Проект на тему: «Теорема Менелая»

Проект выполнила: Клемина Елизавета Викторовна
ученица 9 класса «В»

Цели и задачи данного проекта:

- Выявить теоретические положения для доказательства теоремы и научно обосновать способы ее доказательства.
- Проанализировать теорему и ее применение при решении задач
- Проверить эффективность и целесообразность применения теоремы при решении задач.

Кто же такой Менелай?

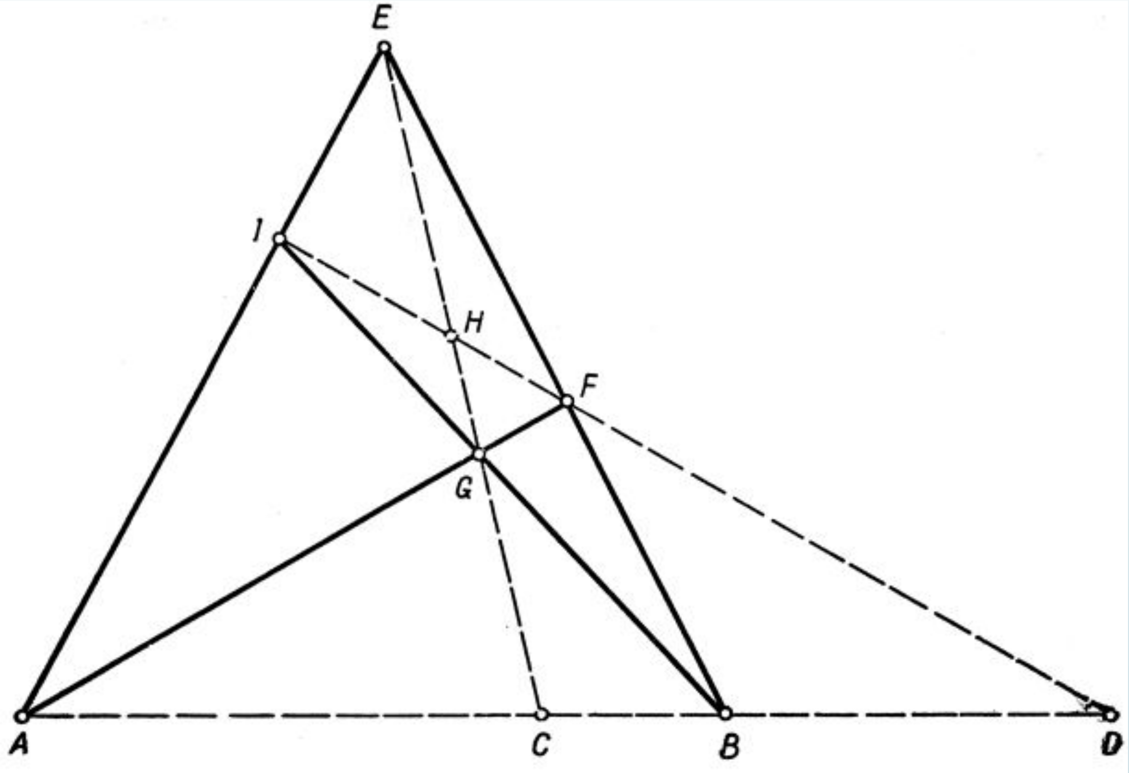
- Менела́й Александри́йский— древнегреческий математик и астроном.
- Главное сочинение Меналая — «Сферика» в трёх книгах. В I книге «Сферики» дается определение сферического треугольника и связанных с ним понятий.
- .Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему, известную сегодня как теорема Менелая.

Теорема Менелая

Сейчас мы более подробно ознакомимся с теоремой Менелая. Теоре́ма Менела́я или теорема о трансверсалях или теорема о полном четырёхстороннике — классическая теорема аффинной геометрии.

Понятие четырехсторонника

Речь идет о полном четырехсторроннике - фигуре, образованной произвольными четырьмя прямыми, из которых никакие три не являются конкуррентными, и шестью точками их пересечения. На рисунке названные четыре прямые суть AE, BE, BI, AF. Прямые AB, EG и IF являются диагоналями четырехсторонника.



