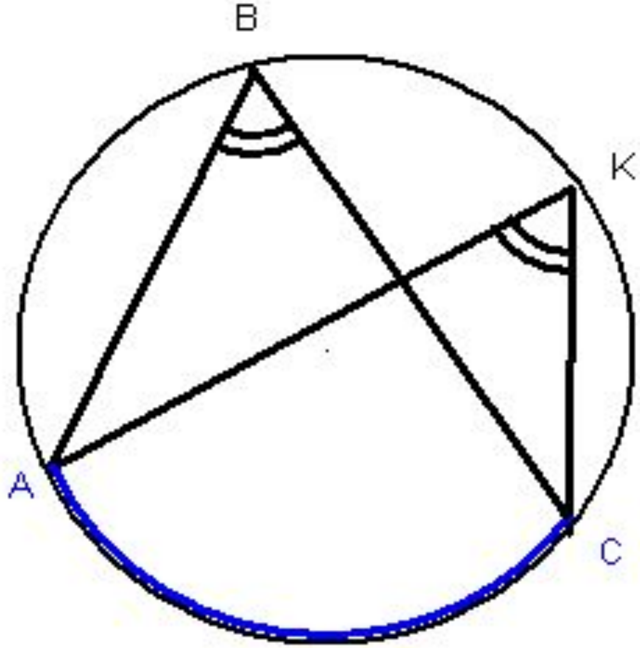

**Дано:** ω (O, r),
∠ABC – вписанный угол, опирающийся на ∪AC
A∈ω, B∈ω, C∈ω
**Доказать:** ∠ABC = ½ ∪AC

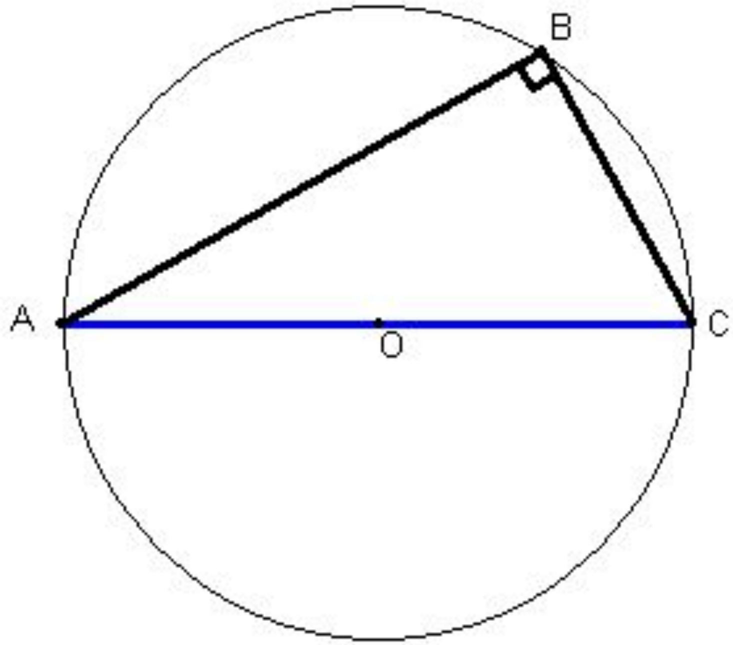
**Доказательство:**

1. BO ∩ ∪AC = {D}
2. ∠ABC = ∠ABD - ∠DBC
3. ∠ABD = ½ ∪AD, ∠DBC = ½ ∪DC (Случай №1)
4. ∠ABC = ½ ∪AD - ½ ∪DC ⇒ ∠ABC = ½ ∪AC

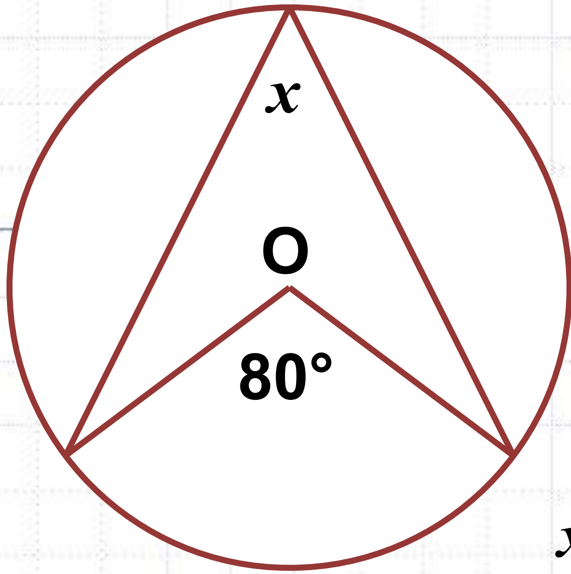
**ЧТД**

**Следствие 1.**
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны

