

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

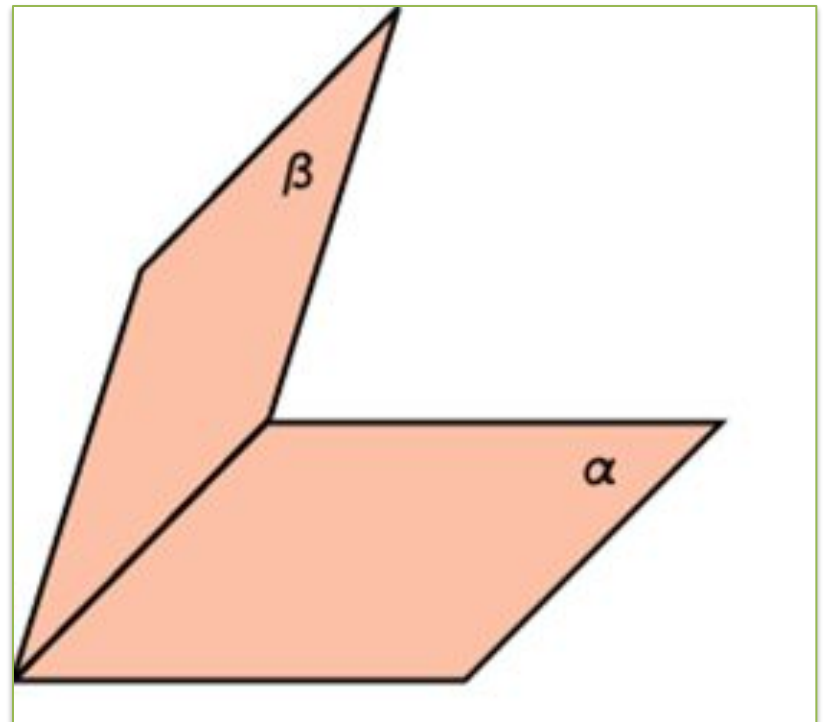
Основные задачи урока:

- Ввести понятие двугранного угла и его линейного угла
- Рассмотреть задачи на применение этих понятий

Определение:

Двугранным
углом называется
фигура,
образованная
двумя
полуплоскостями
с общей
границной прямой.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями.

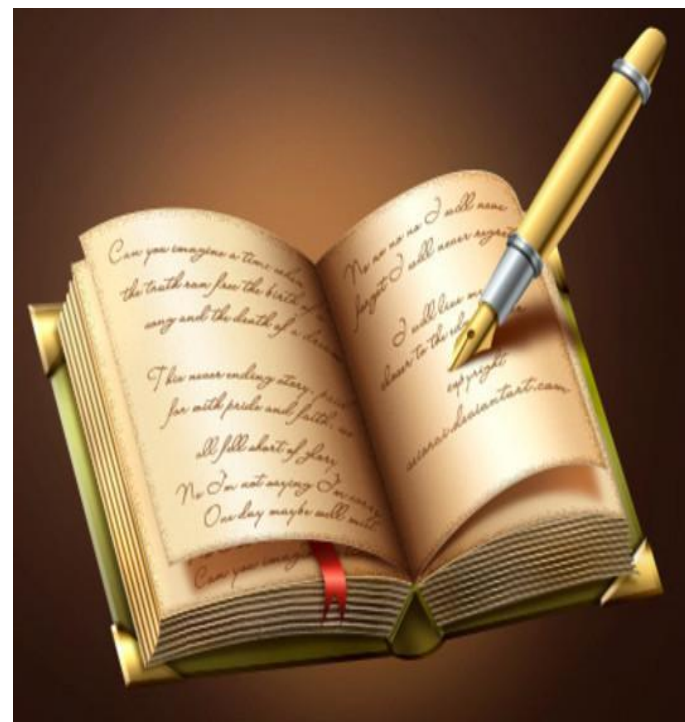
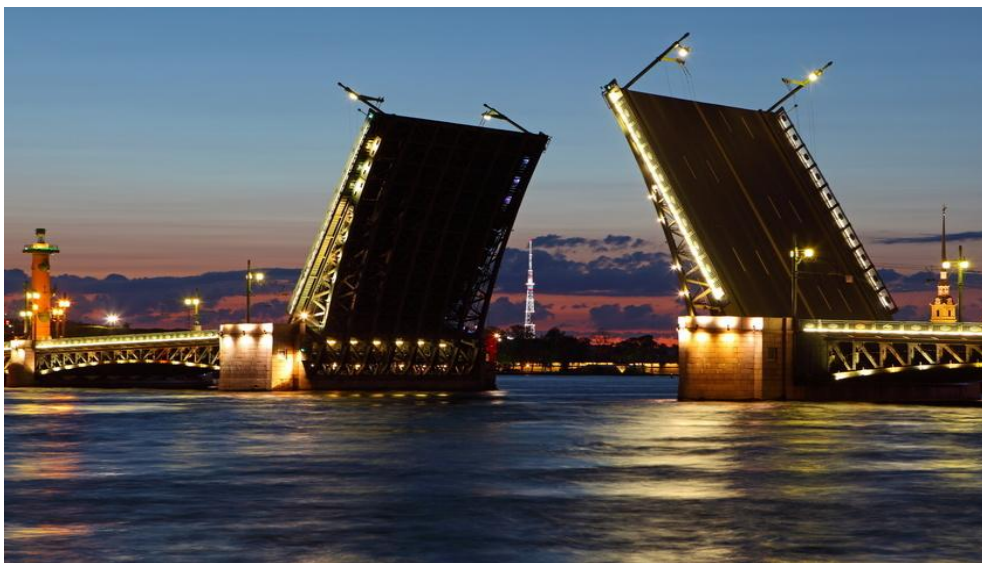


Общая граница этих полуплоскостей – ребром двугранного угла.

В обыденной жизни, форму двугранного угла имеют



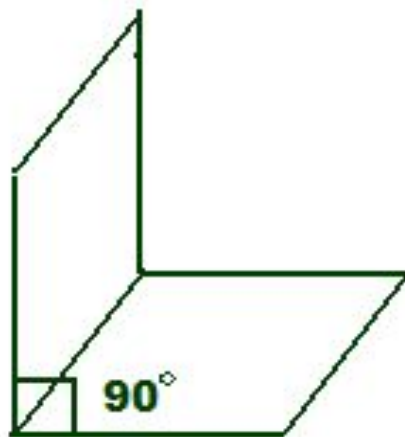
Назовите предметы, имеющие форму двугранного угла



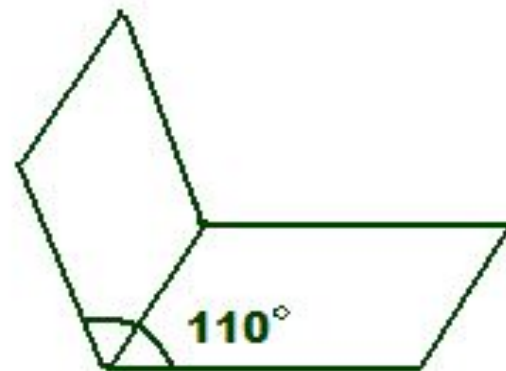
Примеры двугранных углов:



острый

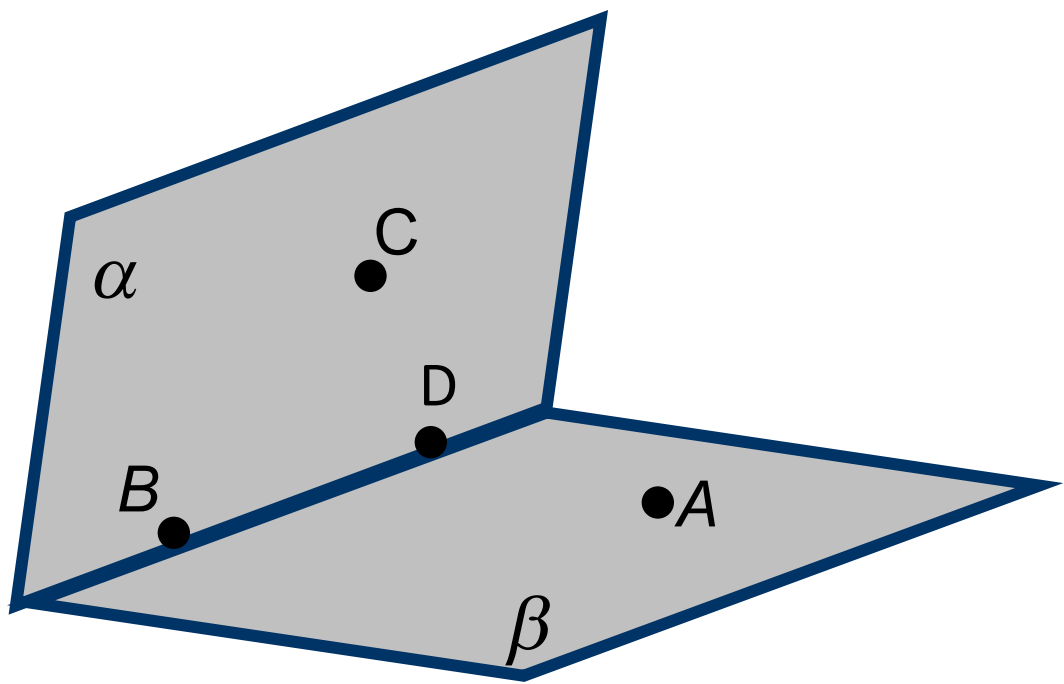


прямой



тупой

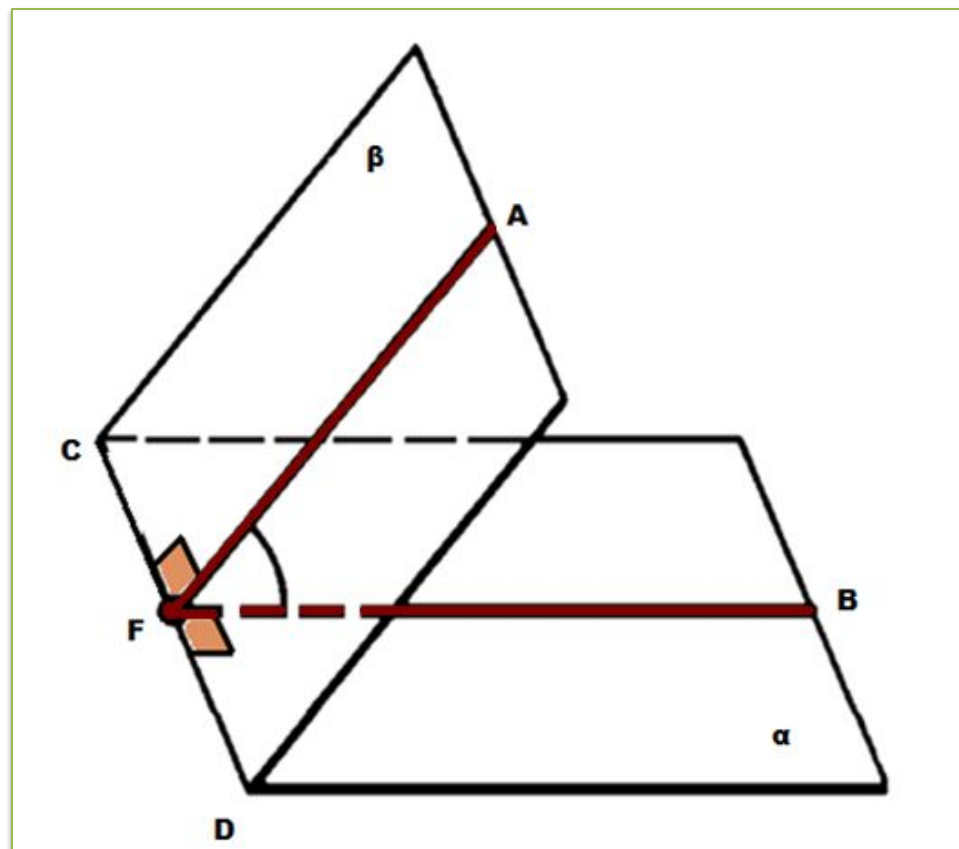
Обозначение двугранного угла.



Угол CBDA

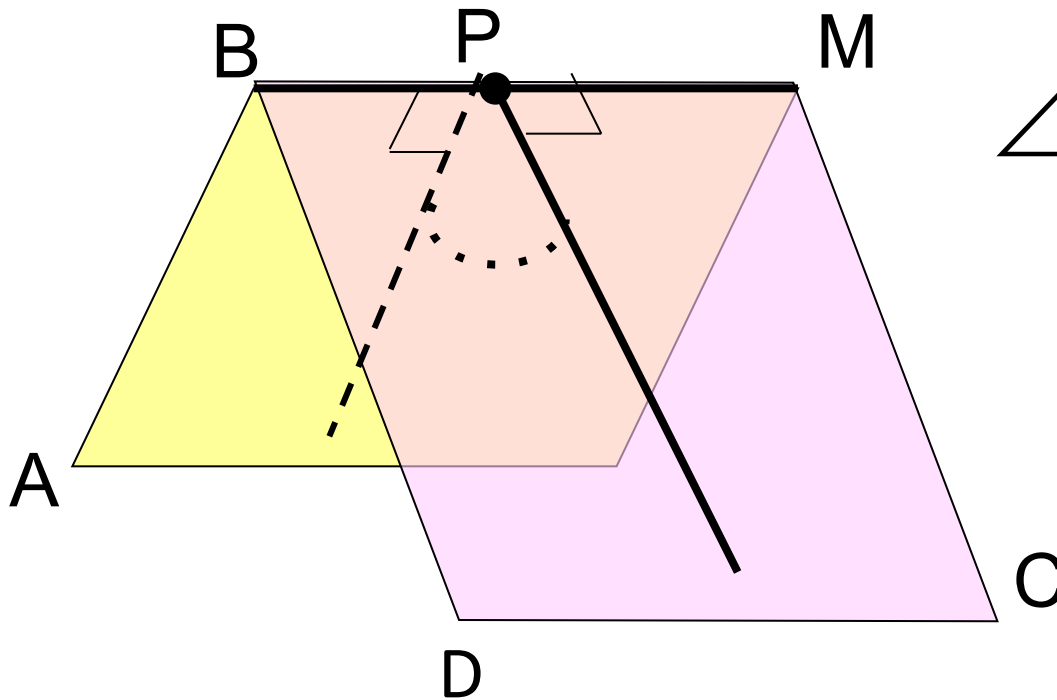
$$AF \perp CD$$
$$BF \perp CD$$

AFB-линейный
угол
двугранного
угла **ACDB**



**Величиной двугранного угла называется
величина его линейного угла.**

Измерение двугранных углов. Линейный угол.