Теорема Менелая

Эта теорема доказывается в третьей книге «Сферики» Менелая Александрийского. Менелай сначала доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу. Возможно, что плоский случай теоремы рассматривался ранее в несохранившихся

Сферическая теорема Менелая была основным средством, с помощью которого решались разнообразные прикладные задачи позднеантичной и средневековой астрономии и геодезии.

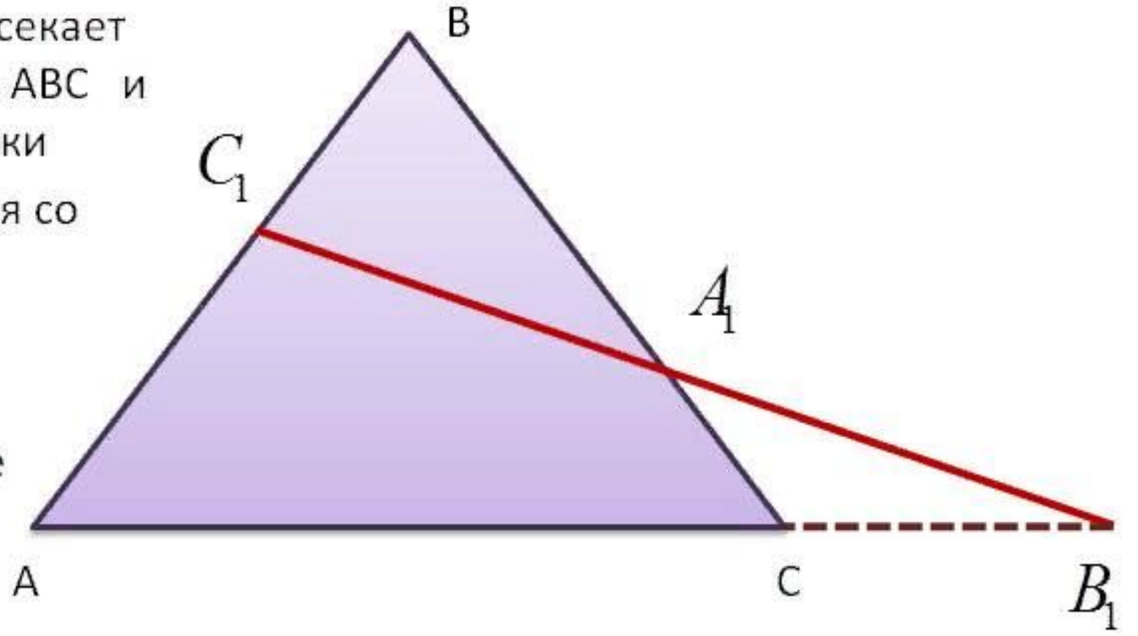
Формулировка теоремы Менелая.

Теорема:

Пусть некоторая прямая пересекает две стороны треугольника АВС и продолжение третьей. Точки A_1, B_1, C_1 это пересечения со сторонами BC, AC, AB или их продолжениями соответственно.

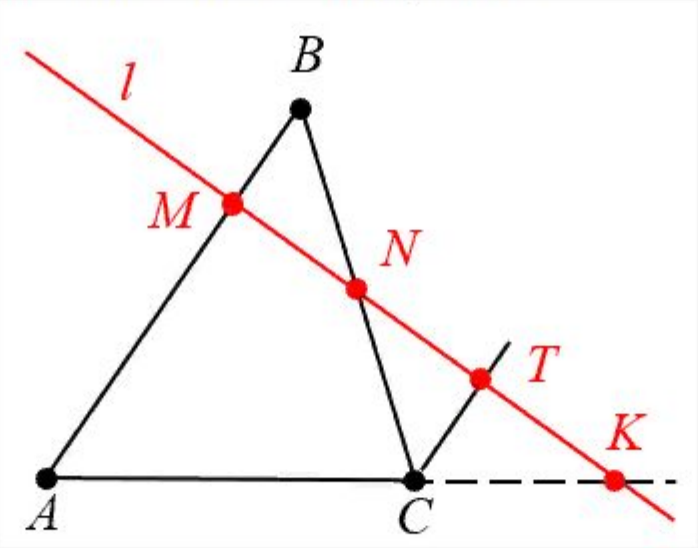
Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$



Доказательство теоремы

1. Дополнительное построение: прямая $CT \parallel AB$, причём T — точка пересечения CT с исходной прямой l.



