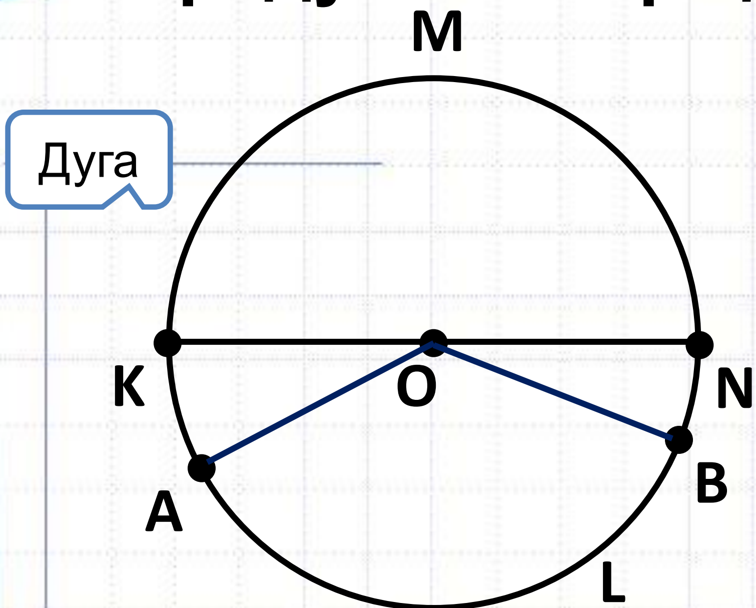
П. №72-73.

*

Центральные и вписанные углы

I. Градусная мера дуги окружности



Дуги:

$\cup AB$

$\cup AMB$

$\cup ALB$

Полуокружность – Это дуга, у которой отрезок, соединяющий её концы, является диаметром.

$\cup KN$ - *полуокружность*

Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности

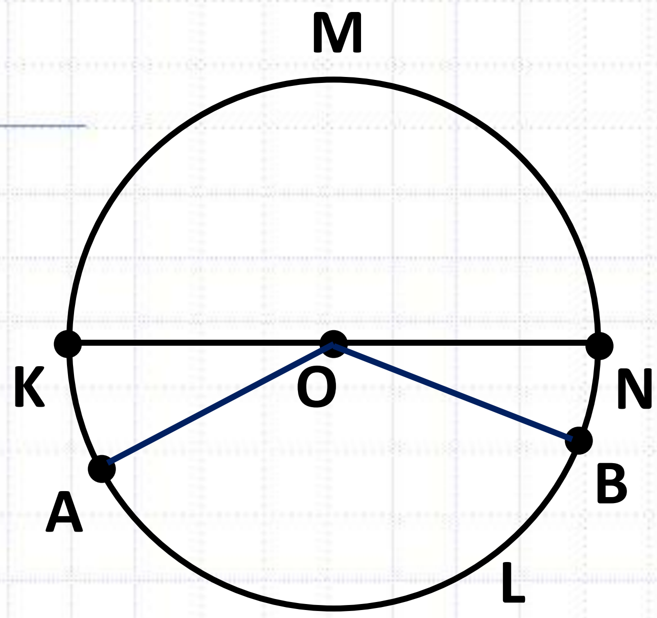
$\angle AOB$ – центральный угол

$\angle KON$ – развёрнутый центральный угол (ему соответствует 2 полуокружности)

$\angle AOB$ – неразвёрнутый:

$\Rightarrow$ $\cup ALB$ меньше полуокружности

$\Rightarrow$ $\cup AMB$ больше полуокружности



∪AMB = 360° - ∠AOB
∪ALB = ∠AOB

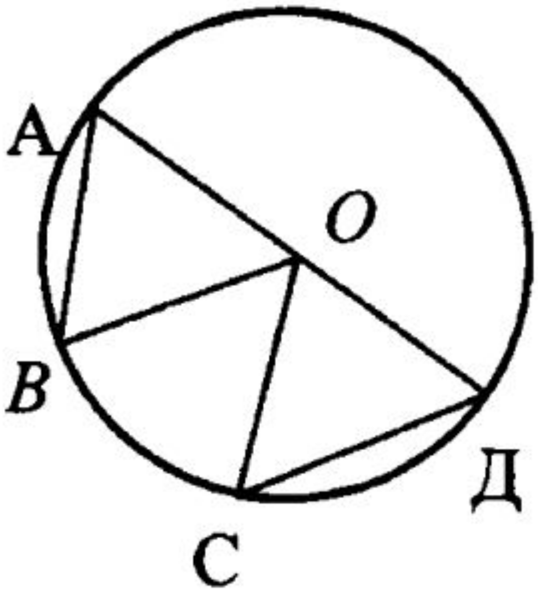
Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360 °

Если ∪ AB ω (O, r) меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера равна градусной мере центрального угла AOB.