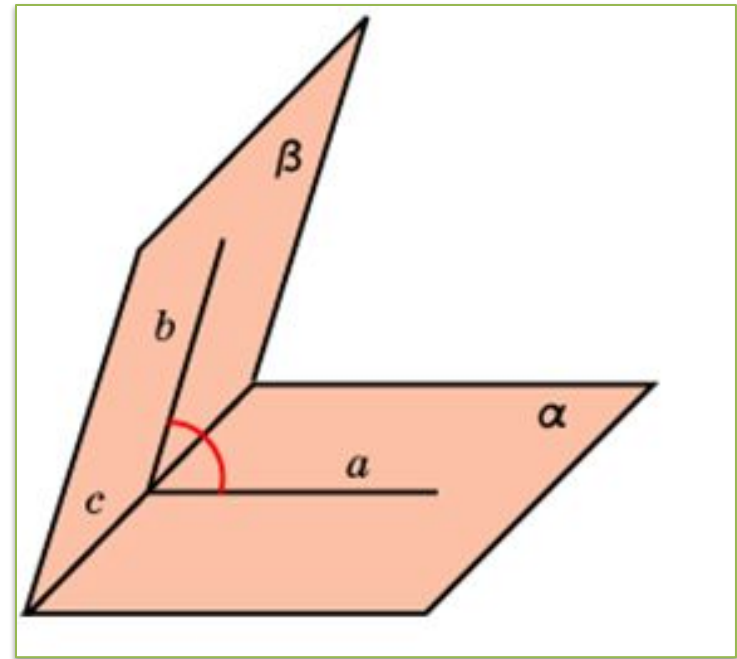


$$\angle ABMC = \angle P$$

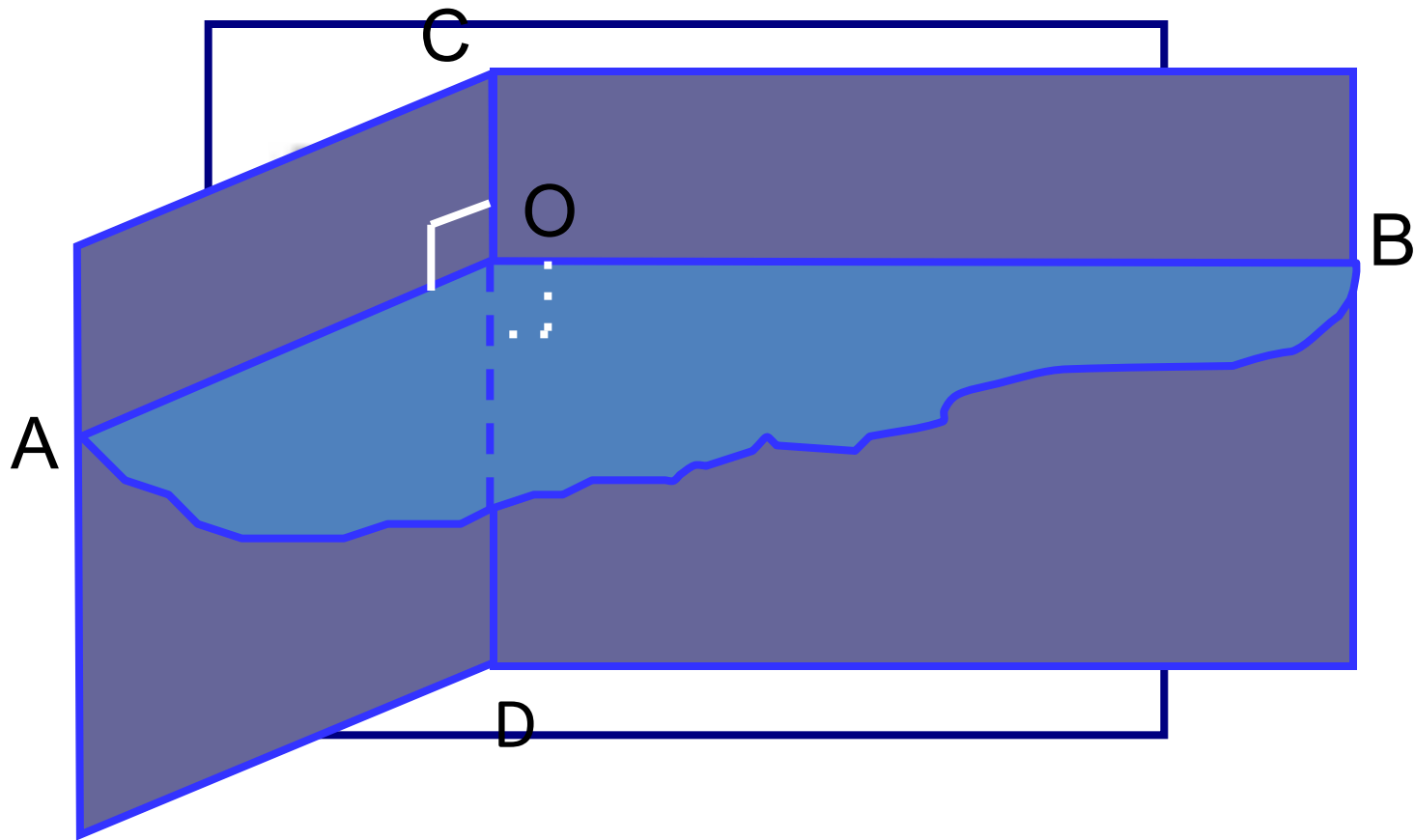
Угол P – линейный угол двугранного угла ABMC

Определение:

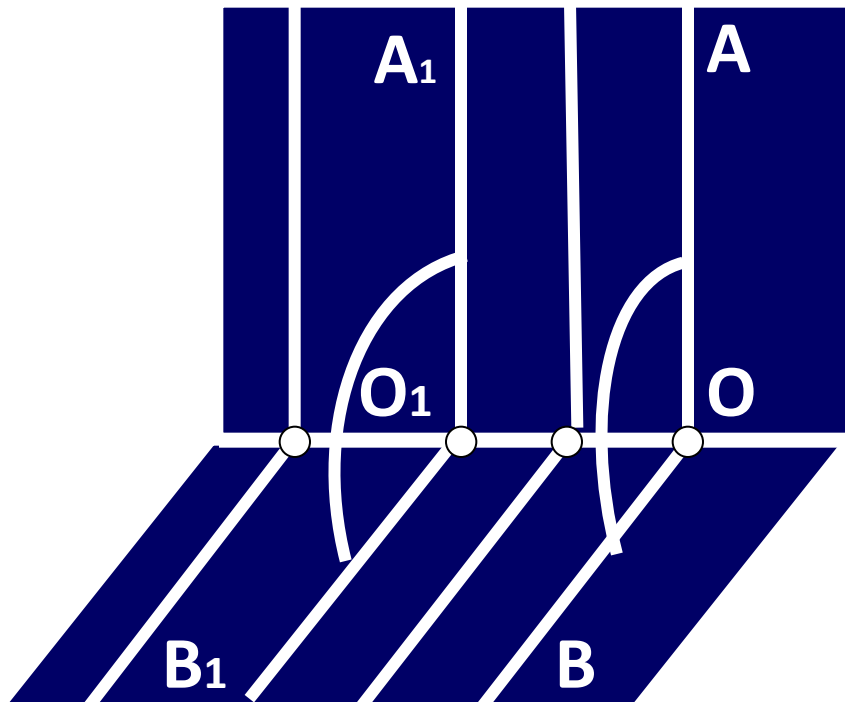
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.



Линейным углом двугранного угла
называется сечение двугранного угла
плоскостью, перпендикулярной ребру.



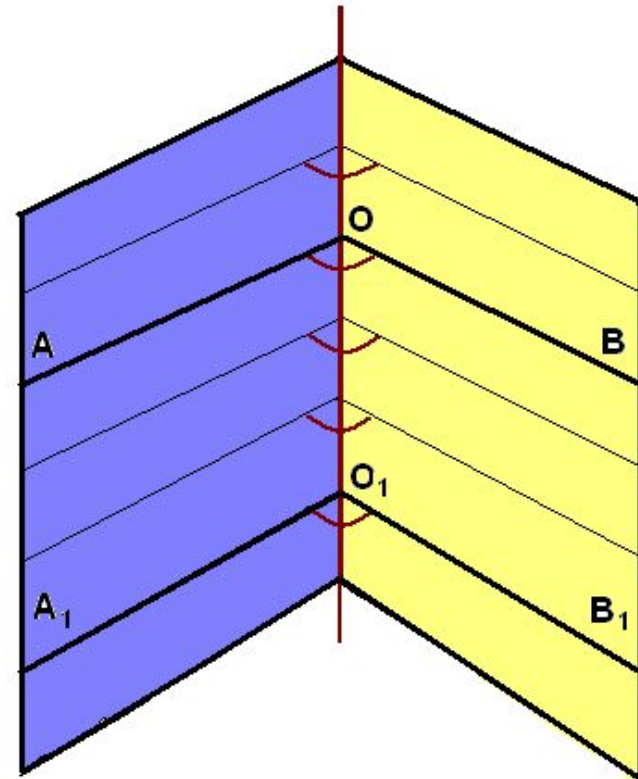
Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.



Докажем, что все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Рассмотрим два линейных угла $\angle AOB$ и $\angle A_1OB_1$. Лучи OA и OA_1 лежат в одной грани и перпендикулярны OO_1 , поэтому они сонаправлены. Лучи OB и OB_1 также сонаправлены.

Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ (как углы с сонаправленными сторонами).



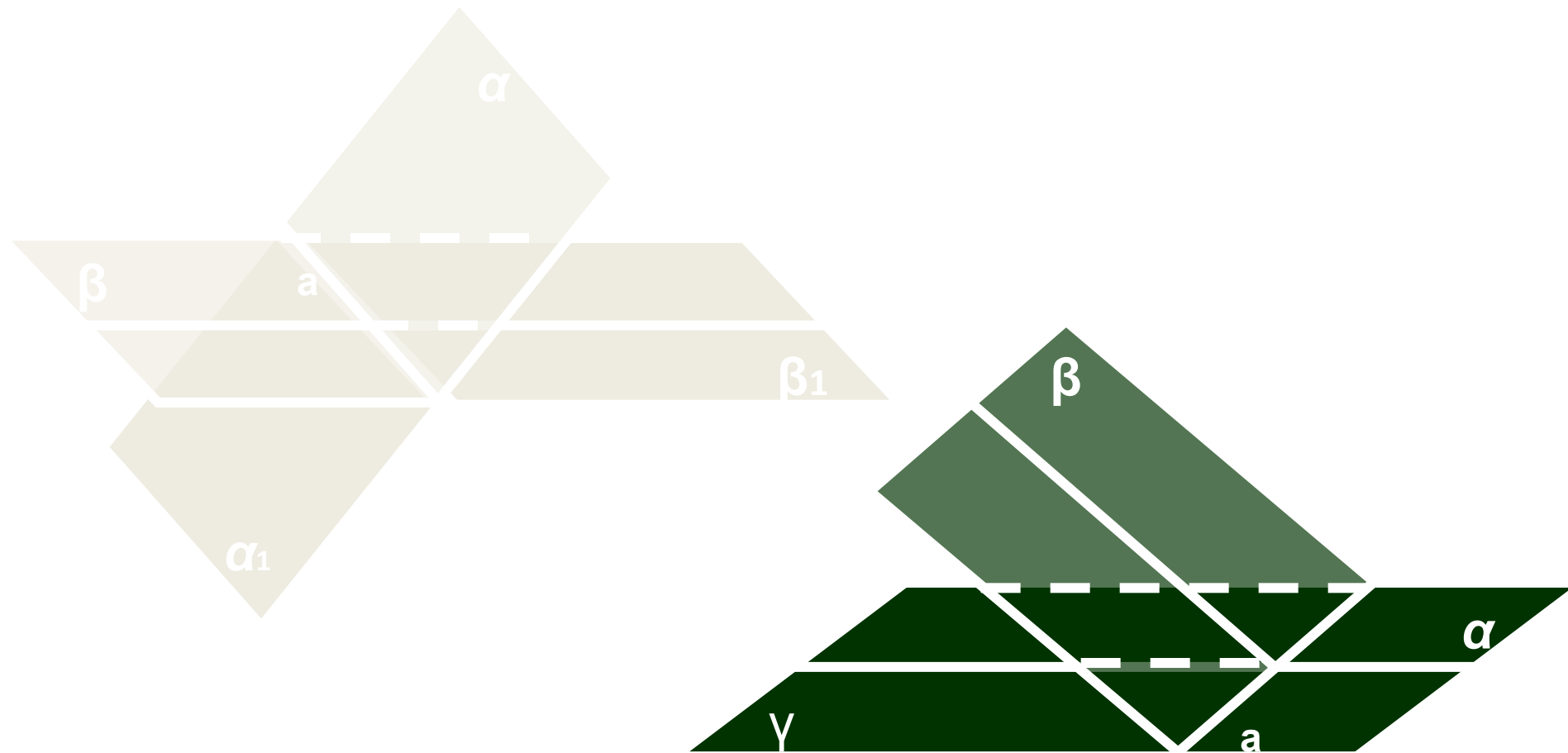
Способ нахождения (построения) линейного угла.