Дополнительное построение: прямая CT

2. Заметим, что $\Delta AMK \sim \Delta CTK$ по двум углам (угол CKT — общий, а $\angle KAB = \angle KCT$ как соответственные при параллельных прямых AB и CT и секущей AK).
Следовательно:
$$\frac{AM}{CT} = \frac{MK}{TK} = \frac{AK}{CK}$$
Откуда легко видеть, что $CT = \frac{AM \cdot CK}{AK}$.

3. С другой стороны, $\Delta BMN \sim \Delta CTN$ — опять же по двум углам ($\angle MNB = \angle TNC$ как вертикальные, а $\angle MBN = \angle CTN$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CT и секущей BC).
Следовательно:
$$\frac{BM}{CT} = \frac{MN}{TN} = \frac{BN}{CN}$$
В частности, опять же $CT = \frac{BM \cdot CN}{BN}$.

Теперь осталось сравнить два полученных значения для отрезка CT:

$$CT = \frac{AM \cdot CK}{AK} = \frac{BM \cdot CN}{BN};$$
$$AM \cdot BN \cdot CK = BM \cdot CN \cdot AK;$$
$$\frac{AM \cdot BN \cdot CK}{BM \cdot CN \cdot AK} = 1;$$
$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CK}{AK} = 1;$$

Следствия из теоремы Минелая

Следствия из теоремы Менелая

. 1. Тригонометрический эквивалент:

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}=-1$$

где все углы являются ориентированными.

. 2. В сферической геометрии теорема Менелая приобретает вид

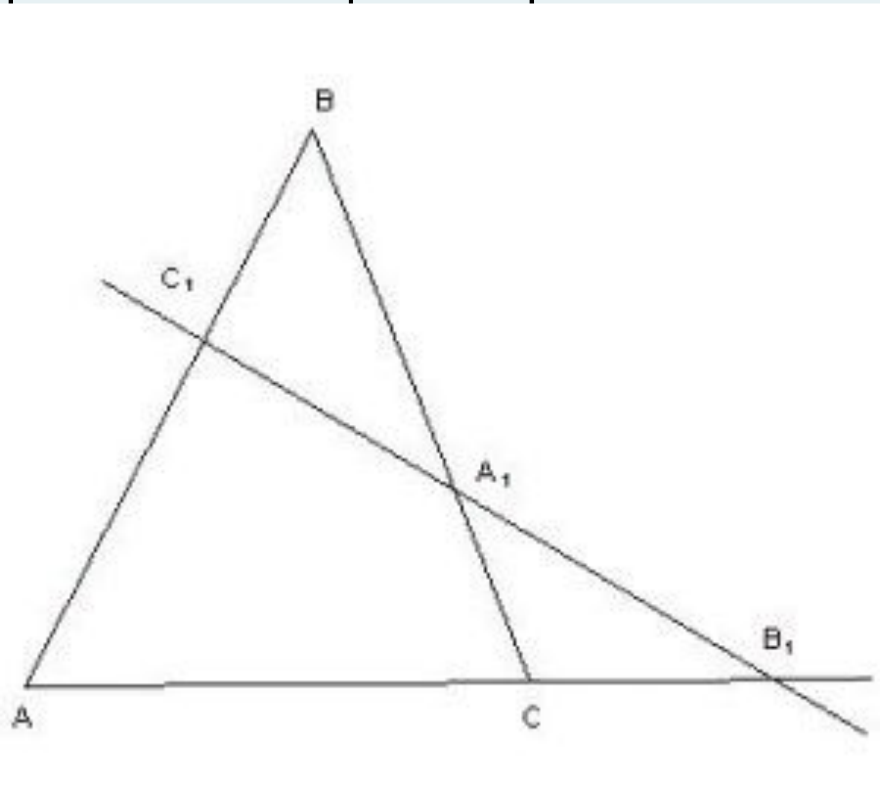
$$\frac{\sin|AB'|}{\sin|B'C|}\cdot\frac{\sin|CA'|}{\sin|A'B|}\cdot\frac{\sin|BC'|}{\sin|C'A|}=1$$

