



Проект на тему: «Теорема Менелая»

Проект выполнила: Клемина Елизавета Викторовна
ученица 9 класса «В»

Цели и задачи данного проекта:


- Выявить теоретические положения для доказательства теоремы и научно обосновать способы ее доказательства.
- Проанализировать теорему и ее применение при решении задач
- Проверить эффективность и целесообразность применения теоремы при решении задач.

Кто же такой Менелай?



- Менелай Александрийский— древнегреческий математик и астроном.
- Главное сочинение Менелая — «Сферика» в трёх книгах. В I книге «Сферики» дается определение сферического треугольника и связанных с ним понятий.
- .Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему, известную сегодня как теорема Менелая.

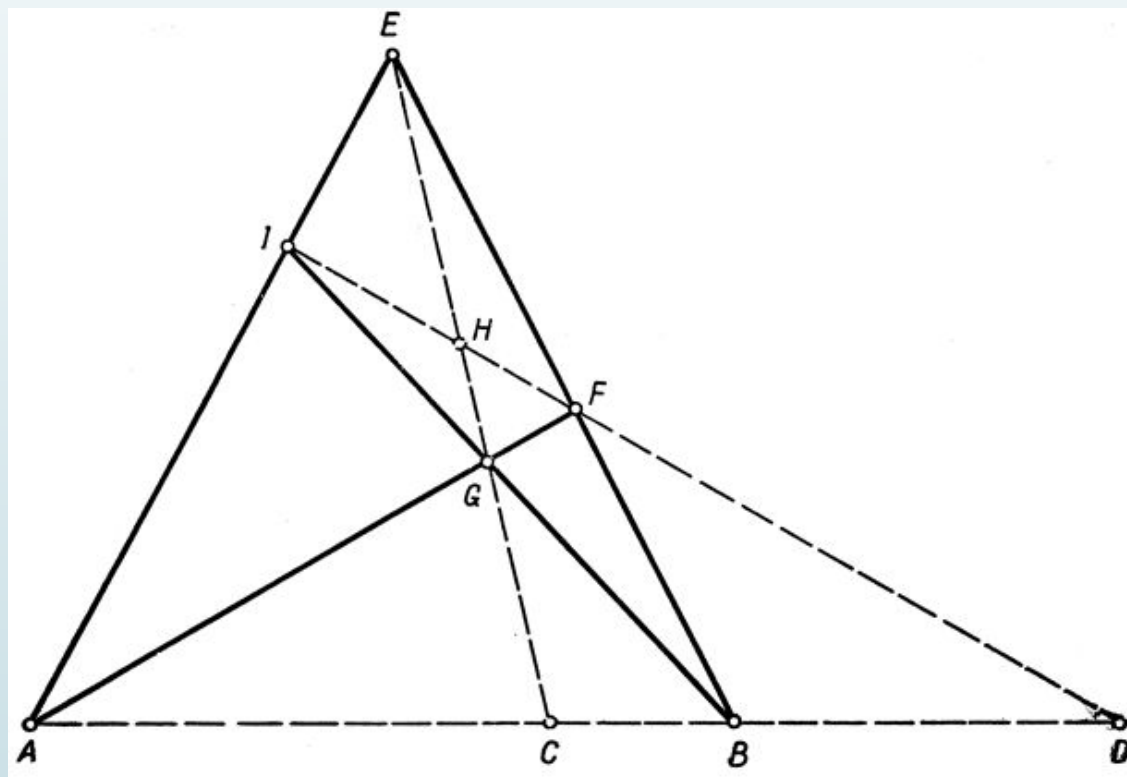
Теорема Менелая



Сейчас мы более подробно ознакомимся с теоремой Менелая. Теорема Менелая или теорема о трансверселях или теорема о полном четырёхстороннике — классическая теорема аффинной геометрии.

Понятие четырёхсторонника

Речь идет о полном четырёхстороннике - фигуре, образованной произвольными четырьмя прямыми, из которых никакие три не являются concurrentными, и шестью точками их пересечения. На рисунке названные четыре прямые суть AE , BE , BI , AF . Прямые AB , EG и IF являются диагоналями четырёхсторонника.