Если ∪ AB больше полуокружности, то её градусная мера 360° - ∠AOB.

№716

Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\cup AB = \cup CD$, то AB = CD.



Дано:

ω (O, r),

$A \in \omega$, $B \in \omega$, $C \in \omega$, $D \in \omega$,

$\cup AB = \cup CD$

Доказать:

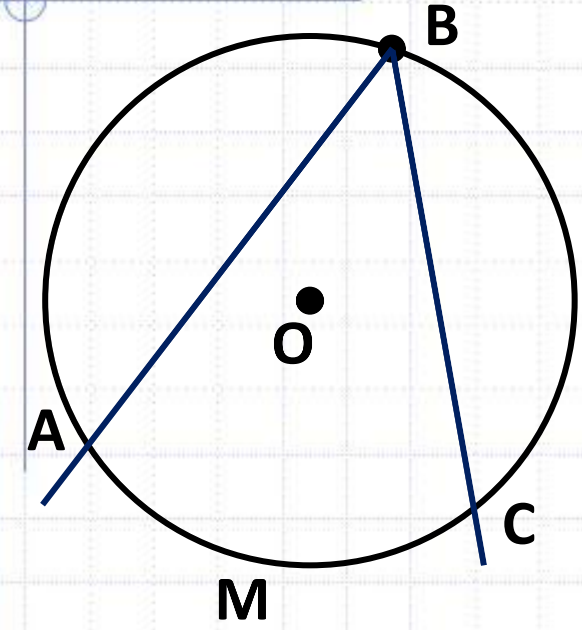
AB = CD

Доказательство:

1. $(\cup AB = \angle AOB) \wedge (\cup CD = \angle COD)$
2. $\cup AB = \cup CD \Rightarrow \angle AOB = \angle COD$
3. $(AO = OD = OC = OB = r) \wedge (\angle AOB = \angle COD) \Rightarrow$
   $\Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow AB = CD$

ЧТД

II. Вписанный угол (ВУ)



ВУ –

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны её пересекают.

$\angle ABC$ – *вписанный угол*

$\cup AMC$ расположена внутри угла $\Rightarrow$

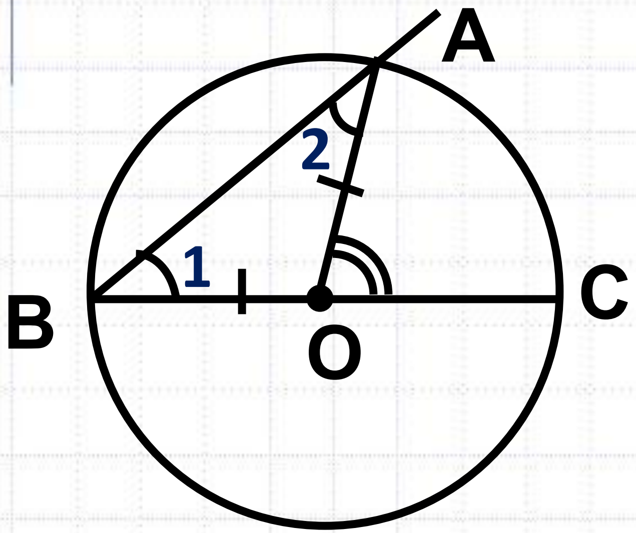
$\angle ABC$ *опирается на* $\cup AMC$

Теорема о вписанном угле
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Случаи расположения луча ВО относительно ∠ABC