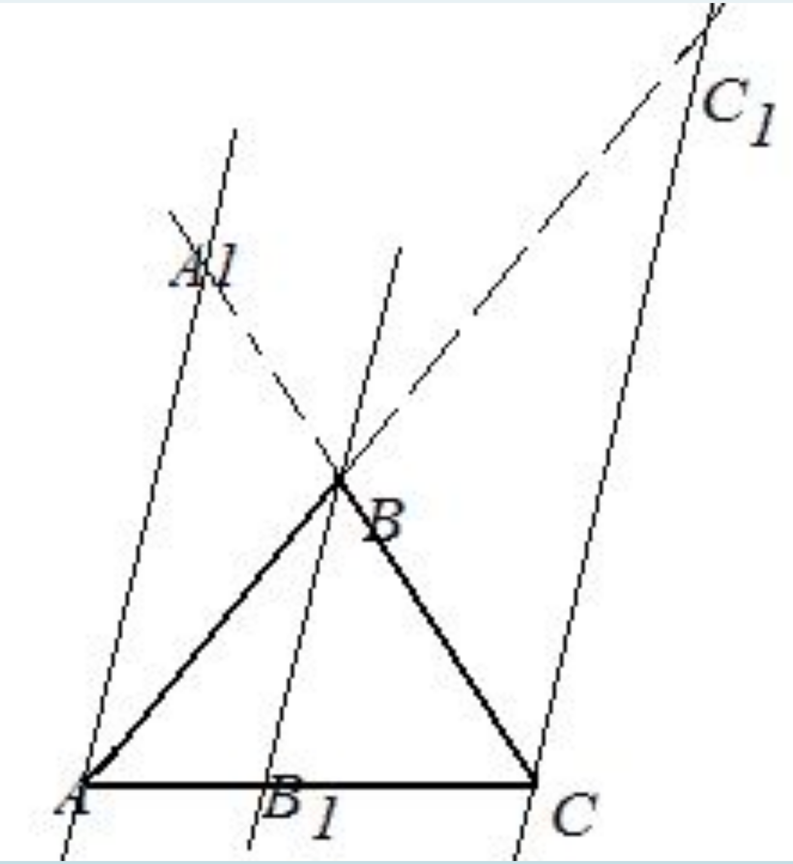
. 3. В геометрии Лобачевского теорема Менелая приобретает вид

$$\frac{\mathrm{sh}|AB'|}{\mathrm{sh}|B'C|}\cdot\frac{\mathrm{sh}|CA'|}{\mathrm{sh}|A'B|}\cdot\frac{\mathrm{sh}|BC'|}{\mathrm{sh}|C'A|}=1$$

Применение теоремы Менелая.