Теорема Менелая

Эта теорема доказывается в третьей книге «Сферики» Менелая Александрийского. Менелай сначала доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу. Возможно, что плоский случай теоремы рассматривался ранее в несохранившихся

Сферическая теорема Менелая была основным средством, с помощью которого решались разнообразные прикладные задачи позднеантичной и средневековой астрономии и геодезии.

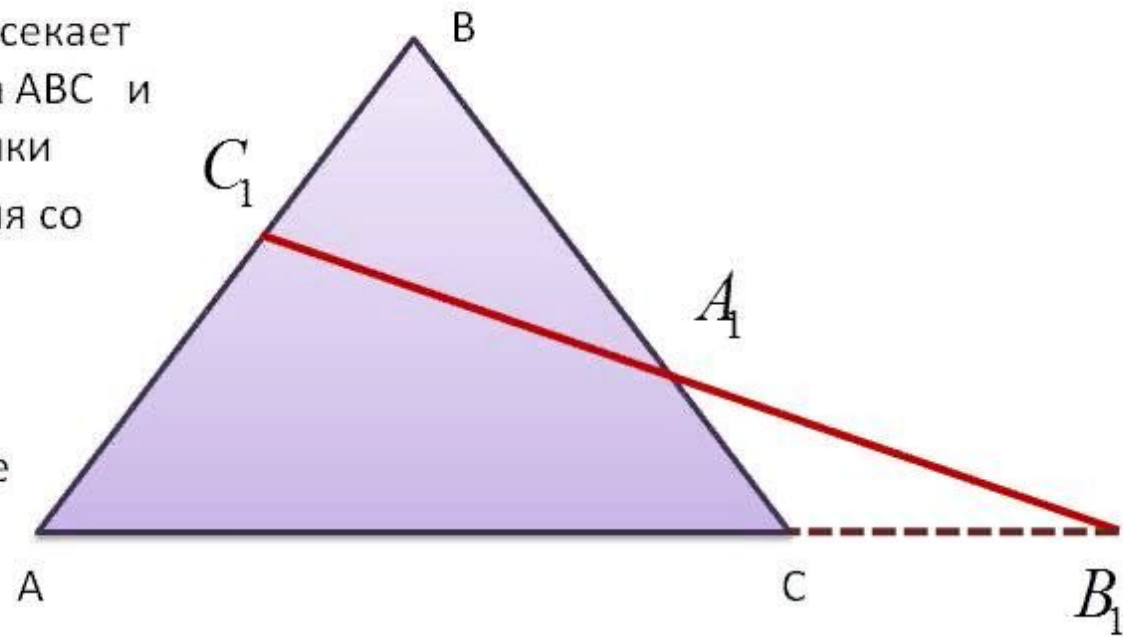
Формулировка теоремы Менелая.

Теорема:

Пусть некоторая прямая пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. Точки A_1, B_1, C_1 это пересечения со сторонами BC, AC, AB или их продолжениями соответственно.

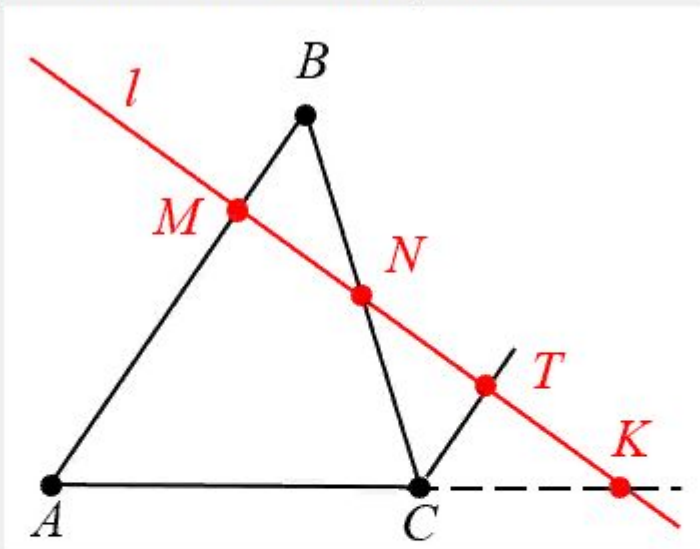
Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



Доказательство теоремы

1. Дополнительное построение: прямая $CT \parallel AB$, причём T — точка пересечения CT с исходной прямой l .