1. Луч ВО совпадает с одной из сторон ∠ABC

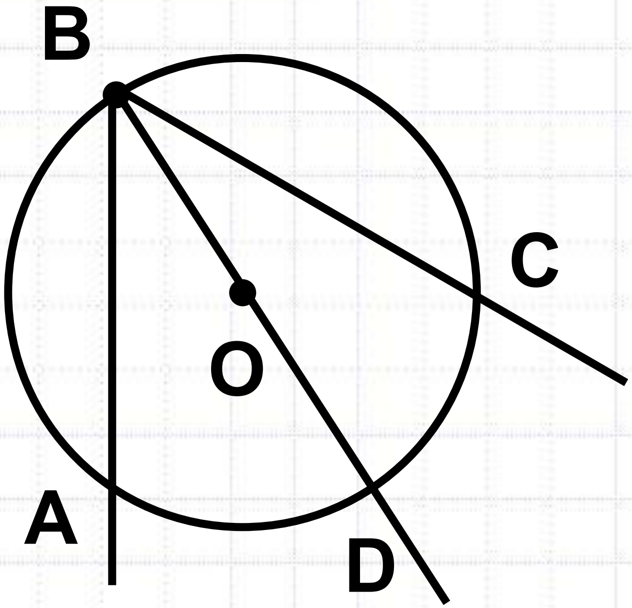
Дано: ω (O, r),
∠ABC – вписанный угол, опирающийся на ∪AC
A∈ω, B∈ω, C∈ω
Доказать: ∠ABC = ½ ∪AC



Доказательство:
1. ∪AC < полуокружности ⇒ ∠AOC = ∪AC
2. ∠AOC – внешний угол ΔAOB ⇒ ∠AOC = ∠1 + ∠2
3. BO = OA = r ⇒ ΔAOB – равнобедренный ⇒ ∠1 = ∠2
4. П. 2, п. 3 ⇒ ∠AOC = 2 · ∠1 ⇒ ∠ABC = ½ ∪AC

ЧТД

2. Луч ВО делит $\angle ABC$ на два угла



Дано: ω (O, r),
$\angle ABC$ – вписанный угол, опирающийся на $\cup AC$
$A \in \omega$, $B \in \omega$, $C \in \omega$

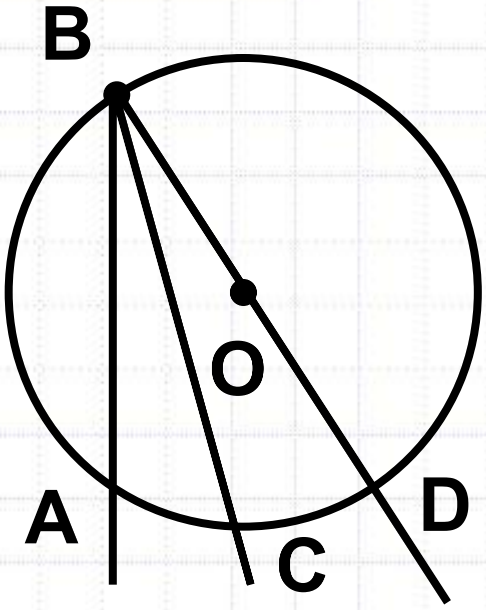
Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$

Доказательство:

1. $BO \cap \cup AC = \{D\}$
2. $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$
3. $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$ (Случай №1)
4. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC \Rightarrow$ $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$

ЧТД

3. Луч BO не делит ∠ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла



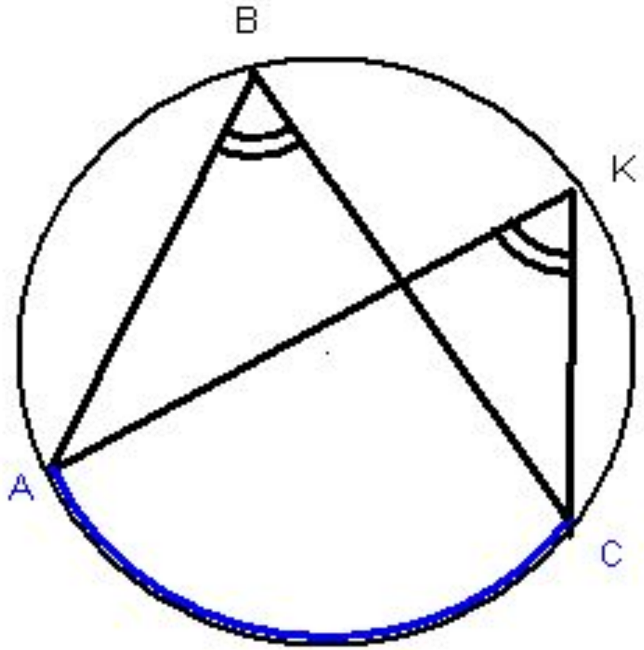
Дано: ω (O, r),
∠ABC – вписанный угол, опирающийся на ∪AC
A∈ω, B∈ω, C∈ω
Доказать: ∠ABC = ½ ∪AC