- 1. Найти (увидеть) ребро и грани двугранного угла*
- 2. В гранях найти направления (прямые) перпендикулярные ребру*
- 3. (при необходимости) заменить выбранные направления параллельными им лучами с общим началом на ребре двугранного угла*

При изображении сохраняется **параллельность и отношение длин параллельных отрезков**

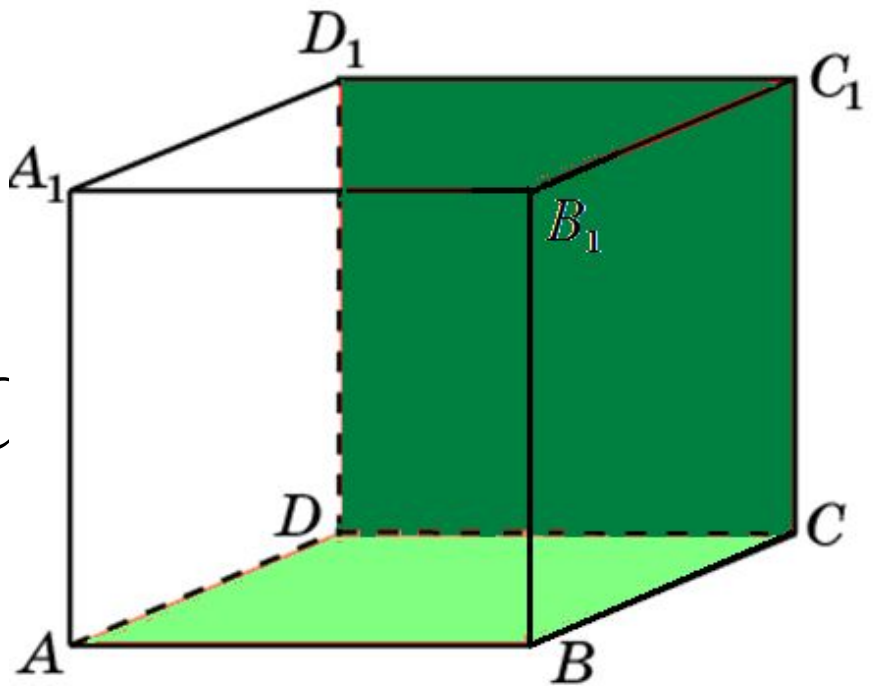


Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.



Задача 1:

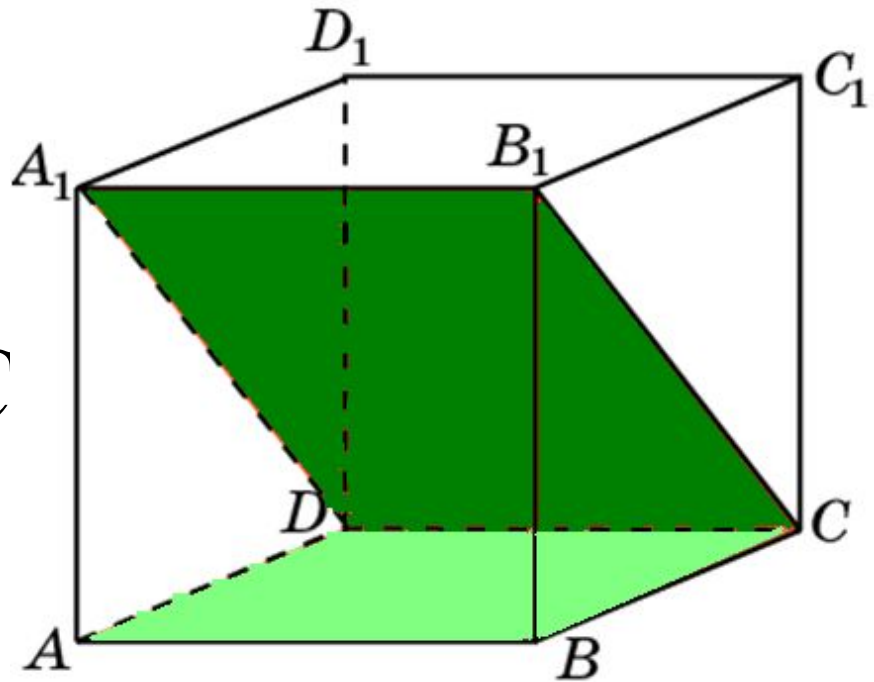
В кубе $A...D_1$
найдите угол
между
плоскостями ABC
и CDD_1 .



Ответ: 90° .

Задача 2:

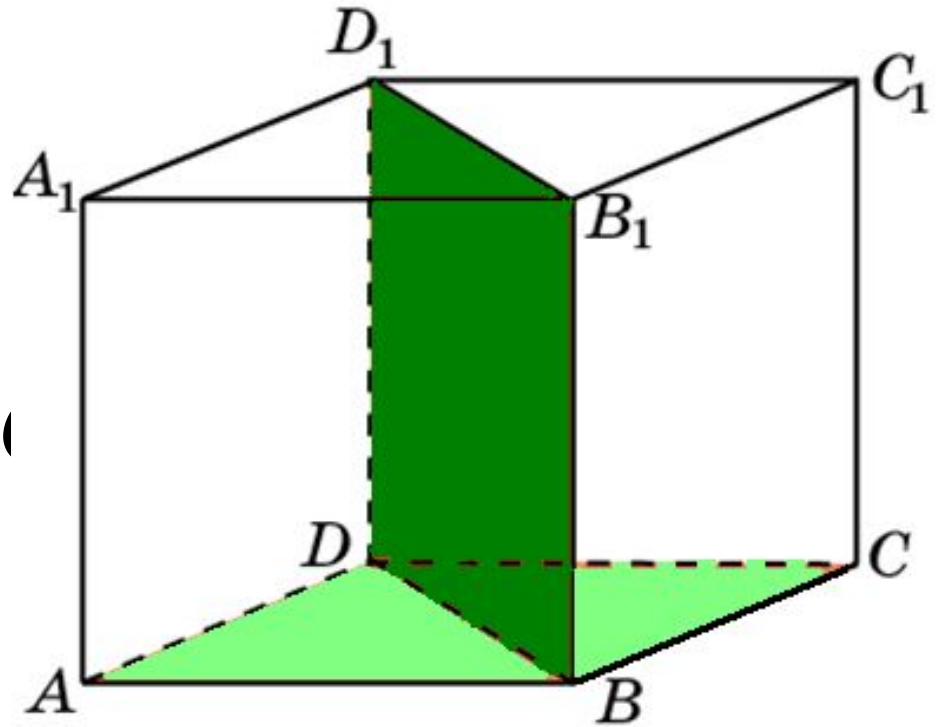
В кубе $A\dots D_1$
найдите угол
между
плоскостями ABC
и CDA_1 .