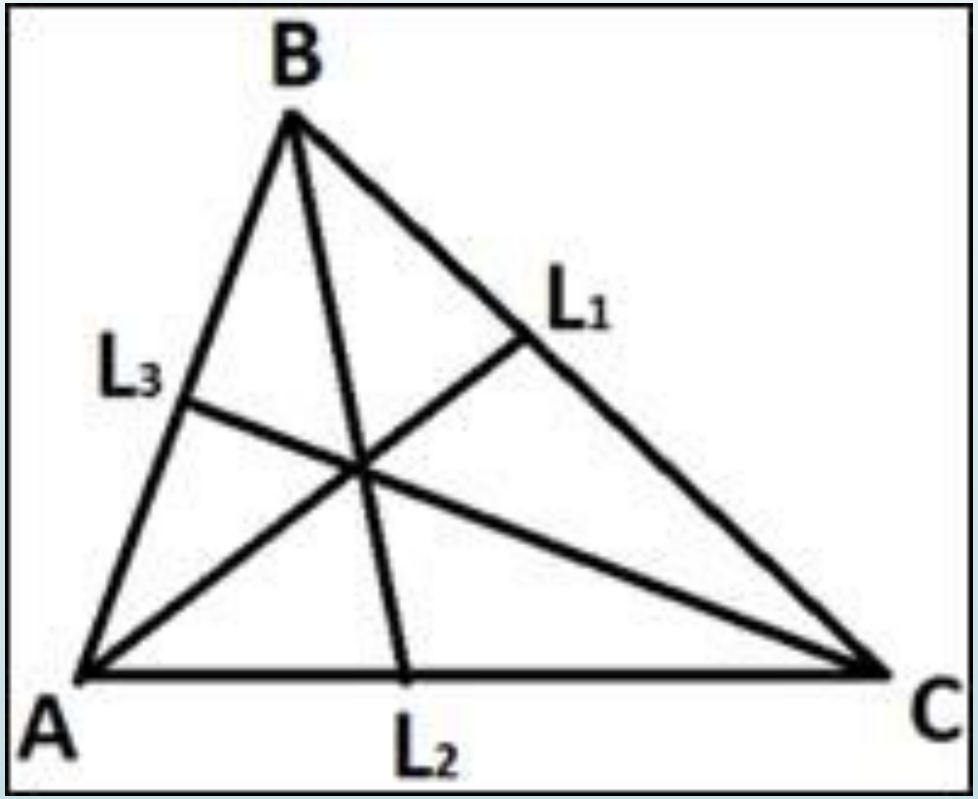
Выше мы рассмотрели теорему Менелая, теперь рассмотрим практическое использование данной торемы на примерах.



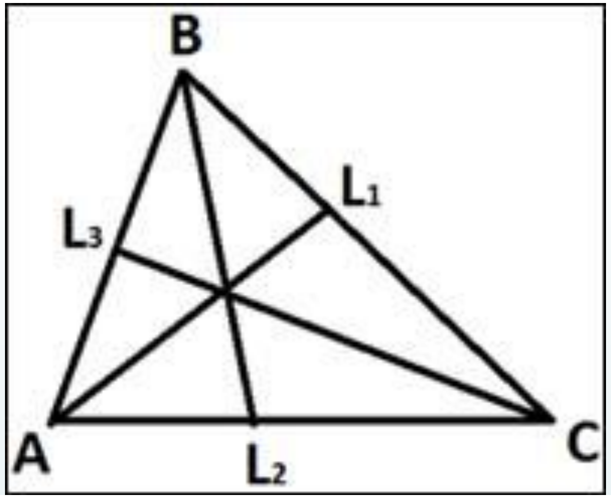


Задача 1.

Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



Доказательство:



Доказательство:

Покажем, что

$$\frac{AL_3}{L_3B} \bullet \frac{BL_1}{L_1C} \bullet \frac{CL_2}{L_2A} = 1.$$

Тогда по теореме Чевы (обратной) AL_1, BL_2, CL_3 пересекаются в одной точке. По свойству биссектрис треугольника

$$\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BL_1}{L_1C} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{BC}{AB}.$$