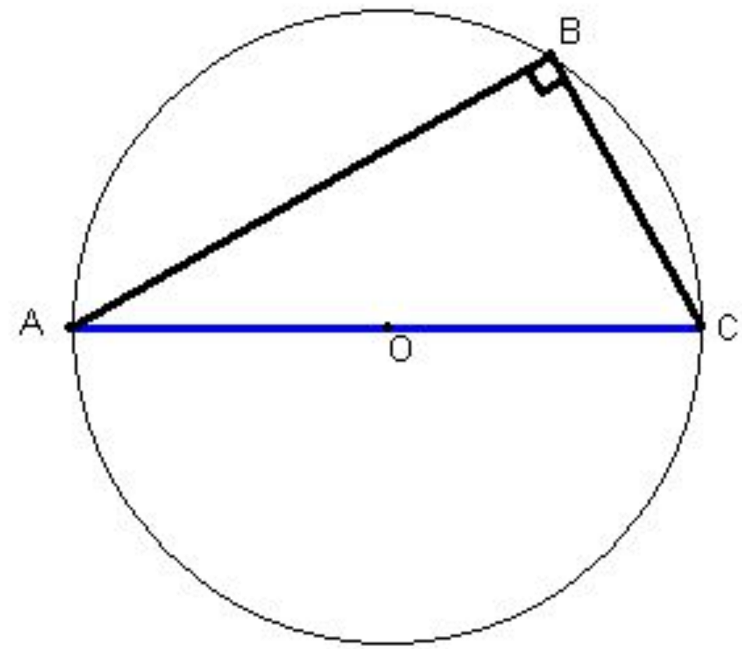
Доказательство:

1. BO ∩ ∪AC = {D}
2. ∠ABC = ∠ABD - ∠DBC
3. ∠ABD = ½ ∪AD, ∠DBC = ½ ∪DC (Случай №1)
4. ∠ABC = ½ ∪AD - ½ ∪DC ⇒ ∠ABC = ½ ∪AC

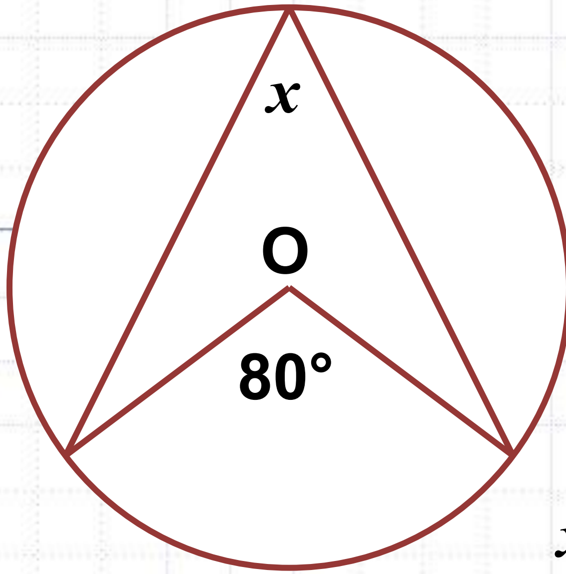
ЧТД

Следствие 1.
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны

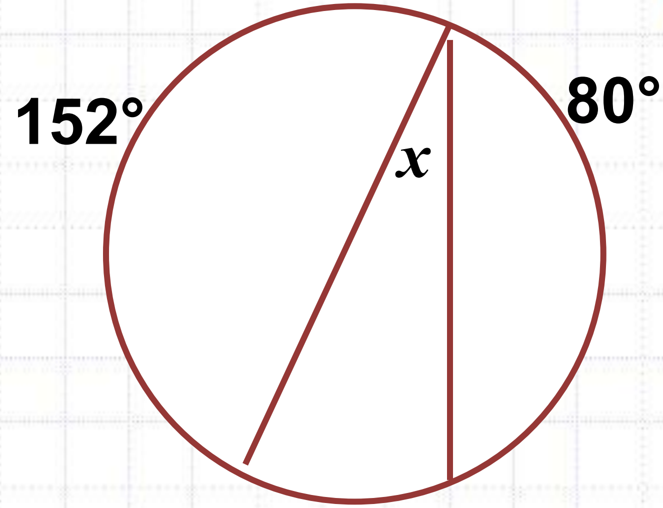




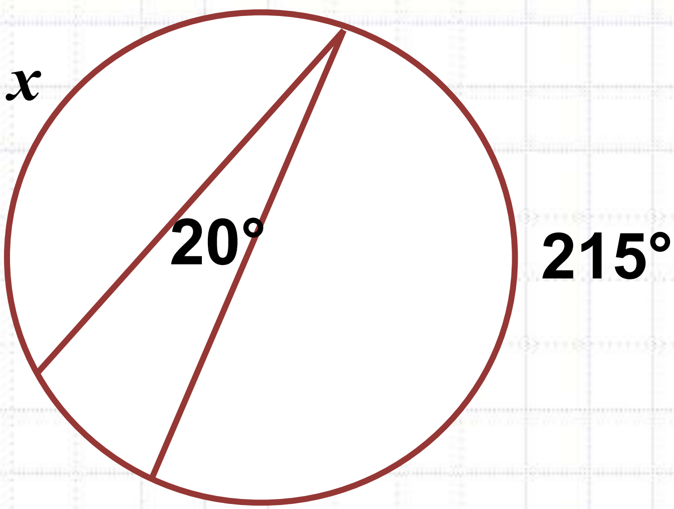
Следствие 2.
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, - прямой.



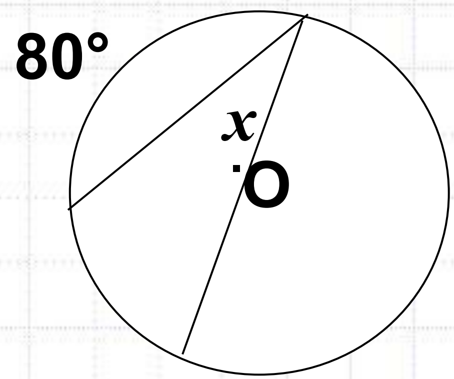
x = 40 °



x = 64 °



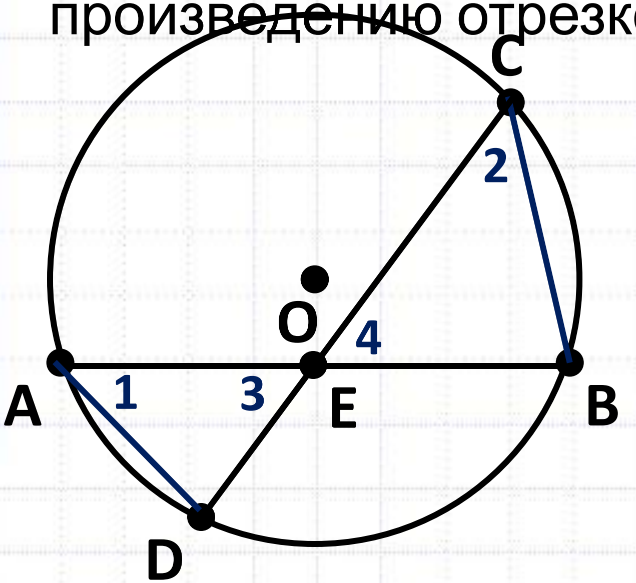
x = 105 °



x = 50 °

Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



Дано: ω (O, r),

A∈ω, B∈ω, C∈ω, D∈ω,

AB ∩ CD = {E}

Доказать:

AE · BE = CE · DE

Доказательство:

1. ∠1 и ∠2 опираются на ∪DB , ∠1 = ∠2 (Следствие 1)
2. ∠3 = ∠4 (Как вертикальные)
3. П.1, п.2 ⇒ ΔADE ~ ΔCBE (1 ППТ) ⇒

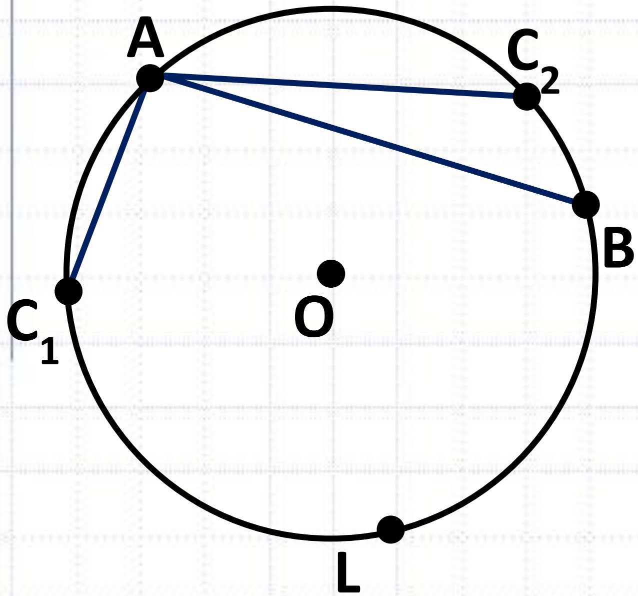
$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