Ответ: 45° .

Задача 3:

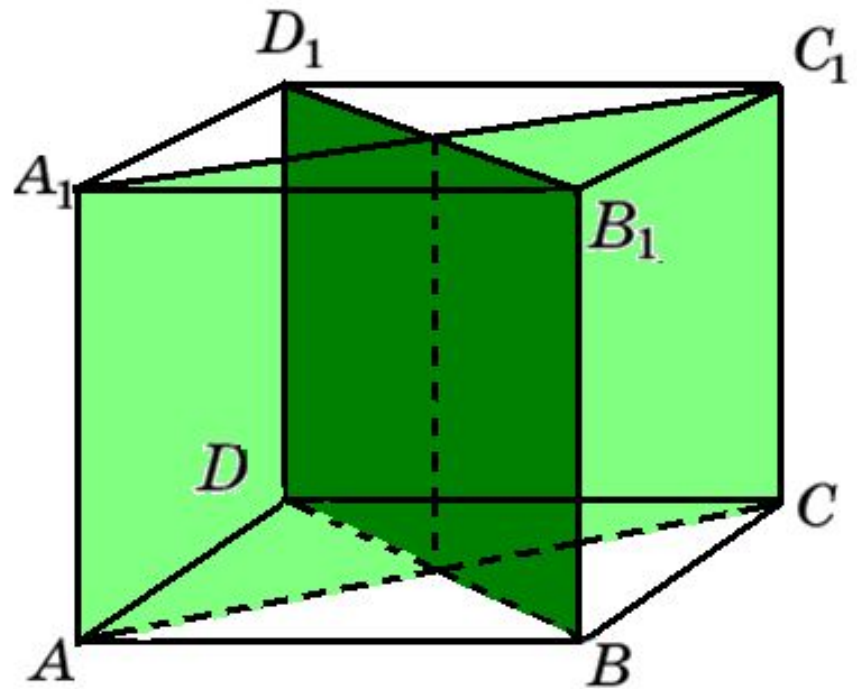
В кубе $A...D_1$
найдите угол
между
плоскостями AB_1C_1
и BDD_1 .



Ответ: 90° .

Задача 4:

В кубе $A...D_1$
найдите угол
между
плоскостями
 ACC_1 и BDD_1 .



Ответ: 90° .

Задача 5:

В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями

BC_1D и BA_1D .

Решение:

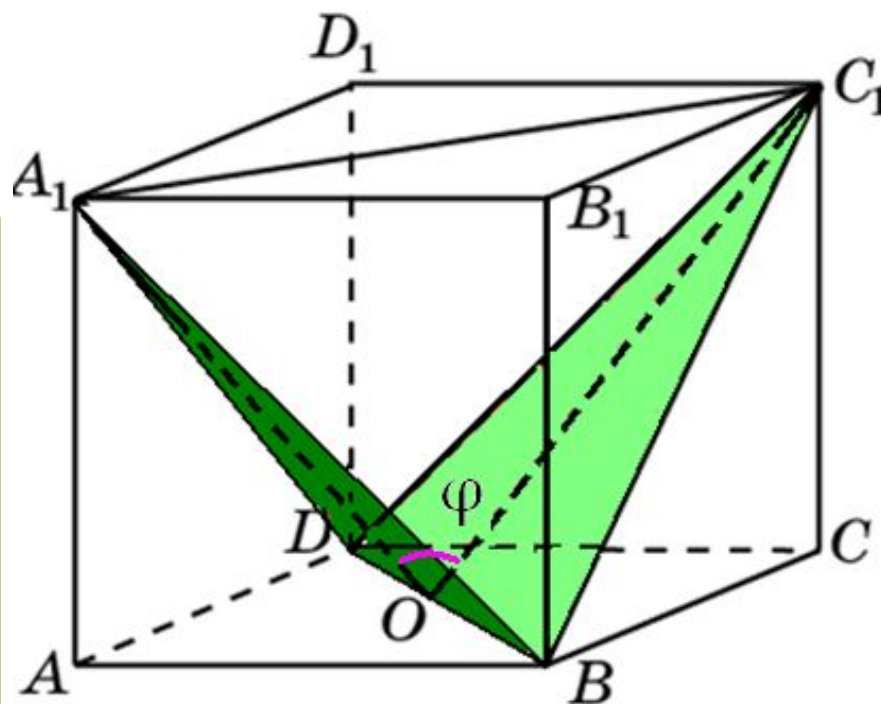
Пусть O – середина BD .

A_1OC_1 – линейный угол двугранного угла A_1BDC_1 .

$$A_1C_1 = \sqrt{2}, \quad A_1O = C_1O = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

По теореме косинусов получаем:

$$\cos \varphi = \frac{1}{6}.$$



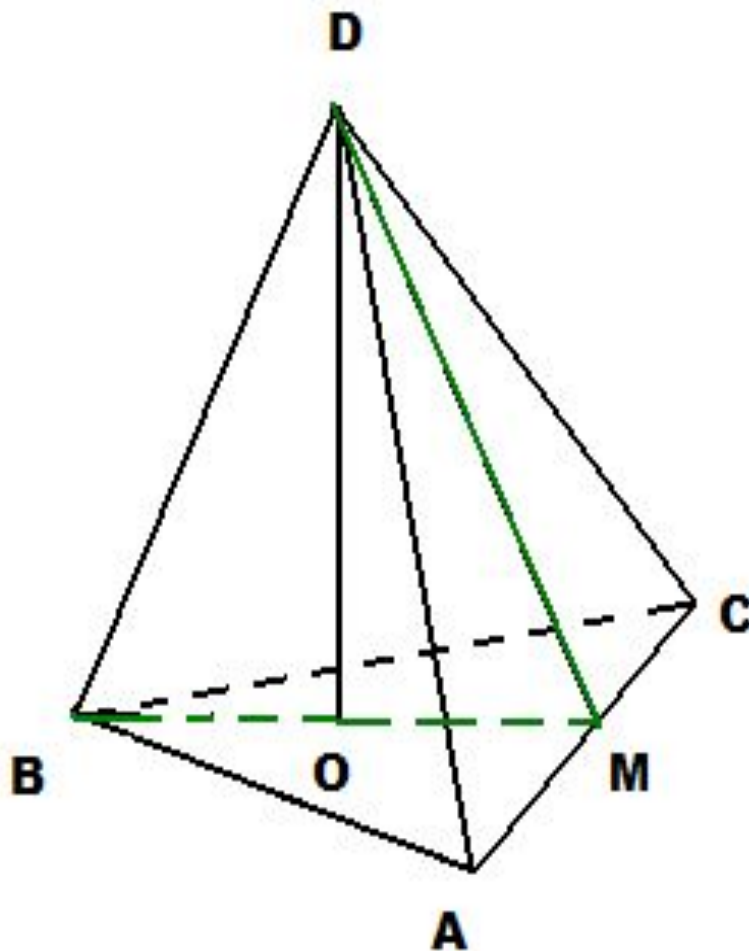
Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{6}$.