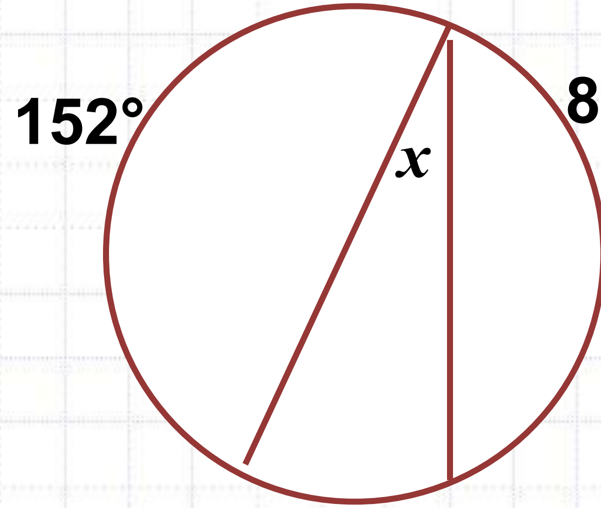


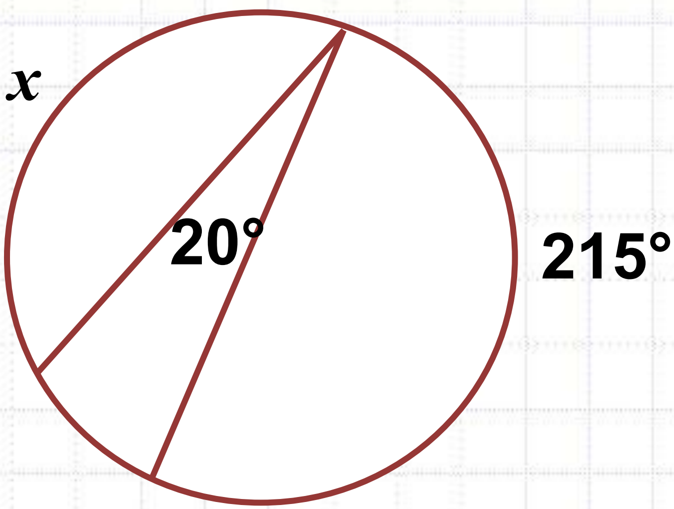

**Следствие 2.**
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, - прямой.



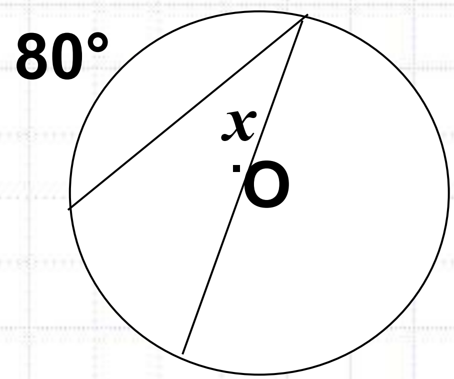

$x = 40°$




$x = 64°$



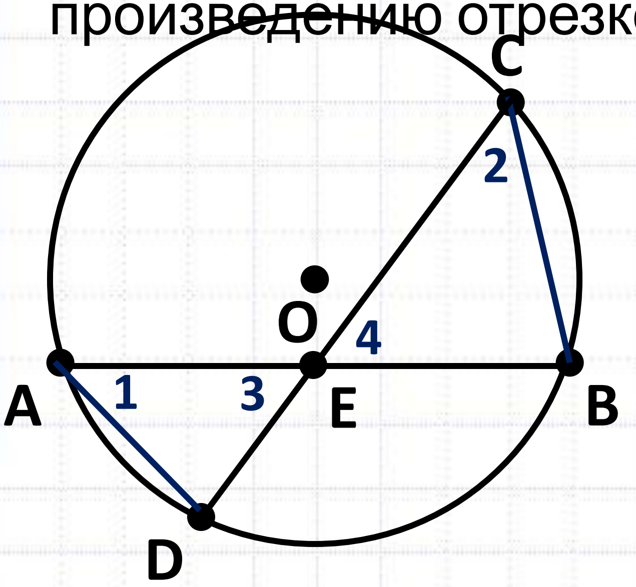

$x = 105°$




$x = 50°$

**Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд**

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.