Дополнительное построение: прямая CT

2. Заметим, что $\triangle AMK \sim \triangle CTK$ по двум углам (угол CKT — общий, а $\angle KAB = \angle KCT$ как соответственные при параллельных прямых AB и CT и секущей AK).

Следовательно:

$$\frac{AM}{CT} = \frac{MK}{TK} = \frac{AK}{CK}$$

Откуда легко видеть, что $CT = \frac{AM \cdot CK}{AK}$.

3. С другой стороны, $\triangle BMN \sim \triangle CTN$ — опять же по двум углам ($\angle MNB = \angle TNC$ как вертикальные, а $\angle MBN = \angle CTN$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CT и секущей BC).

Следовательно:

$$\frac{BM}{CT} = \frac{MN}{TN} = \frac{BN}{CN}$$

В частности, опять же $CT = \frac{BM \cdot CN}{BN}$.

Теперь осталось сравнить два полученных значения для отрезка CT :

$$CT = \frac{AM \cdot CK}{AK} = \frac{BM \cdot CN}{BN};$$

$$AM \cdot BN \cdot CK = BM \cdot CN \cdot AK;$$

$$\frac{AM \cdot BN \cdot CK}{BM \cdot CN \cdot AK} = 1;$$

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CK}{AK} = 1;$$

Следствия из теоремы Менелая

Следствия из теоремы Менелая

- . 1. Тригонометрический эквивалент:

$$\frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle A'AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle B'BA} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle C'CB} = -1$$

где все углы являются ориентированными.