Задача 6:

В тетраэдре $DAVC$ все ребра равны, точка M – середина ребра AC . Докажите, что $\angle DMV$ – линейный угол двугранного угла $BACD$.

Решение:

Треугольники ABC и ADC правильные, поэтому, $BM \perp AC$ и $DM \perp AC$ и, следовательно, $\angle DMB$ является линейным углом двугранного угла $DACB$.



Задача 7:

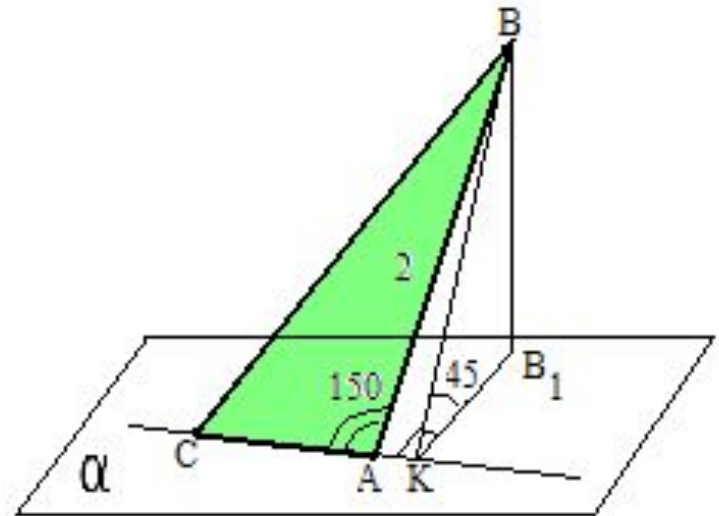
Из вершины B треугольника ABC , сторона AC которого лежит в плоскости α , проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1 . Найдите расстояние от точки B до прямой AC и до плоскости α , если $AB=2$, $\angle BAC=150^\circ$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45° .

Решение:

1) ABC – тупоугольный треугольник с тупым углом A , поэтому основание высоты BK лежит на продолжении стороны AC .

BK – расстояние от точки B до AC .

BB_1 – расстояние от точки B до плоскости α



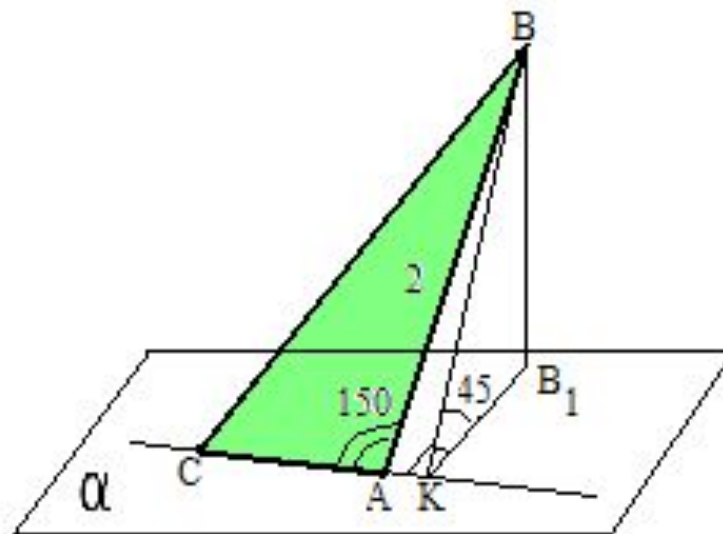
2) Так как $AC \perp BK$, то $AC \perp KB_1$ (по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах).
 Следовательно, $\angle VKB_1$ – линейный угол двугранного угла $VACB_1$ и $\angle VKB_1 = 45^\circ$.

3) $\triangle BAK$:

$\angle A = 30^\circ$, $BK = BA \cdot \sin 30^\circ$,
 $BK = 1$.

$\triangle VKB_1$:

$BB_1 = BK \cdot \sin 45^\circ$, $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$



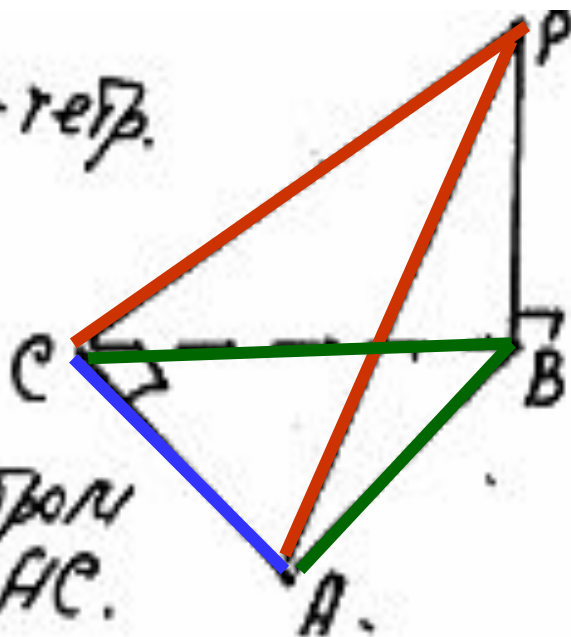
Ответ: $BK = 1$, $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 1 Дано: $PAVC$ -тетр.

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$PB \perp ABC.$$

Указать: лин. \angle для
двугранного ребром
 AC .



Решение

Ребро AC , грани ACP .. и ACB

1. В грани ACB прямая CB перпендикулярна ребру
 CA (по условию)

2. В грани ACP .. прямая CP перпендикулярна ребру CA
(по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, угол PCV -- линейный для двугранного ..
угла с ребром AC

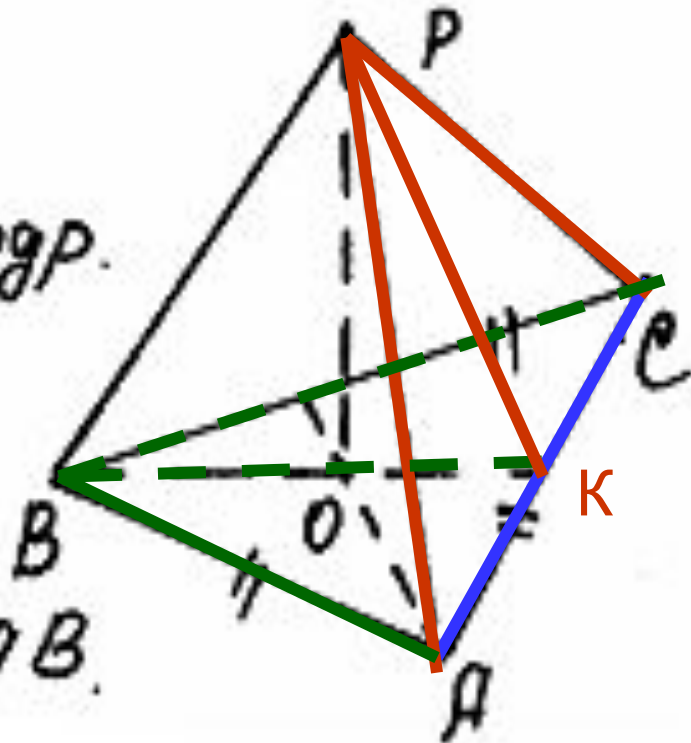
Задача 2. Дано $РABC$ -тетраэдр.

