




# **Построение сечений: метод следов**

*Астрахань – 2012  
г.*

Существует три основных метода  
построения сечений многогранников:

- ✓ *Метод следов.*
- ✓ *Метод вспомогательных сечений.*
- ✓ *Комбинированный метод.*



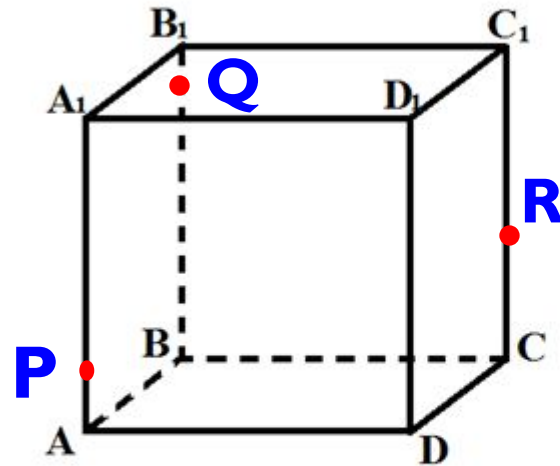
**Метод следов** заключается в построении следов секущей плоскости на плоскость каждой грани многогранника.

Построение сечения многогранника методом следов обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника.

# Задача I.

Дана призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $P, Q, R$ .

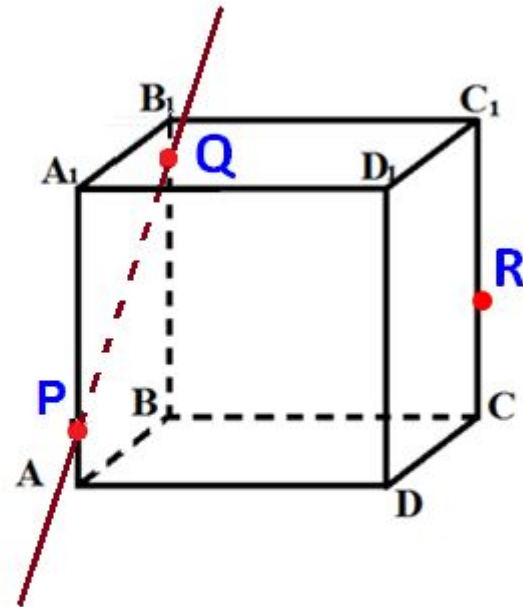


# Задача I.

Рассмотрим грань  $AA_1B_1B$ .

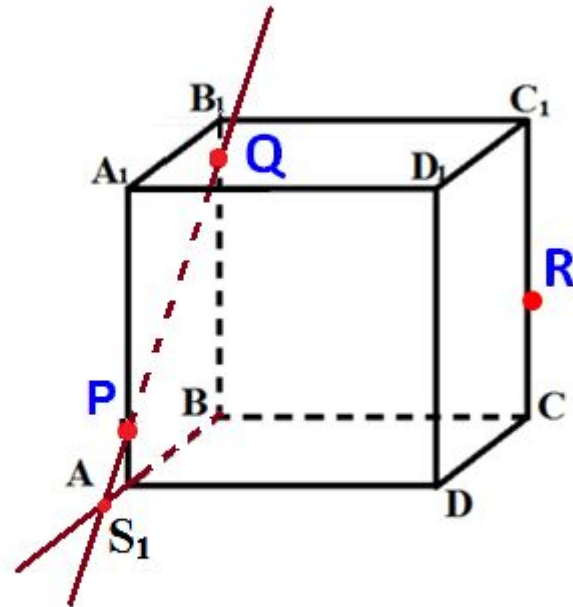
В этой грани лежат точки сечения  $P$  и  $Q$ .

Проведем прямую  $PQ$ .



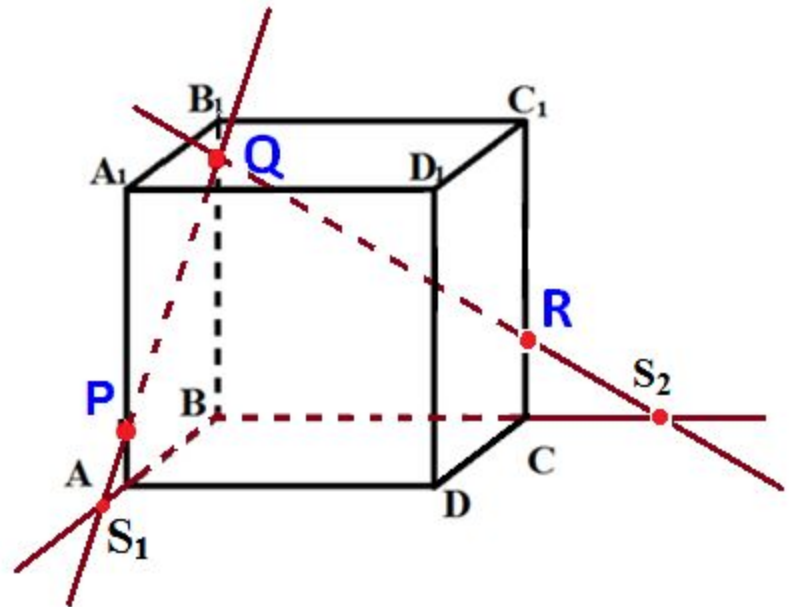
# Задача I.

Прямая  $PQ$ , которая принадлежит сечению, пересекается с прямой  $AB$  в точке  $S_1$ .



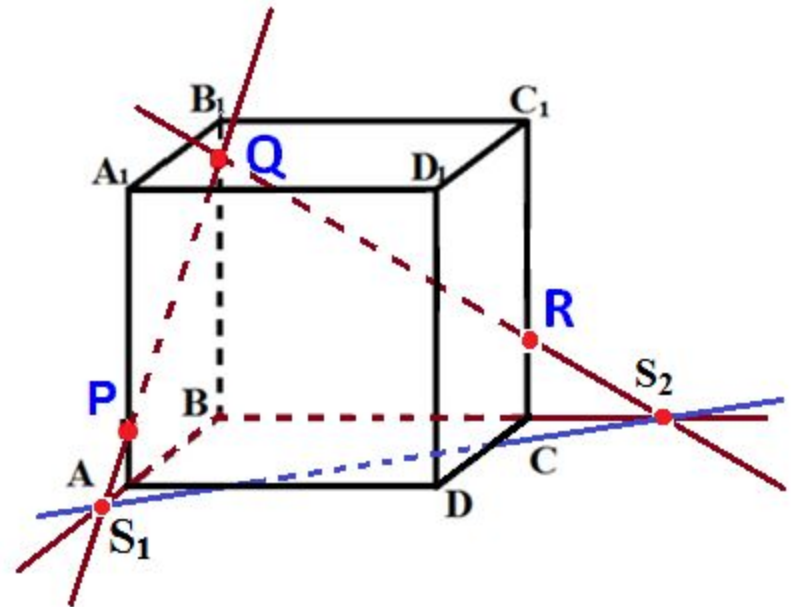
# Задача I.

Аналогично получаем точку  $S_2$  пересечением прямых  $QR$  и  $BC$ .



# Задача I.

Прямая  $S_1S_2$  - след секущей плоскости на плоскость нижнего основания призмы.