- . 2. В сферической геометрии теорема Менелая приобретает вид

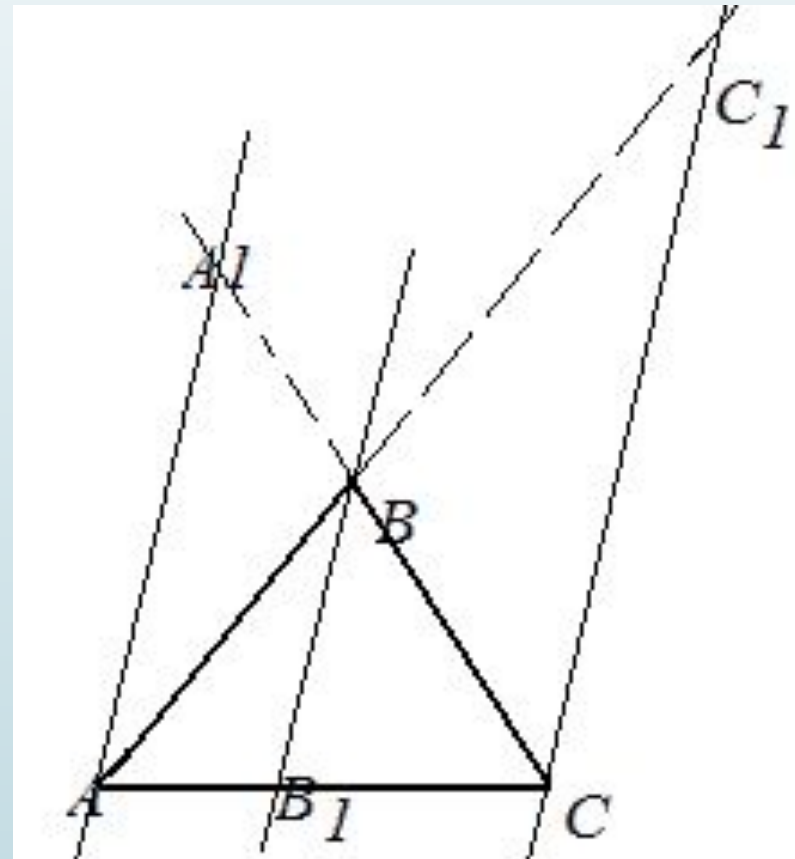
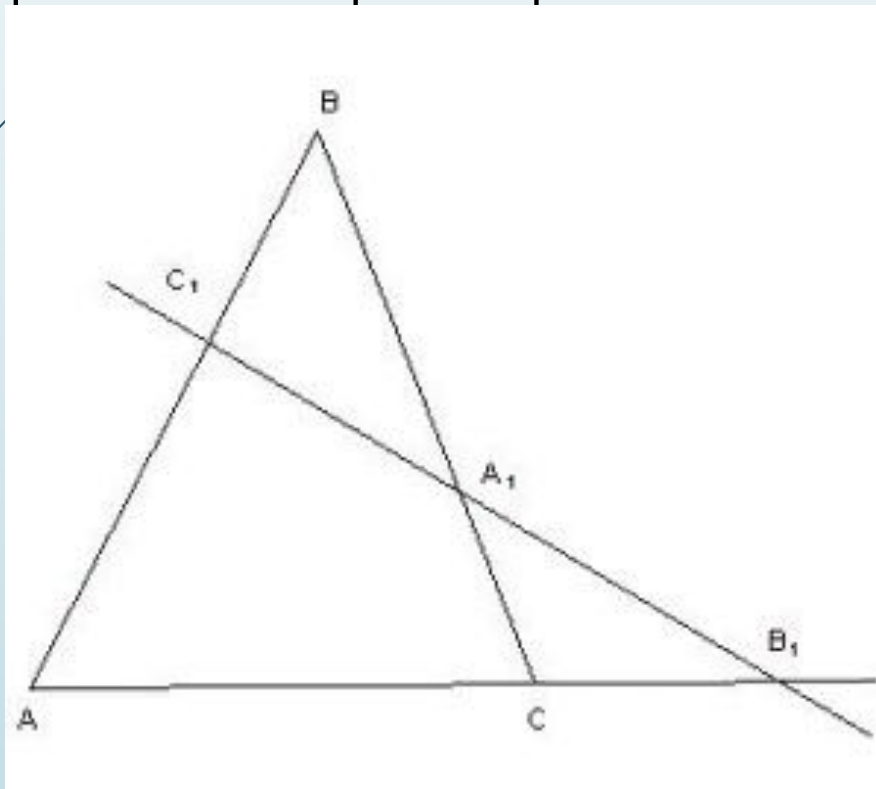
$$\frac{\sin |AB'|}{\sin |B'C|} \cdot \frac{\sin |CA'|}{\sin |A'B|} \cdot \frac{\sin |BC'|}{\sin |C'A|} = 1$$

- . 3. В геометрии Лобачевского теорема Менелая приобретает вид

$$\frac{\operatorname{sh} |AB'|}{\operatorname{sh} |B'C|} \cdot \frac{\operatorname{sh} |CA'|}{\operatorname{sh} |A'B|} \cdot \frac{\operatorname{sh} |BC'|}{\operatorname{sh} |C'A|} = 1$$