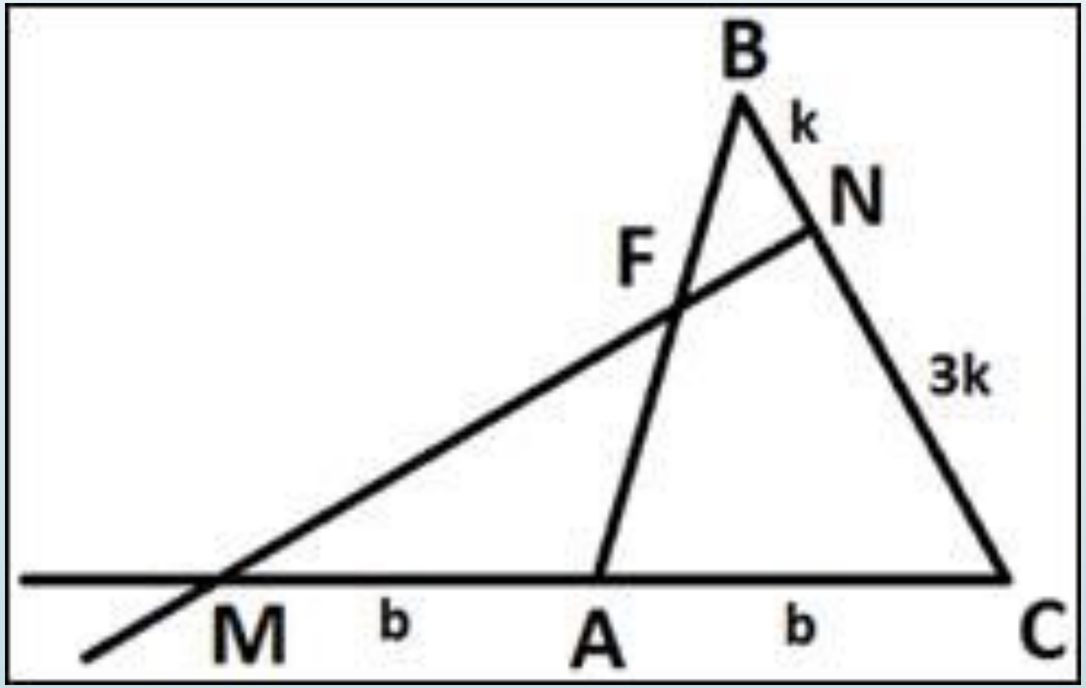
Перемножая почленно полученные равенства, получаем

$$\frac{AL_3}{L_3B} \bullet \frac{BL_1}{L_1C} \bullet \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{AC}{BC} \bullet \frac{AB}{AC} \bullet \frac{BC}{AB} = 1.$$

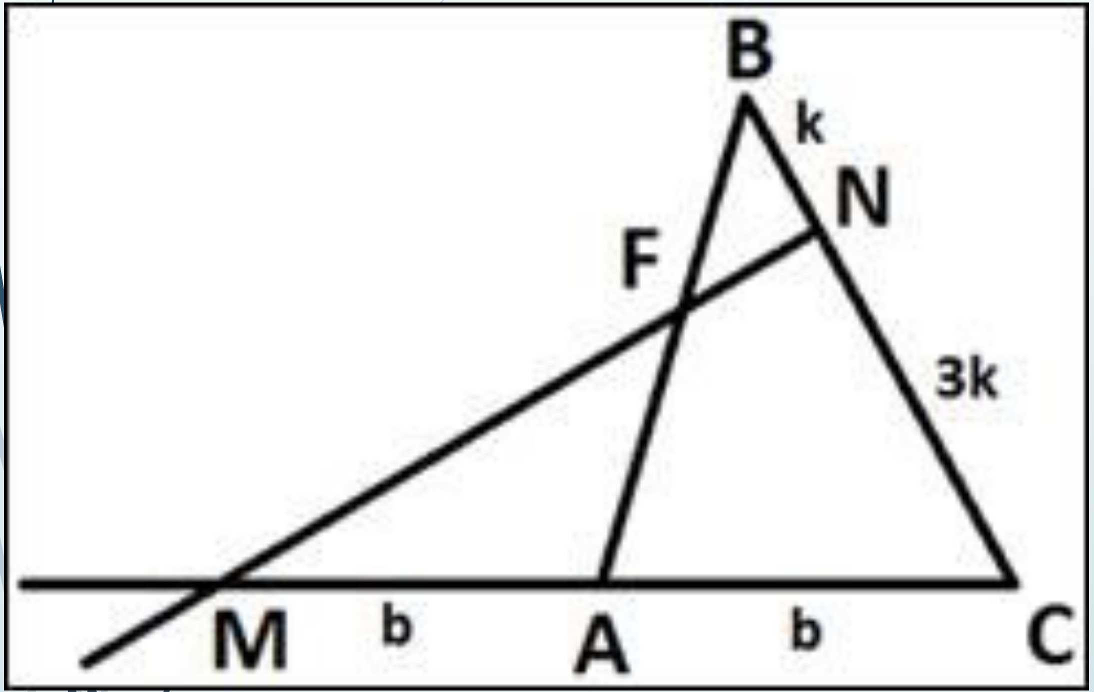
Для биссектрис треугольника равенство Чевы выполняется, следовательно, они пересекаются в одной точке.