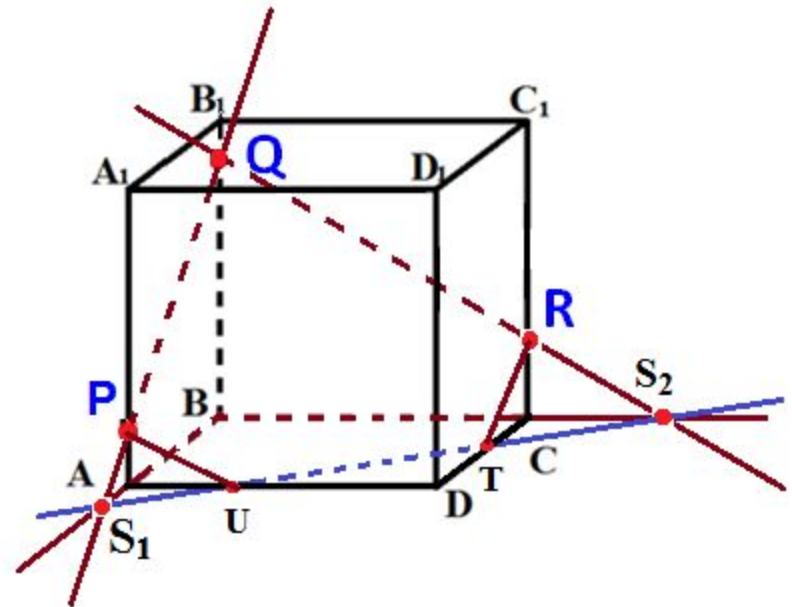


# Задача I.

Прямая  $S_1S_2$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $U$ , сторону  $CD$  в точке  $T$ .

Соединим точки  $P$  и  $U$ , так как они лежат в одной плоскости грани  $AA_1D_1D$ .

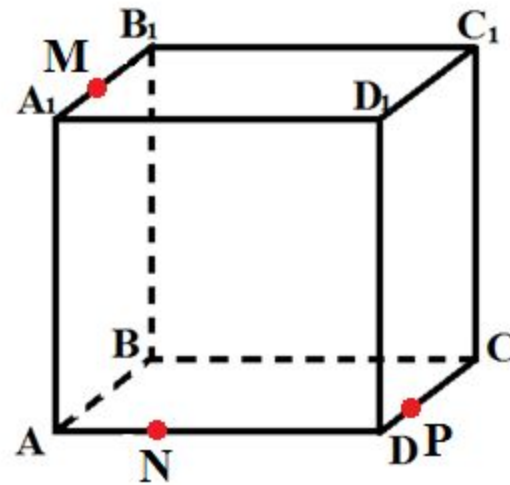
Аналогично получаем  $TU$  и  $R'$





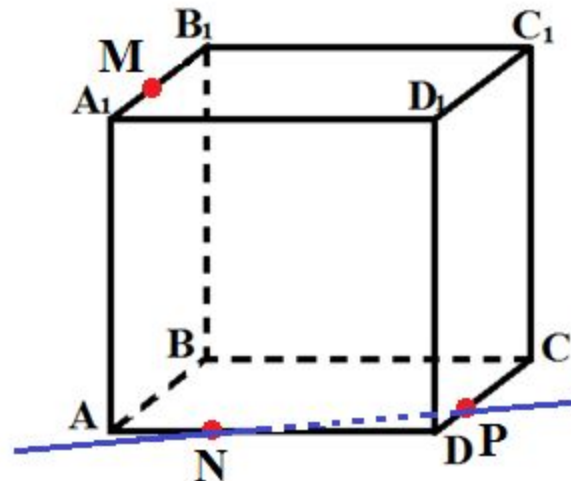
## Задача 2.

Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $M, N, P$ .



## Задача 2.

Точки  $N$  и  $P$  лежат в плоскости сечения и в плоскости нижнего основания параллелепипеда. Построим прямую, проходящую через эти точки.



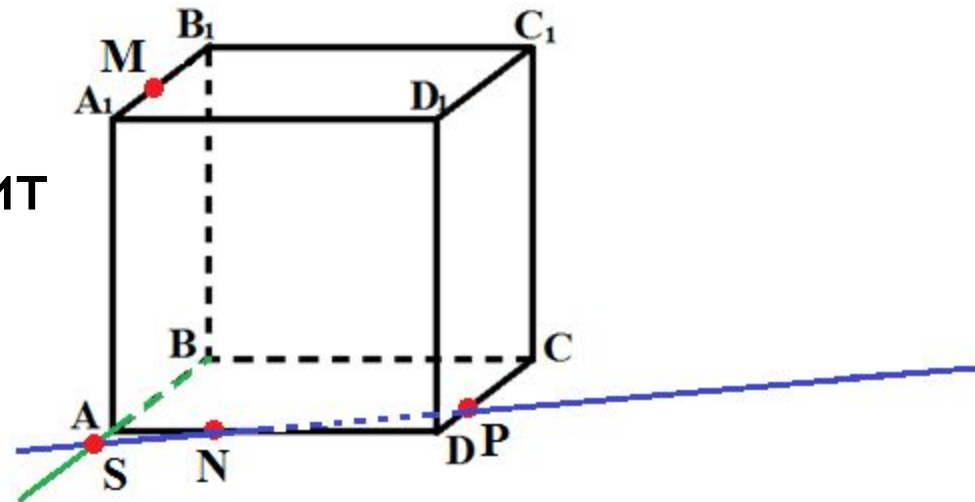
Эта прямая является следом секущей плоскости на плоскость основания параллелепипеда.

## Задача 2.

Продолжим прямую, на которой лежит сторона  $AB$  параллелепипеда.

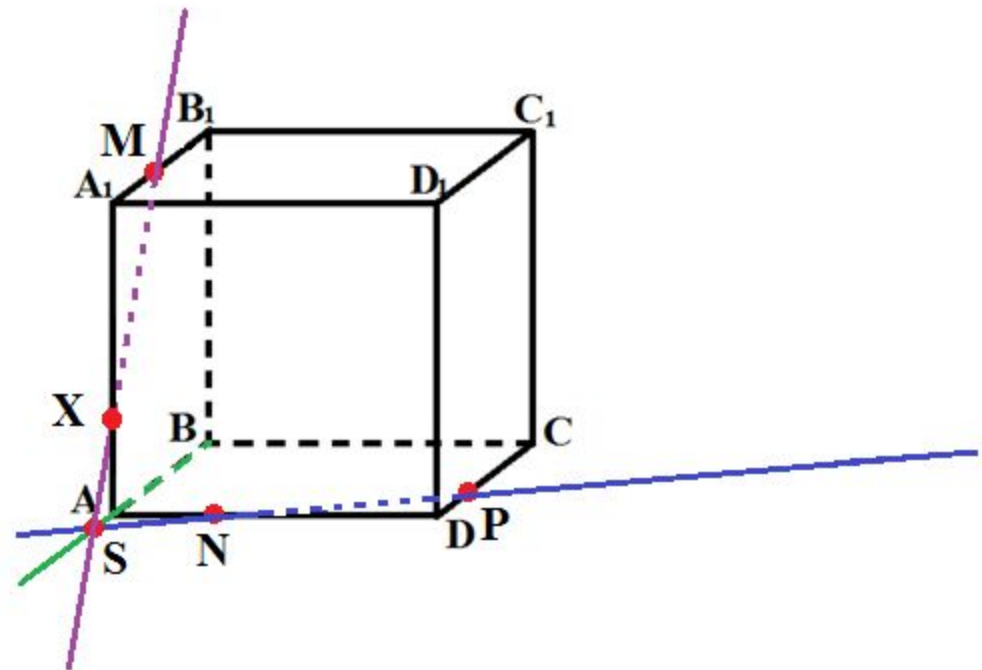
Прямые  $AB$  и  $NP$  пересекутся в некоторой точке  $S$ .