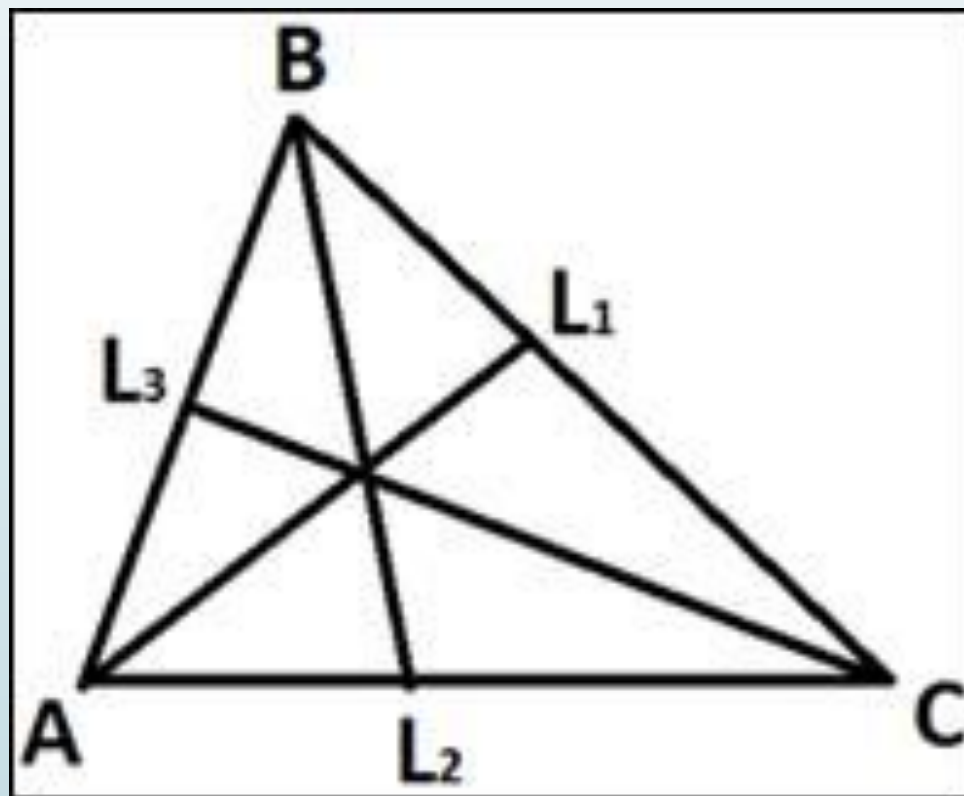
Применение теоремы Менелая.

Выше мы рассмотрели теорему Менелая, теперь рассмотрим практическое использование данной теоремы на примерах.

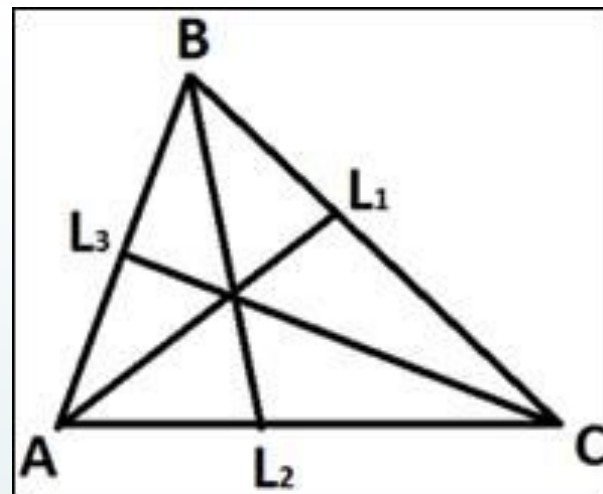


Задача 1.

Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



Доказательство:



Доказательство:

Покажем, что

$$\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1.$$

Тогда по теореме Чебы (обратной) AL_1 , BL_2 , CL_3 пересекаются в одной точке. По свойству биссектрис треугольника

$$\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BL_1}{L_1C} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{CL_2}{L_2A} = \frac{BC}{AB}.$$