Задача 2.

Дано: В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC = 3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA = AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найти отношение



Решение.



Решение:

$\frac{BF}{FA}$.

По условию задачи MA = AC, NC = 3BN. Пусть MA = AC =b, BN = k, NC = 3k. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей.

По теореме Менелая

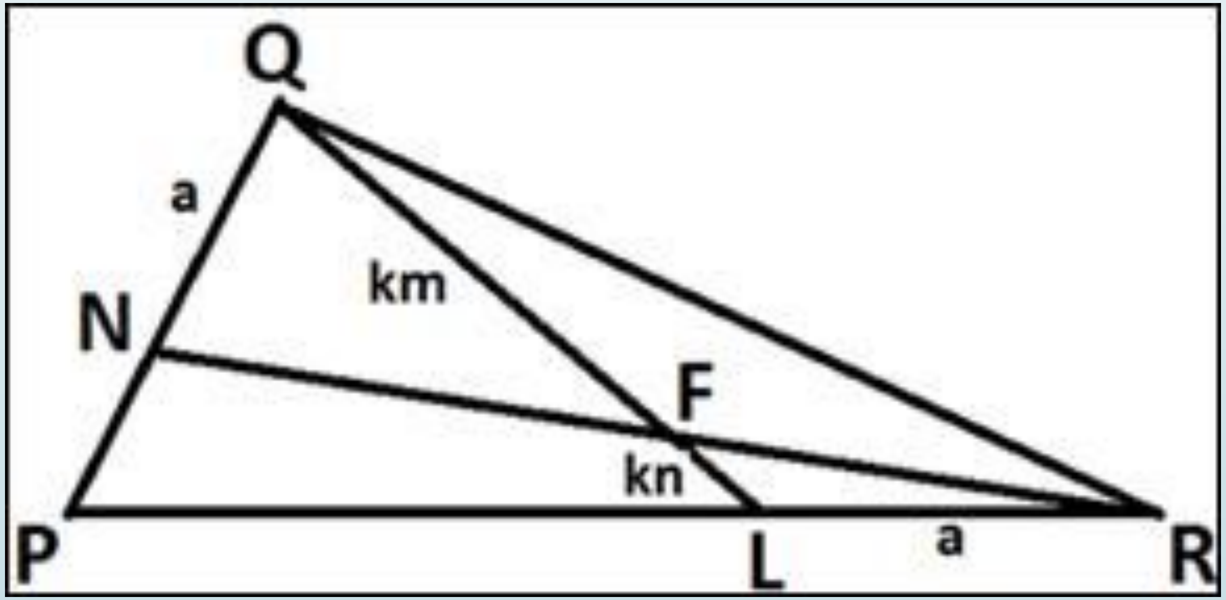
$$\frac{CN}{NB} \bullet \frac{BF}{FA} \bullet \frac{AM}{MC} = 1,$$

Ответ:

$$\frac{3k}{k} \bullet \frac{BF}{FA} \bullet \frac{b}{2b} = 1, \quad \frac{BF}{FA} \bullet \frac{3}{2} = 1, \quad \frac{BF}{FA} = \frac{3}{2}. \quad \frac{3}{2}.$$