Эта точка принадлежит плоскости сечения.



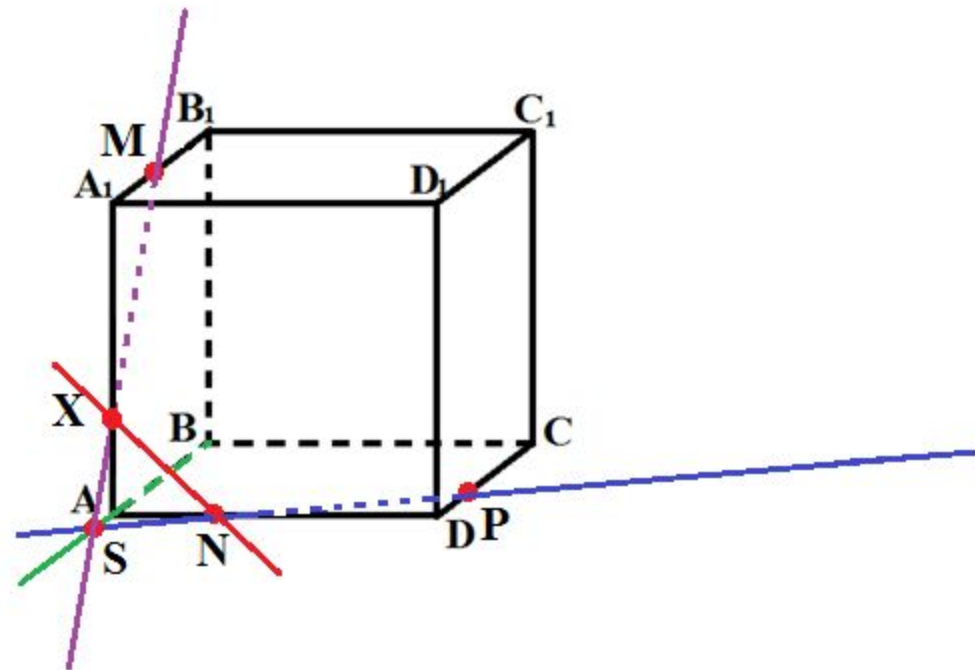
## Задача 2.

Так как точка  $M$  также принадлежит плоскости сечения и пересекает прямую  $AA_1$  в некоторой точке  $X$ .



## Задача 2.

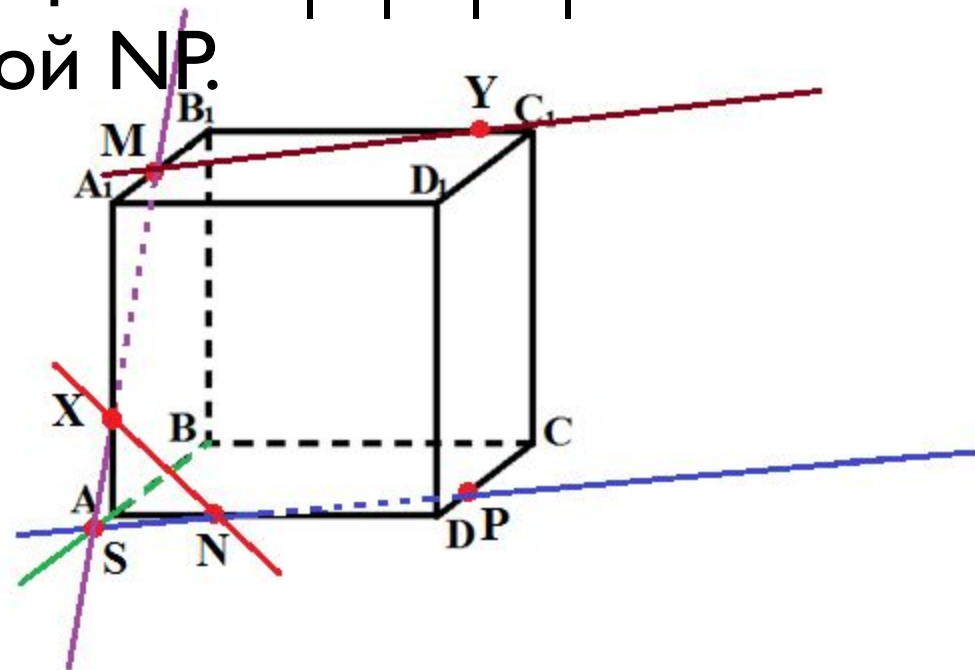
Точки  $X$  и  $N$  лежат в одной плоскости грани  $AA_1D_1D$ , соединим их и получим прямую  $XN$ .



## Задача 2.

Так как плоскости граней параллелепипеда параллельны, то через точку  $M$  можно провести прямую в грани  $A_1B_1C_1D_1$ , параллельную прямой  $NP$ .

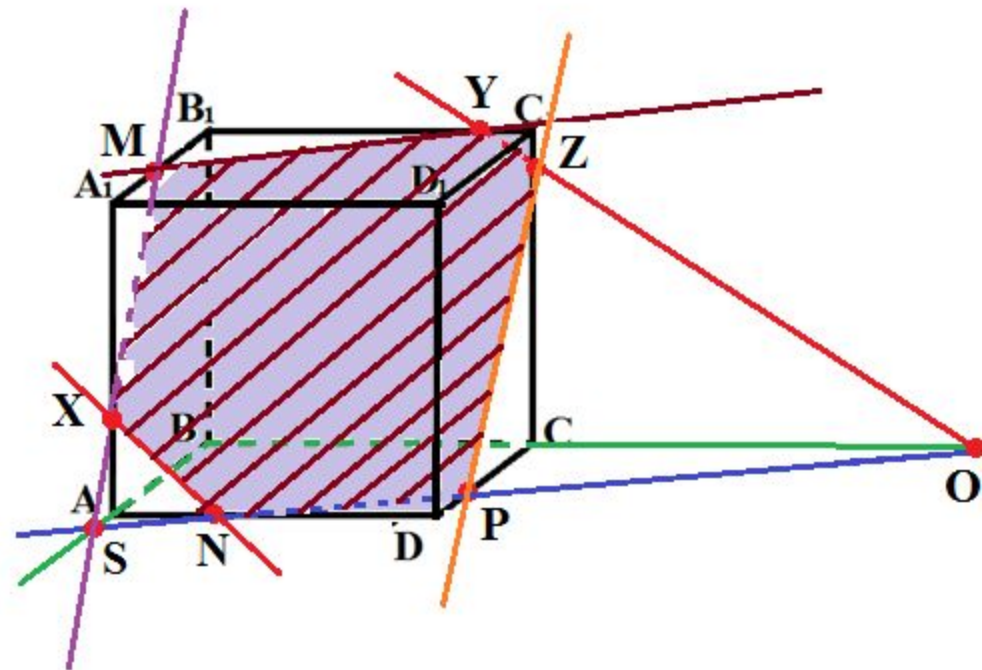
Эта прямая пересечет сторону  $B_1C_1$  в точке  $Y$ .