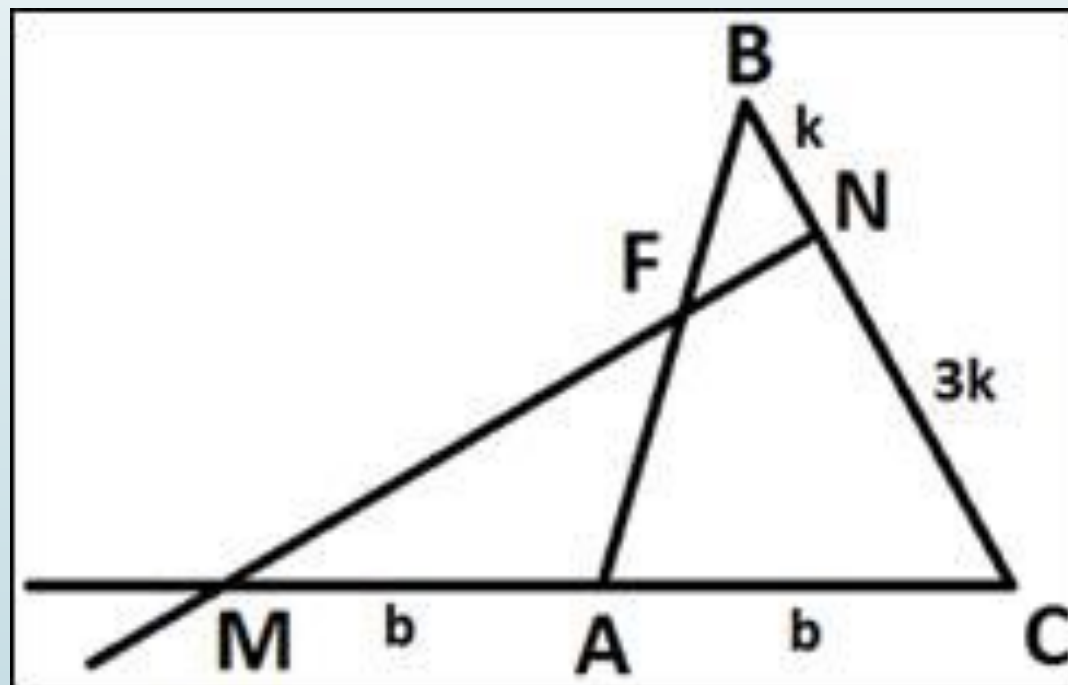
Перемножая почленно полученные равенства, получаем

$$\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$

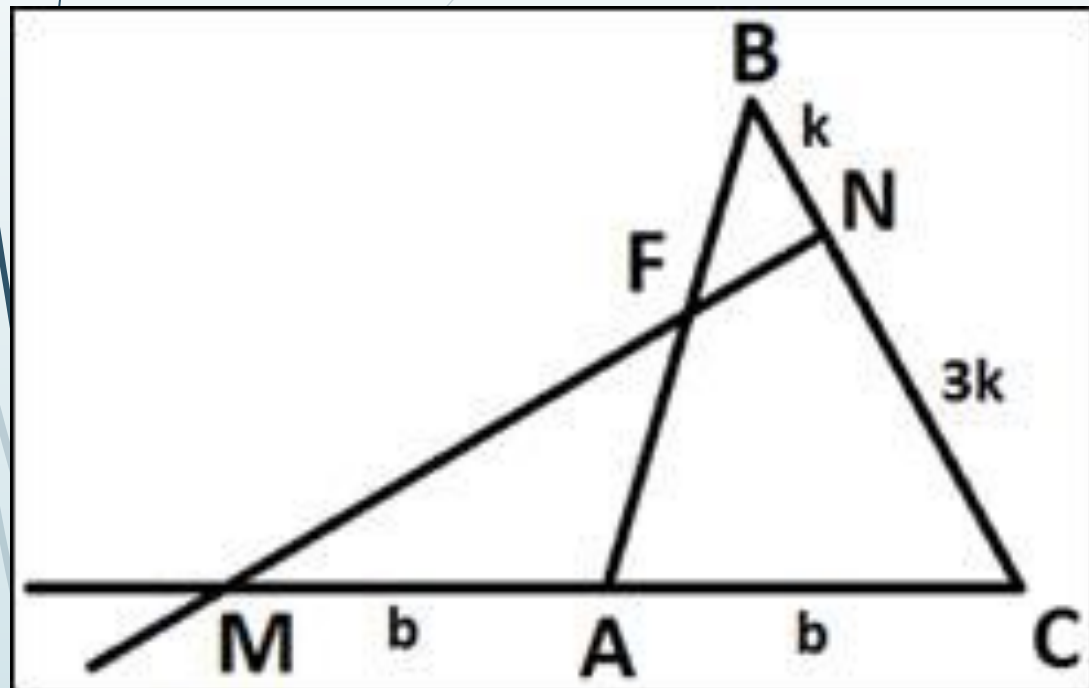
Для биссектрис треугольника равенство Чебы выполняется, следовательно, они пересекаются в одной точке.