ЧТД

III. Решение задач

№656

Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC – дугу в 43°. Найдите угол BAC



Решение:

1. $\angle BAC = ½ \cup BC$
2. $C_1 \in \cup ALB$

   $\cup BC_1 = 360° - \cup AC_1 - \cup AB =$
   $360° - 43° - 115° = 202°$

   $\angle BAC_1 = ½ \cdot 202° = 101°$
3. $C_2 \notin \cup ALB$

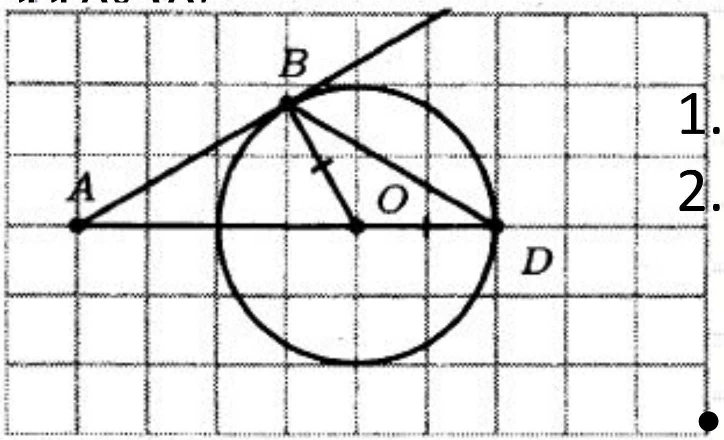
   $\cup BC_2 = \cup AB - \cup AC_2 - =$
   $115° - 43° = 72°$

   $\angle BAC_2 = ½ \cdot 72° = 36°$

Ответ: 101°, 36°

№658

Через точку А к данной окружности проведены касательная АВ (В – точка касания) и секущая AD, проходящая через центр О (D – точка окружности, О лежит между A и D). Найдите ∠BAD и ∠ADB, если ∪BD= 110°20′



Решение:

1. ∪BD = ∠BOD = 110°20′
2. ∠ABO = 90° ⇒

∠BAD = ∠BOD - 90° = 20°20′

(т.к. ∠BOD внешний угол ΔABO)

- BO = OD = r ⇒ ΔBOD – равнобедренный ⇒

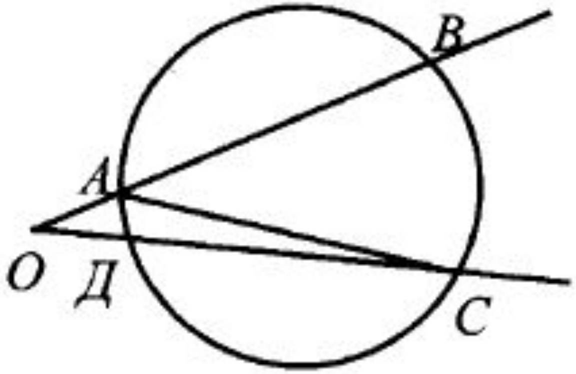
∠OBD = ∠BDO = ∠ADB ⇒

∠ADB = (180° - ∠BOD) / 2 = 34°50′

Ответ: 20°20′, 34°50′

№661

Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключенные между секущими, равны 140° и 52°.



Решение:

1. ½ $\cup BC = \angle BAC = 70°$
2. ½ $\cup AD = \angle ACD = 26°$
3. $\angle BAC$ внешний угол $\Delta OAC \Rightarrow$