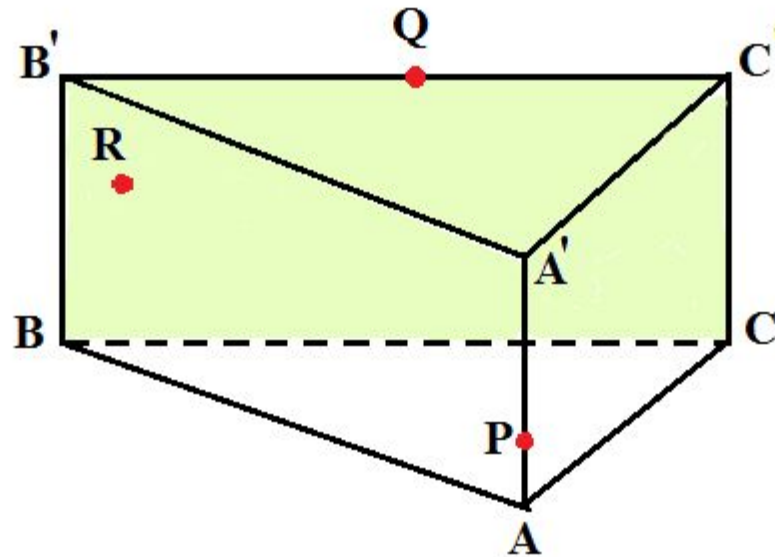
## Задача 2.

Аналогично проводим прямую  $YZ$ , параллельно прямой  $XN$ . Соединяем  $Z$  с  $P$  и получаем искомое сечение –  $MYZPNX$ .



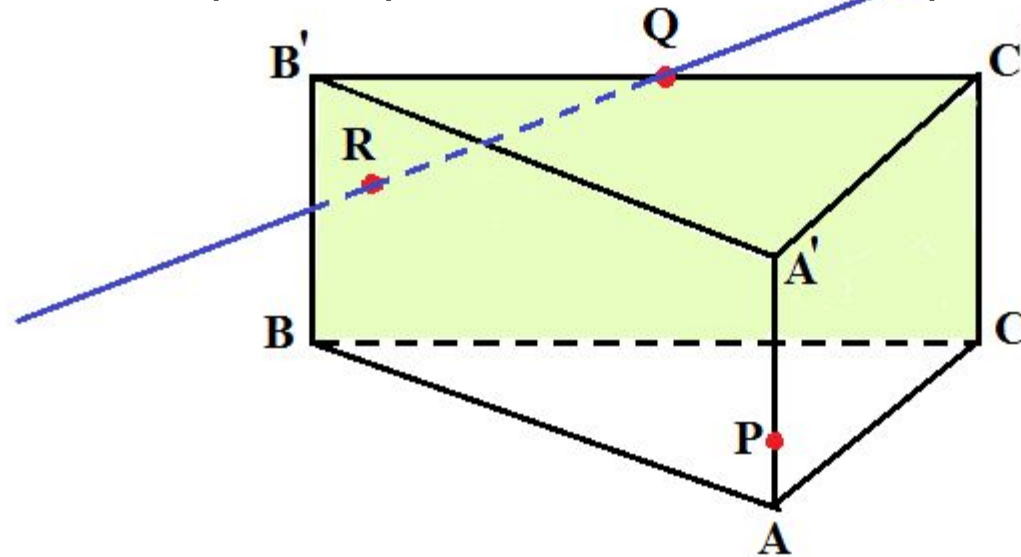
## Задача 3.

На ребрах  $AA'$  и  $B'C'$  призмы  $ABCA'B'C'$  зададим соответственно точку  $P$  и  $Q$ . Построим сечение призмы плоскостью  $(PQR)$ , точку  $R$  которой зададим в грани  $BCB'C'$ .



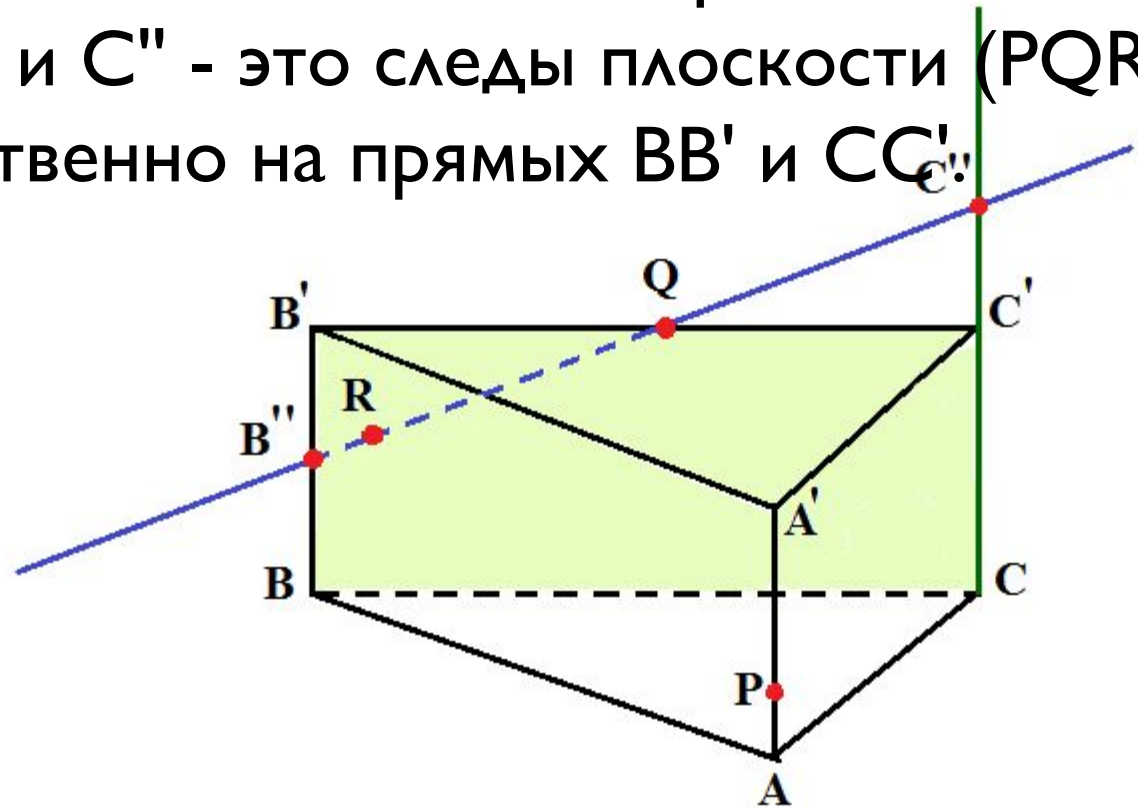
## Задача 3.

Так как точки  $Q$  и  $R$  лежат в плоскости  $(BCC')$ , то в этой плоскости лежит прямая  $QR$ . Проведем ее. Это след плоскости  $(PQR)$  на плоскость  $(BCC')$ .