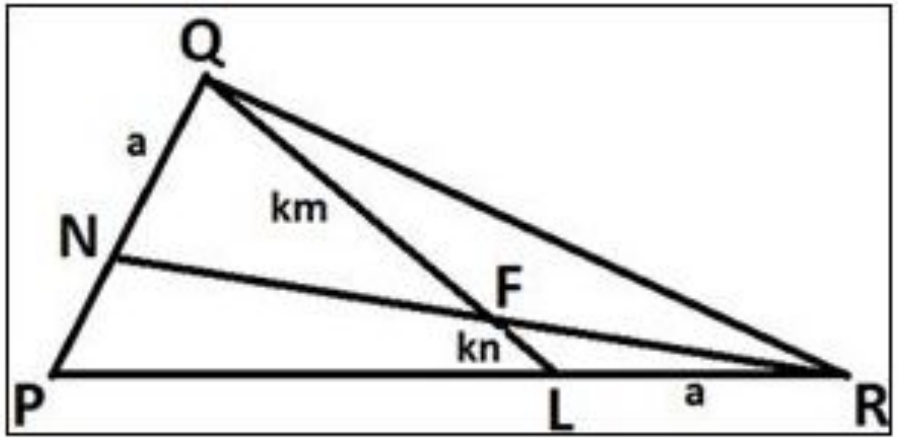
Задача 3.

На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR - точка L, причем NQ = LR. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QL в отношении m:n, считая от точки Q. Найдите $\frac{PN}{PR}$.



Решение:

Решение:



По условию NQ = LR, Пусть NA = LR =a, QF = km, LF = kn. Прямая NR пересекает две стороны треугольника PQL и продолжение третьей.

$$\frac{QF}{FL}=\frac{m}{n}.$$

По теореме Менелая

Ответ:

$$\frac{PN}{NQ}\bullet\frac{QF}{FL}\bullet\frac{LR}{RP}=1,\quad \frac{PN}{a}\bullet\frac{km}{kn}\bullet\frac{a}{RP}=1,\quad \frac{PN}{PR}=\frac{n}{m}.\qquad \frac{n}{m}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1)Точка С1 и А1 делят стороны АВ и ВС треугольника АВС в отношении 1:2. Прямые СС1 и АА1 пересекаются в точке О. Найдите отношение, в котором прямая ВО делит сторону АС.
2)Точка А1 и В1 делят стороны ВС и АС треугольника АВС в отношениях 2:1 и 1:2. Прямые АА1 и ВВ1пересекаются в точке О. Площадь треугольника АВС равна 1. Найдите площадь треугольника. ОВС.
3)В треугольнике ABC точки D и K лежат соответственно на сторонах AB и AC, отрезки BK и CD пересекаются в точке O, при этом BO : OK = 3:2 и CO:OD =2:1. Найти в каком отношении точка K делит сторону AC, т.е. AK : KC.
4)Точка D и F лежат на сторонах ВС и АС треугольника АВС, отрезки AD и BF пересекаются в точке О. Известно, что AF:FC =3:2 и BO = OF. Чему равно отношение BD:DC?

Задачи для самостоятельного решения(2)

5)Используя теорему Чевы доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
6)Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найти отношение , если: а) M – середина отрезка AD; б) .
7)Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O.
Найдите отношение OK:ON, если MN = 5 см, NP = 3 см, MP = 7 см.

8)Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне треугольника как 4:3, а высота, проведённая к основанию, равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

Вывод:

Теорема Менелая проста в понимании. Но трудности, связанные с освоением этой теоремы, оправданы ее применением при решении задач.

Замечательным свойством теоремы является то, что она может служить отправной точкой при повторении основных свойств треугольника в 9 классе. В частности, с ее помощью легко доказываются следующие утверждения:

- Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

Источники:

-https://ru.wikipedia.org/wiki/
-http://hijos.ru/2011/04/20/teorema-menelaya/
-https://wiki2.org/ru/
-
https://www.berdov.com/docs/treugolnik/teorema-menelaya/
-http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000027/st091.shtml
- http://hijos.ru/2011/04/20/teorema-menelaya/
-https://studwood.ru/1105626/matematika_himiya_fizika/primenenie_teorem_menelaya_chevy_resheniya_zadach
-https://ege-ok.ru/2013/10/05/zadacha-na-podobie-i-teorema-minelaya-zadanie-s4
- Б.Орач «Теорема Менелая». Квант № 3, 1991.
- Е. Качалкина « Применение теорем Чевы и Менелая», журнал «Математика в школе» №13,14-2004.