**Дано:** ω (O, r),

A∈ω, B∈ω, C∈ω, D∈ω,

AB ∩ CD = {E}

**Доказать:**

AE · BE = CE · DE

**Доказательство:**

1. ∠1 и ∠2 опираются на ∪DB , ∠1 = ∠2 (Следствие 1)
2. ∠3 = ∠4 (Как вертикальные)
3. П.1, п.2 ⇒ ΔADE ~ ΔCBE (1 ППТ) ⇒

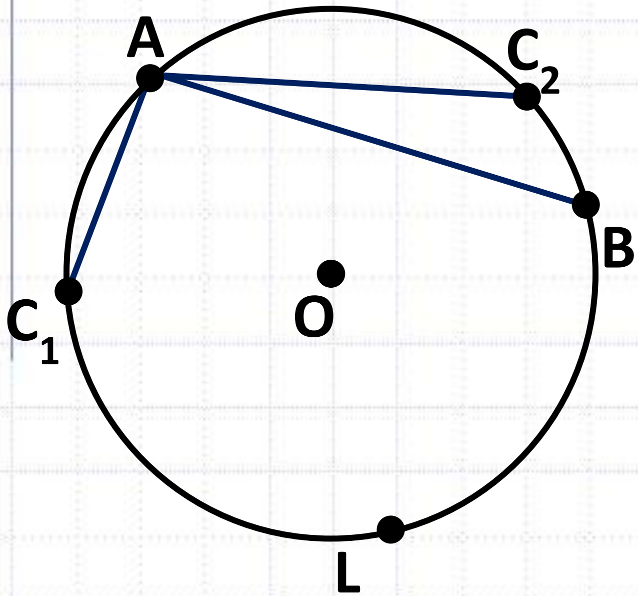
$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

**ЧТД**

# III. Решение задач

**№656**

Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC – дугу в 43°. Найдите угол BAC