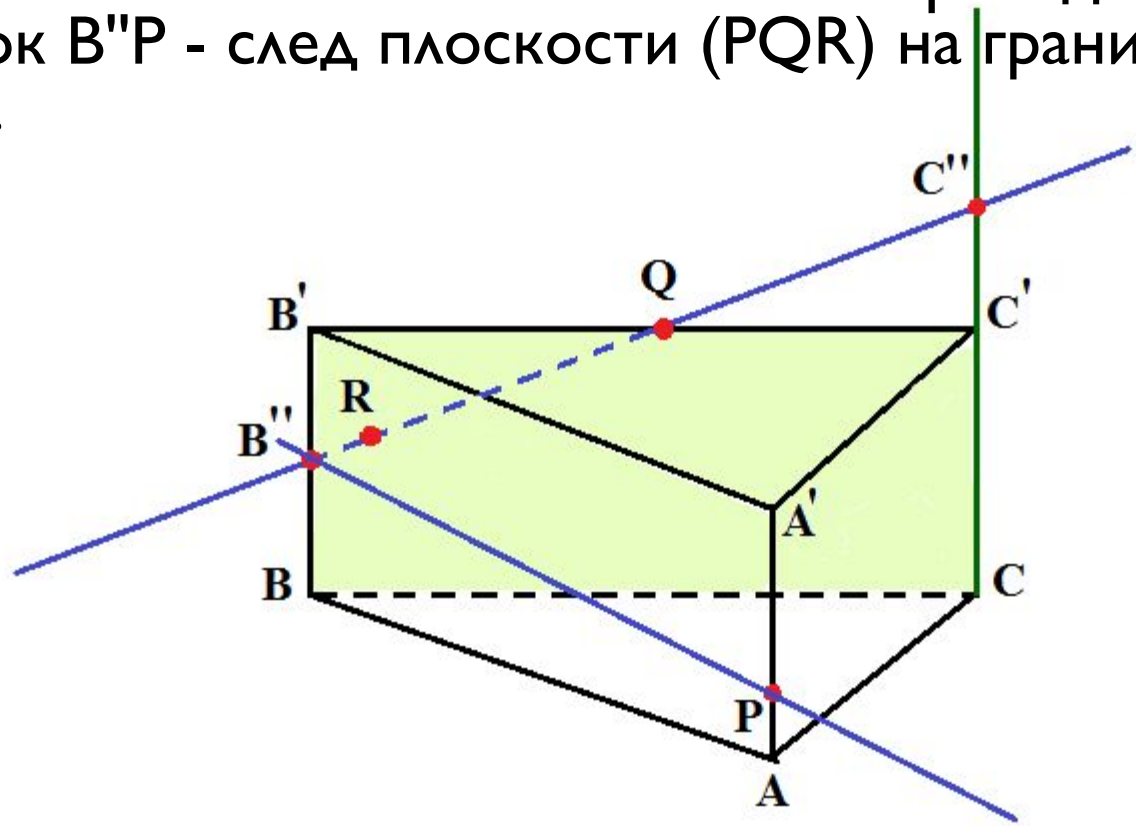
## Задача 3.

Находим точки  $B''$  и  $C''$ , в которых прямая  $QR$  пересекает соответственно прямые  $BB'$  и  $CC'$ . Точки  $B''$  и  $C''$  - это следы плоскости  $(PQR)$  соответственно на прямых  $BB'$  и  $CC'$ .



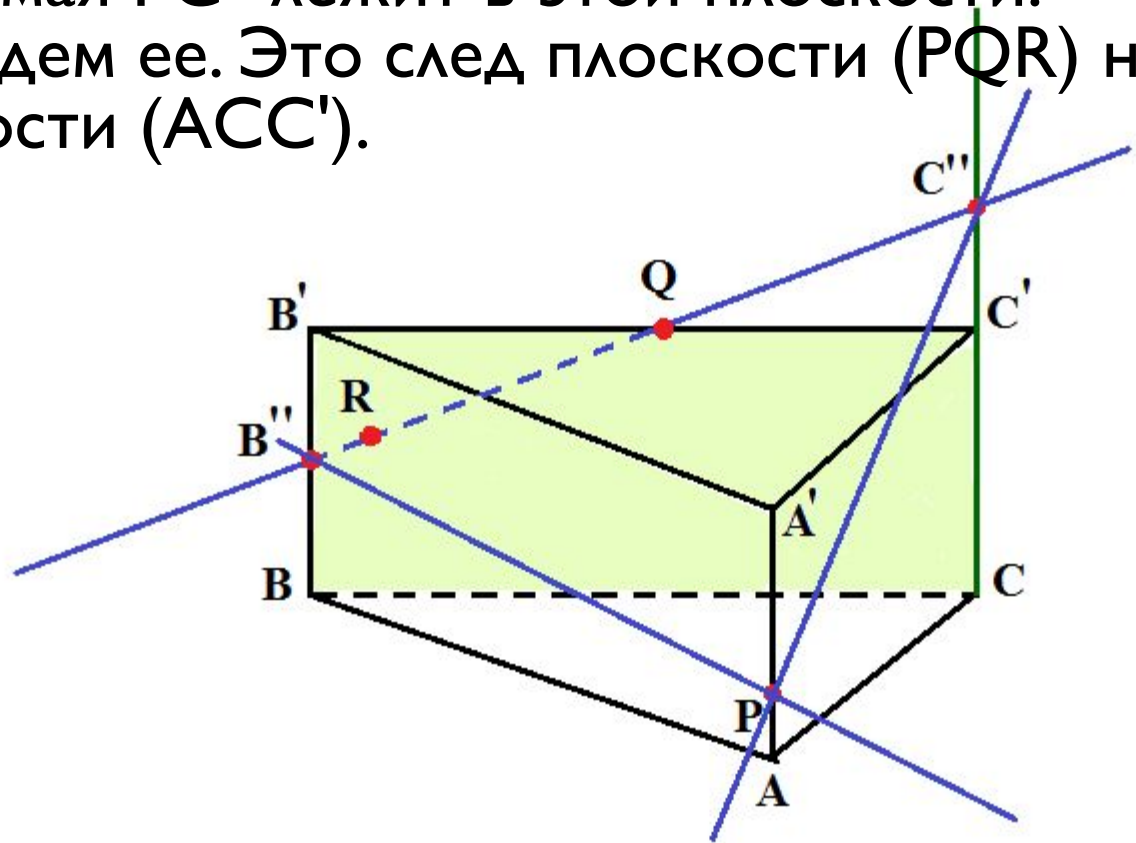
## Задача 3.

Так как точки  $B''$  и  $P$  лежат в плоскости  $(ABB')$ , то прямая  $B''P$  лежит в этой плоскости. Проведем ее. Отрезок  $B''P$  - след плоскости  $(PQR)$  на грани  $ABB'A'$ .