$\angle AOD = \angle BAC - \angle OCA \Rightarrow$

$\angle AOD = 70° - 26° = 44°$

Ответ: 44°

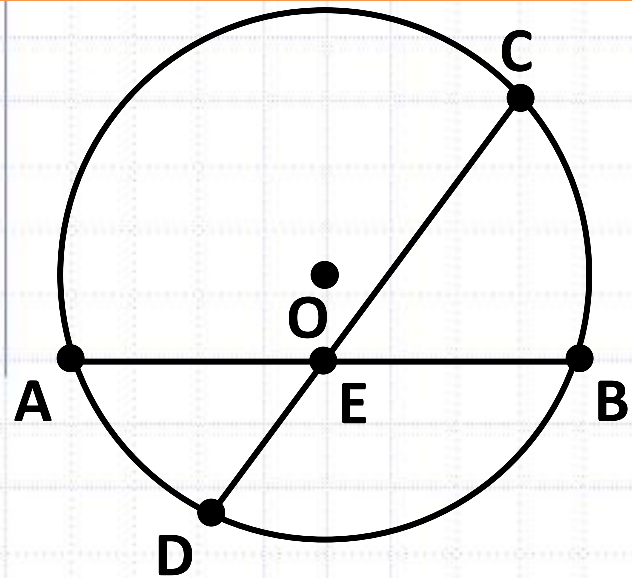
№666

Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если:

А) AE =5, BE = 2, CE = 2,5

Б) AE =16, BE = 9, CE = ED

В) AE =0,2, BE = 0,5, CE = 0,4



Дано: ω (O, r),

AB ⋂ CD = {E}

Найти: ED

Решение:

AE · BE = CE · DE (по теореме о пересекающихся хордах) ⇒

$$ED = \frac{AE \cdot BE}{CE}$$

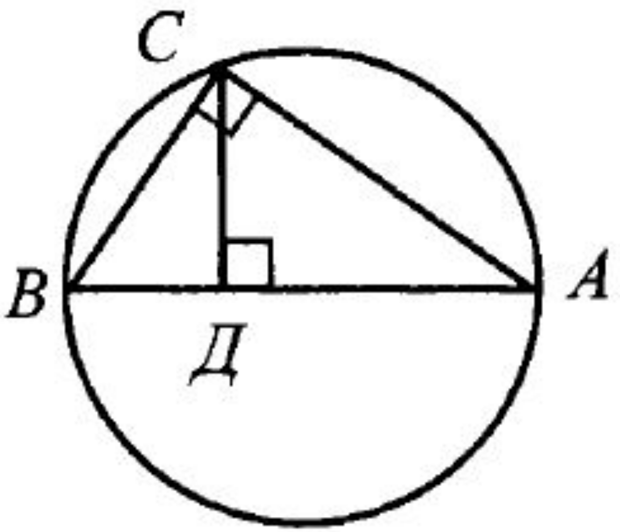
а) $ED = \frac{2 \cdot 5}{2,5} = 4$

б) $ED = \frac{16 \cdot 9}{ED} \to ED = 12$

в) $ED = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,4} = 0,25$

№668

Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.



Доказательство:

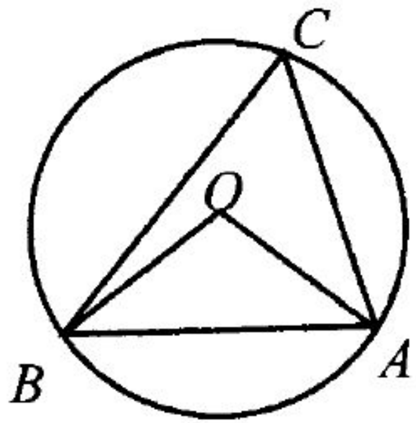
$\angle$ACB вписанный и опирается на полуокружность $\Rightarrow$

$\angle$ACB = 90° $\Rightarrow$ $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$

ЧТД

IV. Самостоятельная работа

Вариант I.



1. Точки A, B, C лежат на окружности с центром O, $\angle AOB = 80°$, $\smile AC : \smile BC = 2 : 3$.
Найдите углы треугольника ABC.

2. Хорды AB и $CД$ пересекаются в точке K, причем хорда AB делится точкой K на отрезки, равные 10 см и 6 см. На какие отрезки точка K делит хорду $CД$, если $CД > AB$ на 3 см?

Вариант II.

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O (см. рис. к задаче 1 I варианта), $\angle ABC = 80°$, $\smile BC : \smile AB = 3 : 2$. Найдите углы треугольника AOB.

2. Хорды MN и KL пересекаются в точке A, причем хорда MN делится точкой A на отрезки, равные 1 см и 15 см. На какие отрезки точка A делит хорду KL, если KL в два раза меньше MN?

*

Домашнее задание

1. П. 72-73
2. 650, 652, 657
3. 660, 663, 667