**Решение:**

1. $\angle BAC = ½ \cup BC$
2. $C_1 \in \cup ALB$

   $\cup BC_1 = 360° - \cup AC_1 - \cup AB =$
   $360° - 43° - 115° = 202°$

   $\angle BAC_1 = ½ \cdot 202° = 101°$
3. $C_2 \notin \cup ALB$

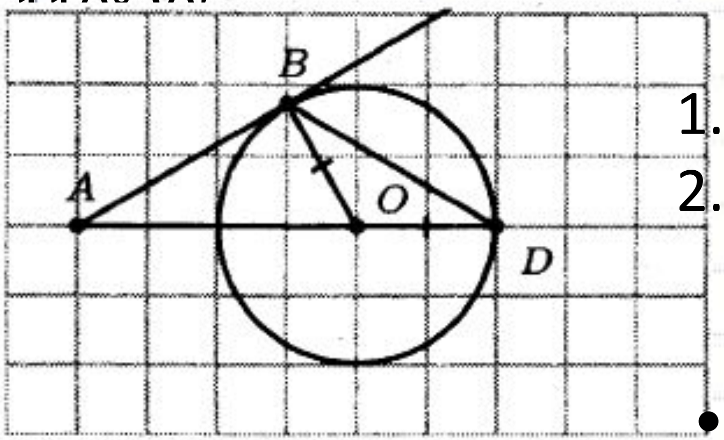
   $\cup BC_2 = \cup AB - \cup AC_2 - =$
   $115° - 43° = 72°$

   $\angle BAC_2 = ½ \cdot 72° = 36°$

**Ответ:** 101°, 36°

**№658**

Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B – точка касания) и секущая AD, проходящая через центр O (D – точка окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\cup BD = 110°20'$




**Решение:**

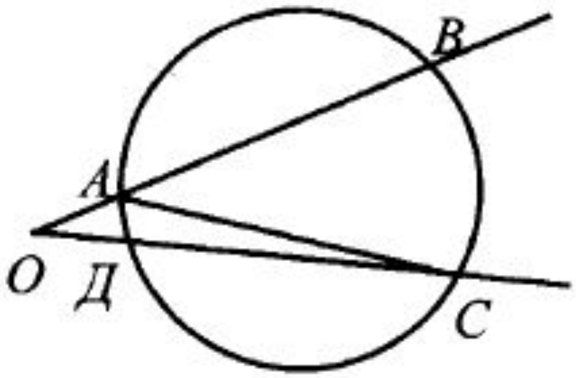
1. $\cup BD = \angle BOD = 110°20'$
2. $\angle ABO = 90° \Rightarrow$
   $\angle BAD = \angle BOD - 90° = 20°20'$
   (т.к. $\angle BOD$ внешний угол $\Delta ABO$)

- $BO = OD = r \Rightarrow \Delta BOD$ – равнобедренный $\Rightarrow$
  $\angle OBD = \angle BDO = \angle ADB \Rightarrow$
  $\angle ADB = (180° - \angle BOD) / 2 = 34°50'$

**Ответ:** 20°20′, 34°50′

**№661**

Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключенные между секущими, равны 140° и 52°.




**Решение:**

1. $\frac{1}{2}\cup BC = \angle BAC = 70°$
2. $\frac{1}{2}\cup AD = \angle ACD = 26°$
3. $\angle BAC$ внешний угол $\Delta OAC \Rightarrow$

$\angle AOD = \angle BAC - \angle OCA \Rightarrow$

$\angle AOD = 70° - 26° = 44°$

**Ответ:** 44°

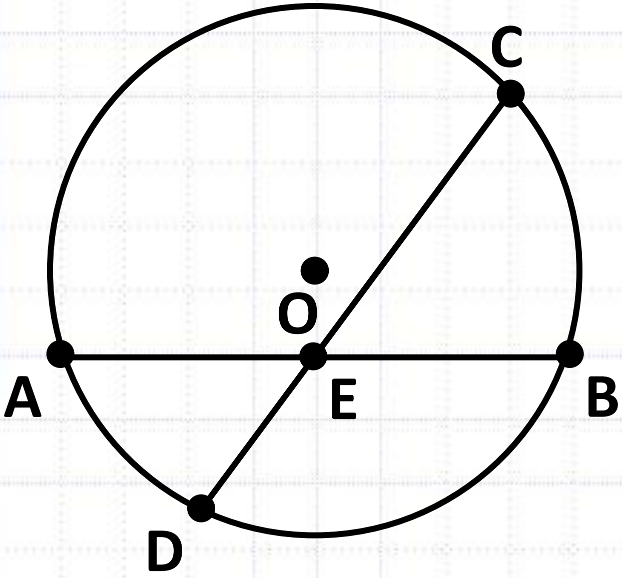
**№666**

Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если:

А) AE =5, BE = 2, CE = 2,5

Б) AE =16, BE = 9, CE = ED

В) AE =0,2, BE = 0,5, CE = 0,4




**Дано:** ω (O, r),

AB ∩ CD = {E}

**Найти:** ED

**Решение:**

AE · BE = CE · DE (по теореме о пересекающихся хордах) ⇒

$$ED = \frac{AE \cdot BE}{CE}$$

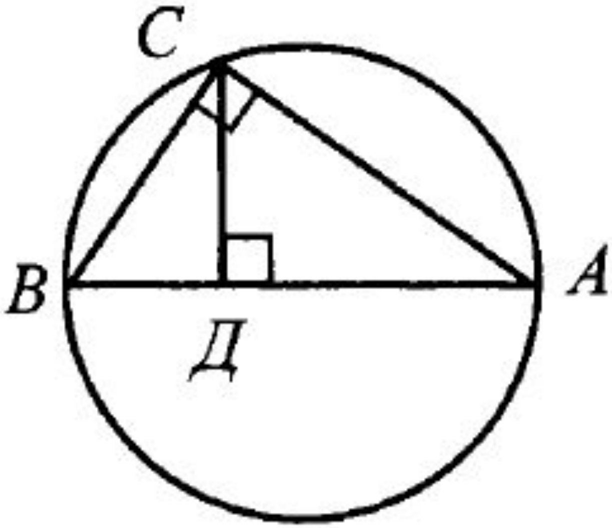
а) $ED = \frac{2 \cdot 5}{2{,}5} = 4$

б) $ED = \frac{16 \cdot 9}{ED} \rightarrow ED = 12$

в) $ED = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}4} = 0{,}25$

**№668**

Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.




**Доказательство:**

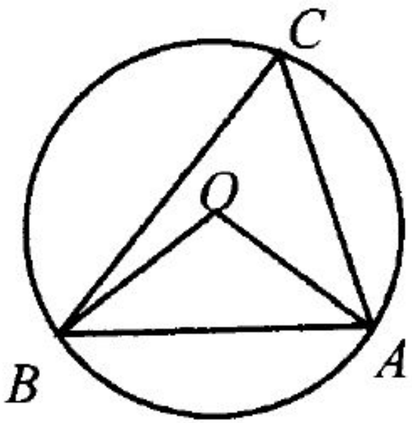
∠ACB вписанный и опирается на полуокружность ⇒

∠ACB = 90° ⇒ $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$

**ЧТД**

## IV. Самостоятельная работа

*Вариант I.*




1. Точки $A$, $B$, $C$ лежат на окружности с центром $O$, $\angle AOB = 80°$, $\cup AC : \cup BC = 2 : 3$.
Найдите углы треугольника $ABC$.

2. Хорды $AB$ и $CД$ пересекаются в точке $K$, причем хорда $AB$ делится точкой $K$ на отрезки, равные 10 см и 6 см. На какие отрезки точка $K$ делит хорду $CД$, если $CД > AB$ на 3 см?

*Вариант II.*

1. Вершины треугольника $ABC$ лежат на окружности с центром $O$ (см. рис. к задаче 1 I варианта), $\angle ABC = 80°$, $\cup BC : \cup AB = 3 : 2$. Найдите углы треугольника $AOB$.

2. Хорды $MN$ и $KL$ пересекаются в точке $A$, причем хорда $MN$ делится точкой $A$ на отрезки, равные 1 см и 15 см. На какие отрезки точка $A$ делит хорду $KL$, если $KL$ в два раза меньше $MN$?

*

# Домашнее задание

1. П. 72-73
2. 650, 652, 657
3. 660, 663, 667