Задача 2.

Дано: В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что $NC = 3BN$; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что $MA = AC$. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F . Найти отношение



Решение.



Решение:

$$\frac{BF}{FA}.$$

По условию задачи $MA = AC$, $NC = 3BN$. Пусть $MA = AC = b$, $BN = k$, $NC = 3k$. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей.

По теореме Менелая

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1,$$

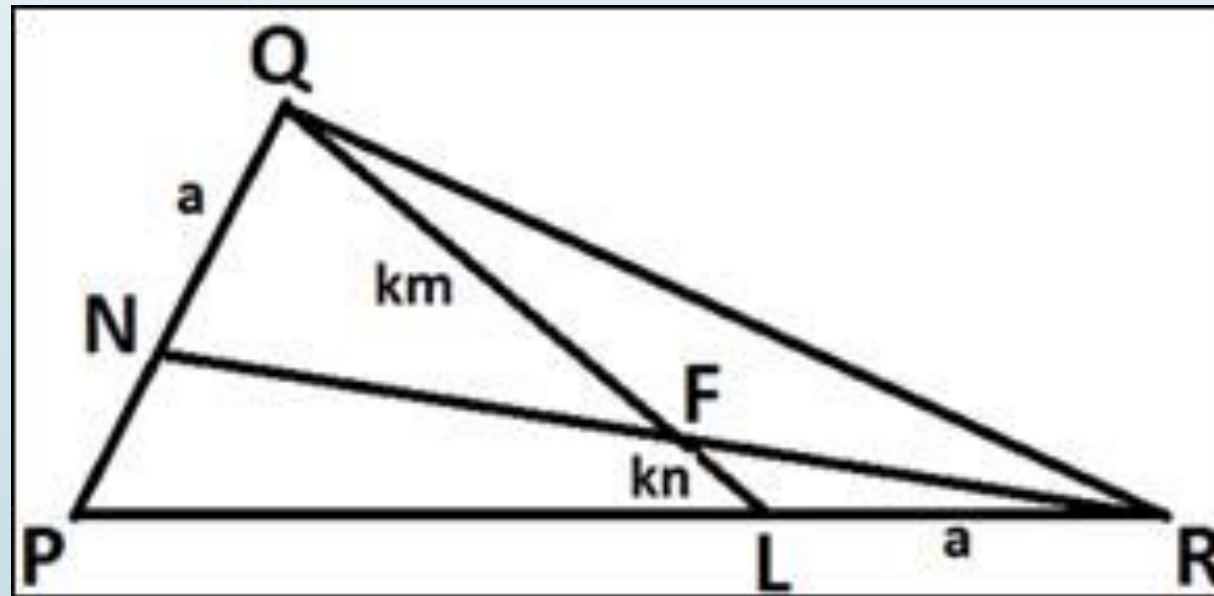
Ответ:

$$\frac{3k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2b} = 1, \quad \frac{BF}{FA} \cdot \frac{3}{2} = 1, \quad \frac{BF}{FA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}.$$

Задача 3.