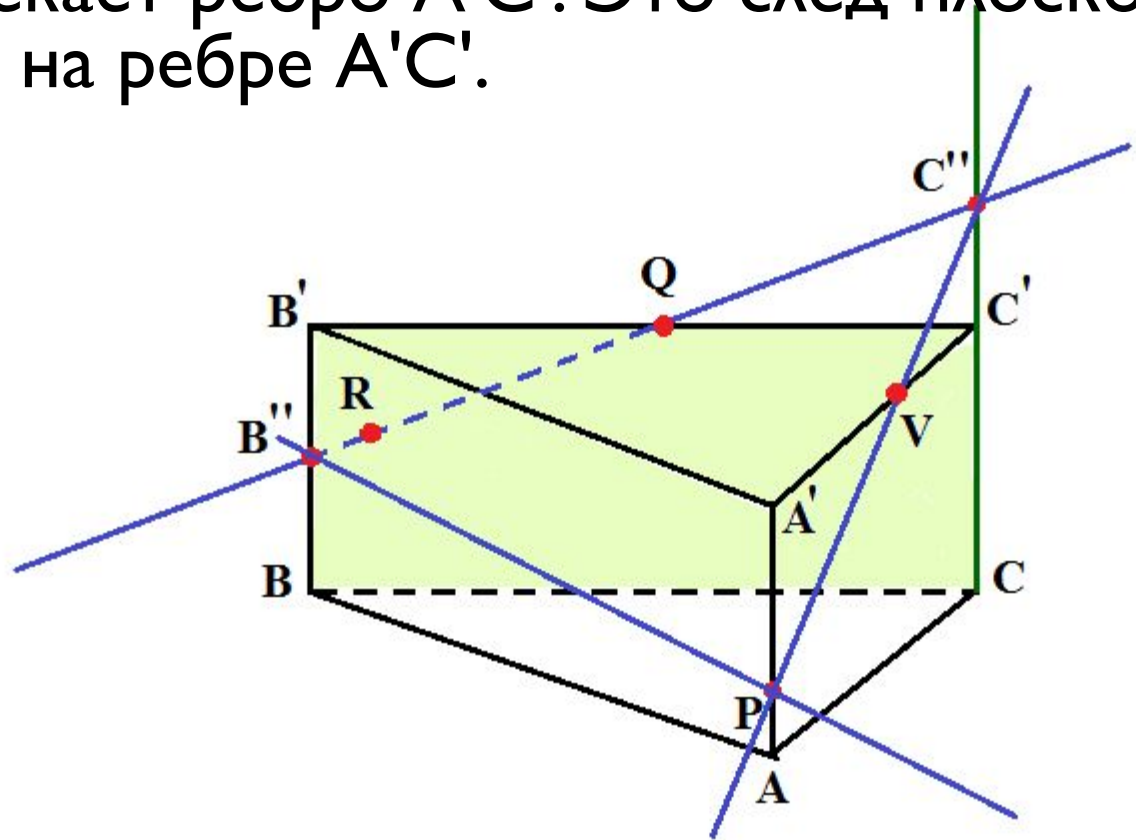
## Задача 3.

Так как точки  $P$  и  $C$  лежат в плоскости  $(ACC')$ , то прямая  $PC''$  лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости  $(PQR)$  на плоскости  $(ACC')$ .



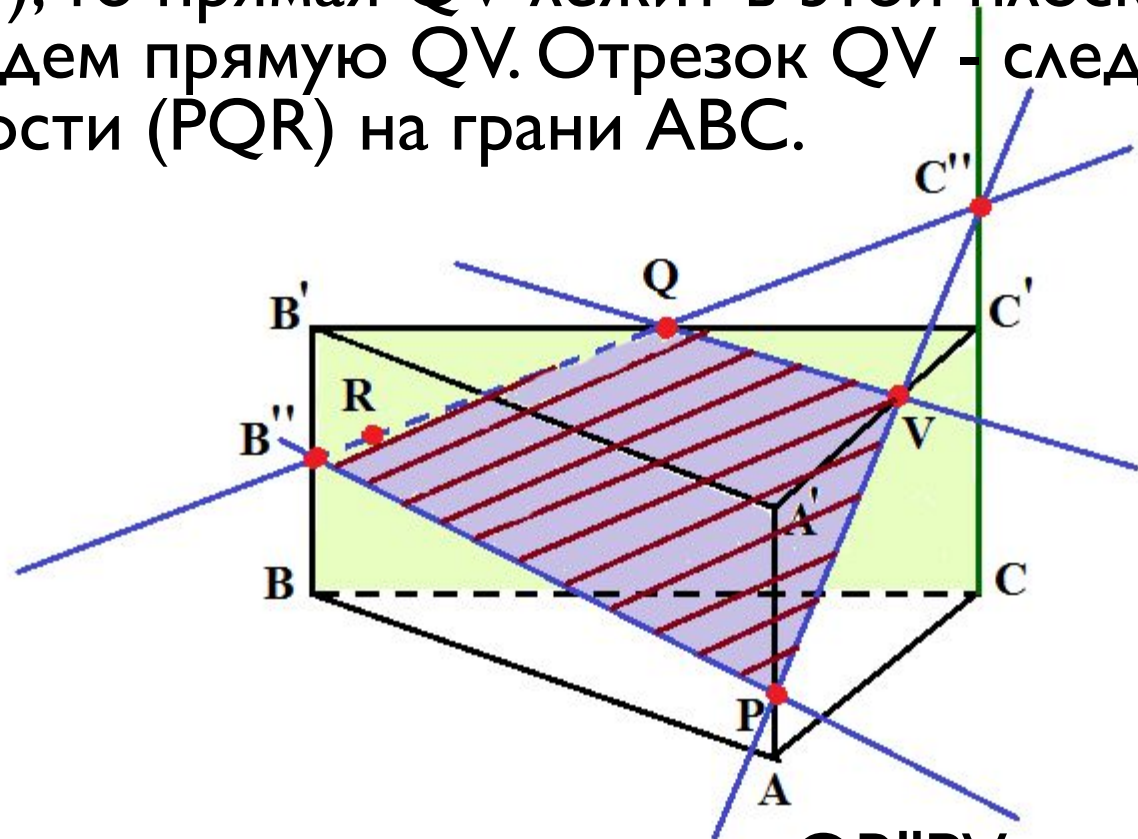
## Задача 3.

Находим точку  $V$ , в которой прямая  $PC''$  пересекает ребро  $A'C'$ . Это след плоскости  $(PQR)$  на ребре  $A'C'$ .



## Задача 3.

Так как точки  $Q$  и  $V$  лежат в плоскости  $(A'B'C')$ , то прямая  $QV$  лежит в этой плоскости. Проведем прямую  $QV$ . Отрезок  $QV$  - след плоскости  $(PQR)$  на грани  $ABC$ .



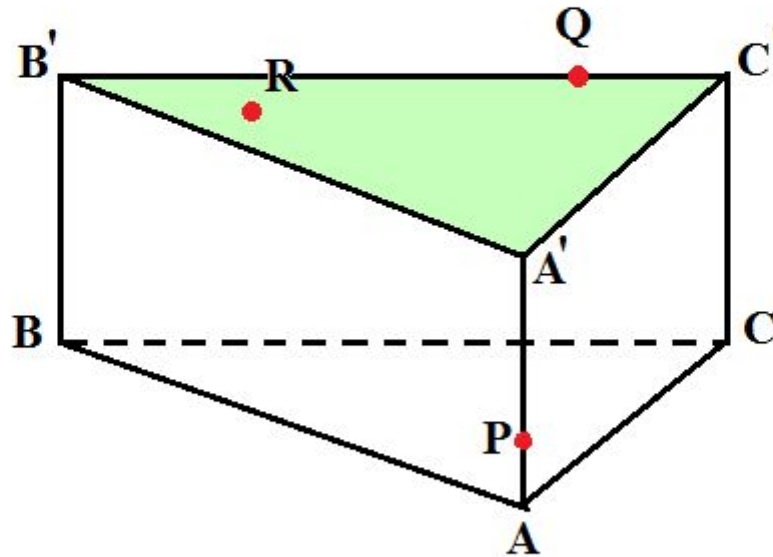
Итак, мы получили многоугольник  $QB''PV$  - искомое сечение.



## Задача 4.

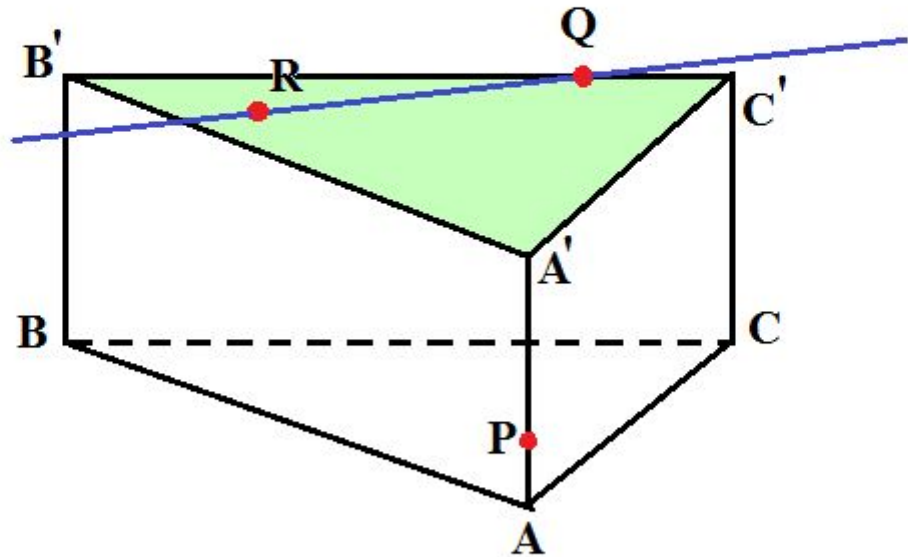
На ребрах  $AA'$  и  $B'C'$  призмы  $ABCA'B'C'$  зададим соответственно точку  $P$  и  $Q$ .

Построим сечение призмы плоскостью  $(PQR)$ , точку  $R$  которой зададим в грани  $A'B'C'$ .



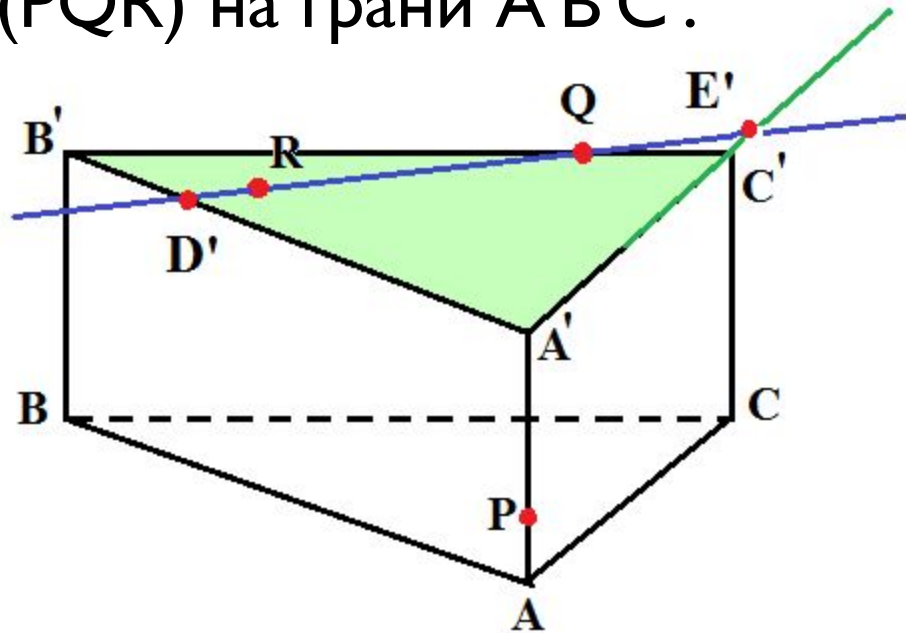
## Задача 4.

Так как точки  $Q$  и  $R$  лежат в плоскости  $(A'B'C')$ , то в этой плоскости лежит прямая  $QR$ . Проведем ее. Это след плоскости  $(PQR)$  на плоскости  $(A'B'C')$ .



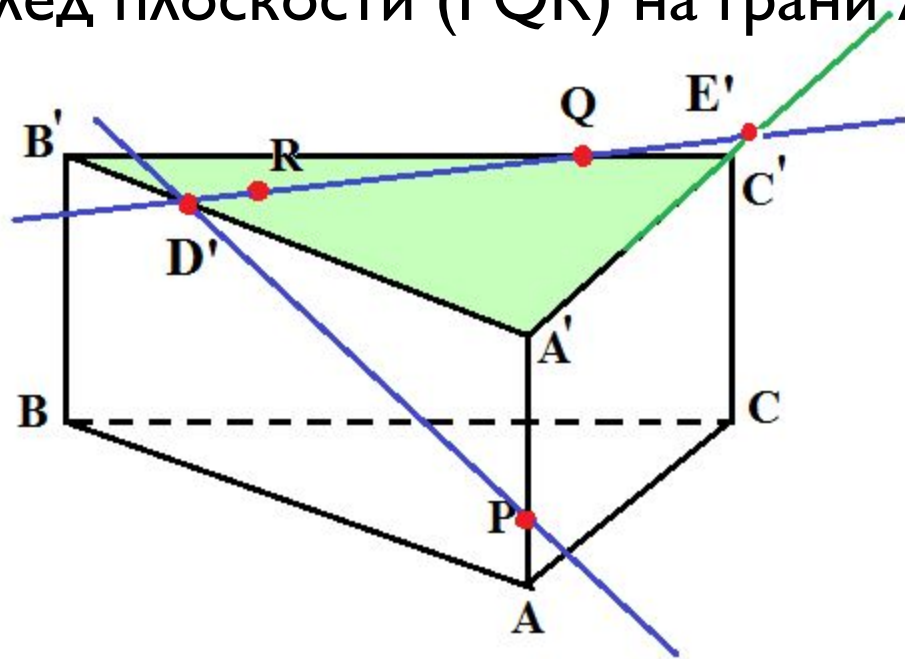
## Задача 4.

Находим точки  $D'$  и  $E'$ , в которых прямая  $QR$  пересекает соответственно прямые  $A'B'$  и  $A'C'$ . Так как точка  $D'$  лежит на ребре  $A'B'$ , отрезок  $E'D'$  - след плоскости  $(PQR)$  на грани  $A'B'C'$ .