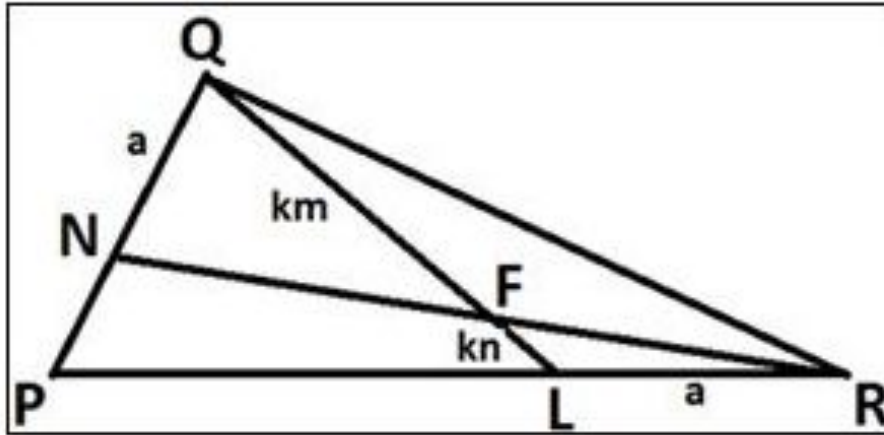
На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR - точка L, причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QL в отношении $m:n$, считая от точки Q. Найдите

$$\frac{PN}{PR}.$$



Решение:

Решение:



По условию $NQ = LR$, Пусть $NQ = LR = a$, $QF = km$, $LF = kn$. Прямая NR пересекает две стороны треугольника PQR и продолжение третьей.

$$\frac{QF}{FL} = \frac{m}{n}.$$

По теореме Менелая

Ответ:

$$\frac{PN}{NQ} \cdot \frac{QF}{FL} \cdot \frac{LR}{RP} = 1, \quad \frac{PN}{a} \cdot \frac{km}{kn} \cdot \frac{a}{RP} = 1, \quad \frac{PN}{PR} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m}.$$

Задачи для самостоятельного решения

- 1) Точка C_1 и A_1 делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении $1:2$. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O . Найдите отношение, в котором прямая BO делит сторону AC .
- 2) Точка A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $2:1$ и $1:2$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 1 . Найдите площадь треугольника OBC .
- 3) В треугольнике ABC точки D и K лежат соответственно на сторонах AB и AC , отрезки BK и CD пересекаются в точке O , при этом $BO : OK = 3:2$ и $CO:OD = 2:1$. Найти в каком отношении точка K делит сторону AC , т.е. $AK : KC$.
- 4) Точка D и F лежат на сторонах BC и AC треугольника ABC , отрезки AD и BF пересекаются в точке O . Известно, что $AF:FC = 3:2$ и $BO = OF$. Чему равно отношение $BD:DC$?

Задачи для самостоятельного решения(2)

5) Используя теорему Чебы доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6) Через точку M , взятую на медиане AD треугольника ABC , и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K . Найти отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M – середина отрезка AD ; б) $\frac{AM}{MD} = 2$.

7) Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O .

Найдите отношение $OK:ON$, если $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см.

8) Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне треугольника как $4:3$, а высота, проведённая к основанию, равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

Вывод:

Теорема Менелая проста в понимании. Но трудности, связанные с освоением этой теоремы, оправданы ее применением при решении задач.

Замечательным свойством теоремы является то, что она может служить отправной точкой при повторении основных свойств треугольника в 9 классе. В частности, с ее помощью легко доказываются следующие утверждения:

- Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

ИСТОЧНИКИ:

- <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
- <http://hijos.ru/2011/04/20/teorema-menelaya/>
- <https://wiki2.org/ru/>
-
- <https://www.berdov.com/docs/treugolnik/teorema-menelaya/>
- <http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000027/st091.shtml>
- <http://hijos.ru/2011/04/20/teorema-menelaya/>
- https://studwood.ru/1105626/matematika_himiya_fizika/primenenie_teorem_menelaya_chevy_resheniya_zadach
- <https://ege-ok.ru/2013/10/05/zadacha-na-podobie-i-teorema-menelaya-zadanie-s4>
- Б.Орач «Теорема Менелая». Квант № 3, 1991.
- Е. Качалкина «Применение теорем Чебы и Менелая», журнал «Математика в школе» №13,14 -2004.