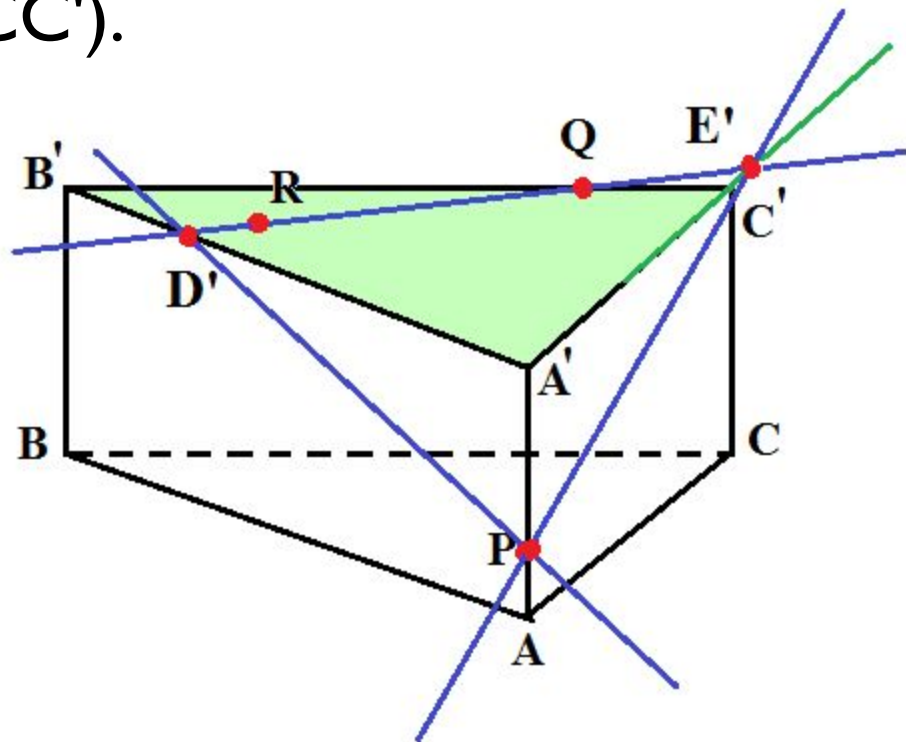
## Задача 4.

Так как точки  $D'$  и  $P$  лежат в плоскости  $(ABB')$ , то прямая  $D'P$  лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости  $(PQR)$  на плоскости  $(ABB')$ , а отрезок  $D'P$  - след плоскости  $(PQR)$  на грани  $ABB'A'$ .



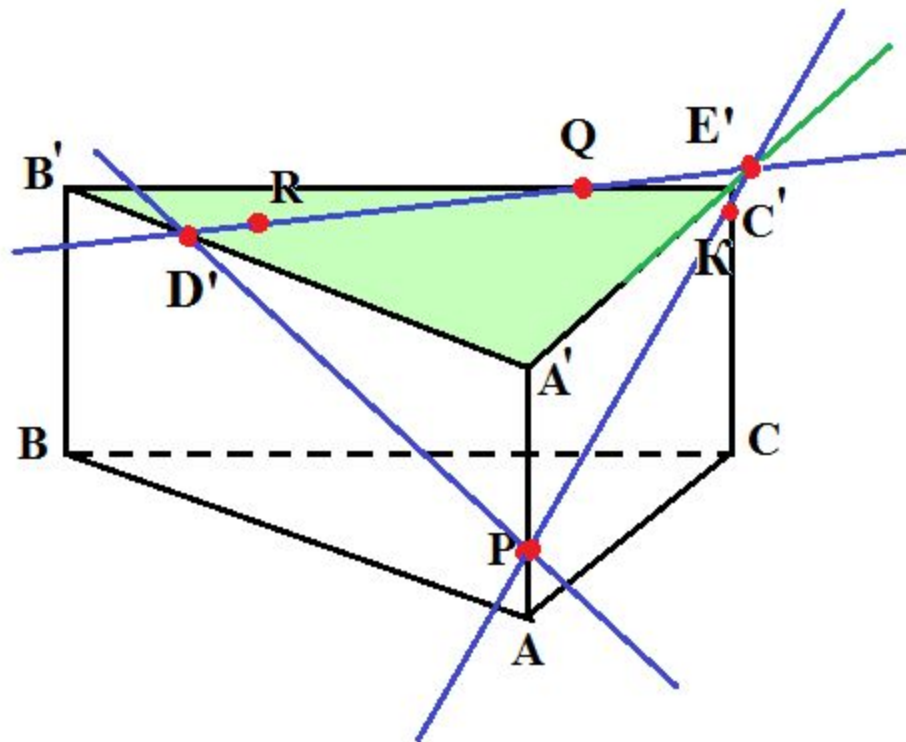
## Задача 4.

Так как точки  $P$  и  $E'$  лежат в плоскости  $(ACC')$ , то в этой плоскости лежит прямая  $PE'$ .  
Проведем ее. Это след плоскости  $(PQR)$  на плоскости  $(ACC')$ .



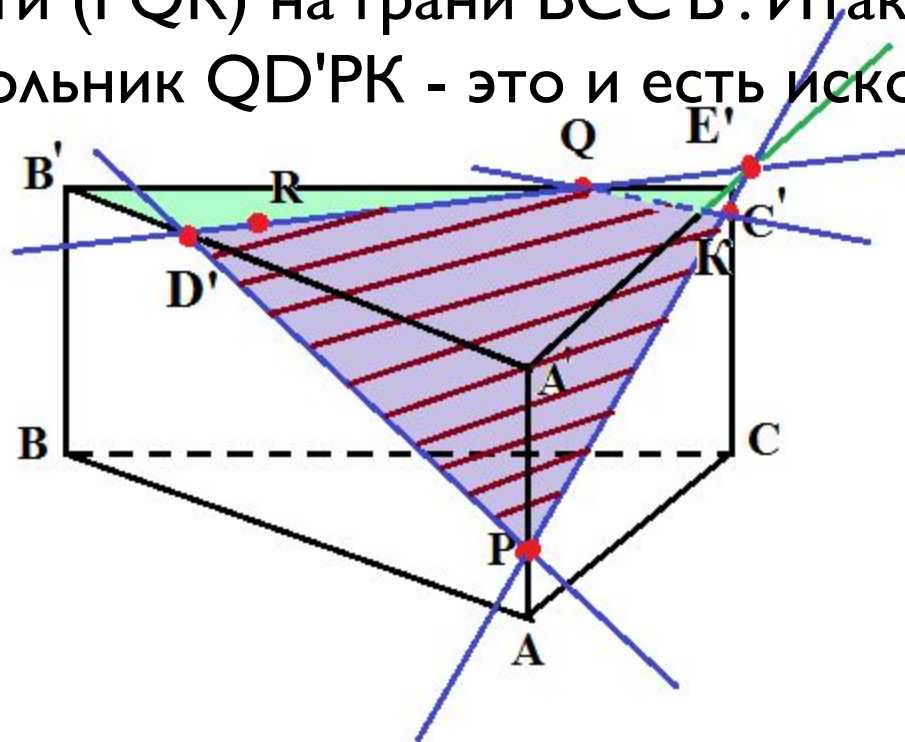
## Задача 4.

Находим точку  $K$ . Так как точка  $K$  лежит на ребре  $CC'$ , то отрезок  $PK$  - это след плоскости  $(PQR)$  на грани  $ACC'A'$ .



## Задача 4.

Так как точки  $Q$  и  $K$  лежат в плоскости  $(BCC')$ , то прямая  $QK$  лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости  $(PQR)$  на плоскости  $(BCC')$ , а отрезок  $QK$  - след плоскости  $(PQR)$  на грани  $BCC'B'$ . Итак, мы получили многоугольник  $QD'PK$  - это и есть искомое сечение.





**Спасибо за внимание!**