$\triangle ABC$ - правильный

O - центр $\triangle ABC$.

$PO \perp ABC$.

Указать: лнн. \angle для $\angle PCAV$.



Решение

Ребро AC , грани ACP и ACB

1. В грани ACB прямая BO перпендикулярна ребру CA
(по свойству равностороннего треугольника)

2. В грани ACP прямая PK перпендикулярна ребру CA
(по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, Угол PKB - линейный для двугранного угла с $PCAV$

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$$\angle TMK = 90^\circ$$

$$MK = MT$$

$$PT \perp MKT$$

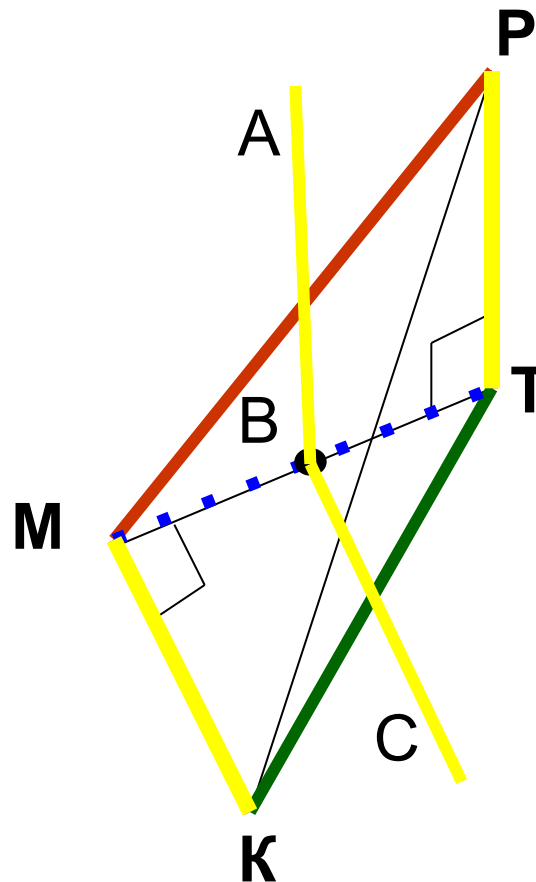
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ



А) Двугранный угол **РТМК**:

(1) ребро **MT**, грани **MTP** и **MTK**

(2) В грани **MTP** прямая **TP** перпендикулярна ребру **MT**
(по определению прямой, перпендикулярной плоскости)

В грани **MTK** прямая **MK** перпендикулярна ребру **MT**
(по условию)

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$PT \perp MKT$

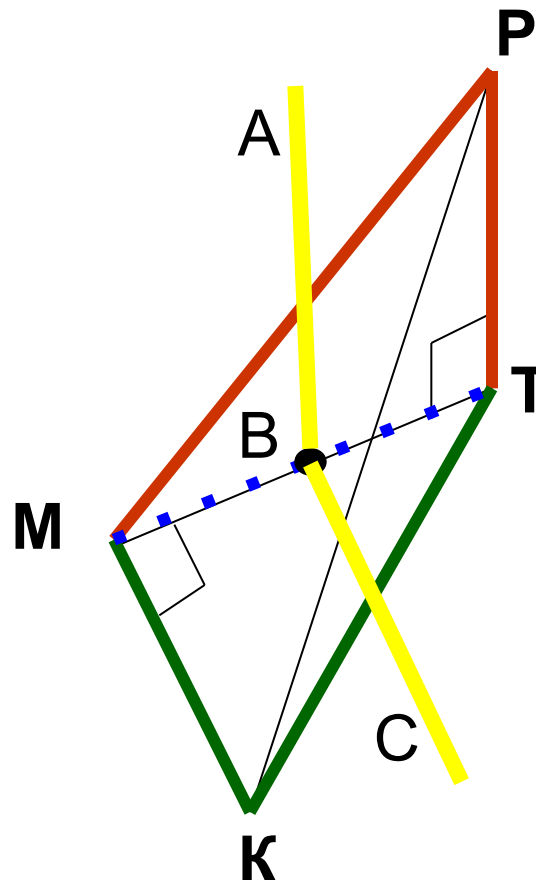
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). $PTMK$,

б). $PMKT$,

в). $PKTM$



AB параллельна PT (по построению), а так как PT перпендикулярна ребру MT (по доказанному), то AB перпендикулярна ребру MT (по лемме о связи параллельности и перпендикулярности) Аналогично BC перпендикулярна ребру MT. Значит, угол ABC – искомый

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

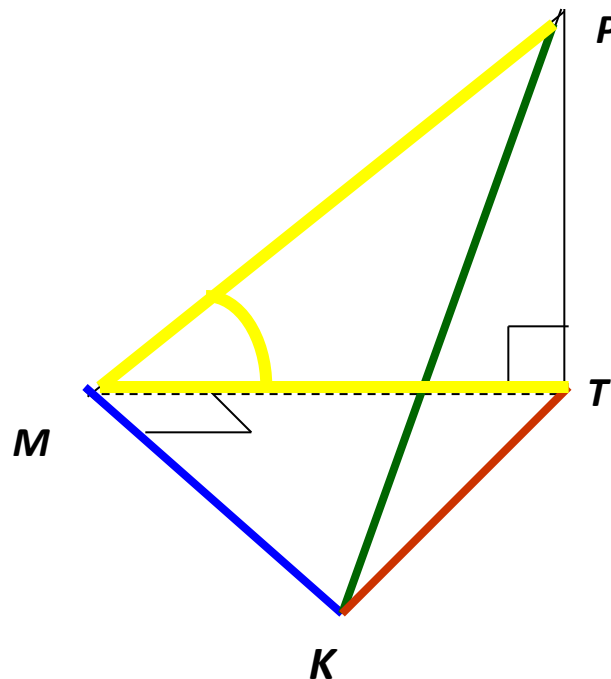
$MK = MT$

$PT \perp MKT$

Указать:

линейные углы для
двугранных углов

- а). РТМК,
- б). РМКТ,
- в). РКТМ



б) Двугранный угол **РМКТ**:

(1) ребро **МК**, грани **МКР** и **МКТ**

(2) В грани **МТК** прямая **МТ** перпендикулярна ребру **МК** (по условию)

В грани **МКР** прямая **МР** перпендикулярна ребру **МК** (по теореме о трех перпендикулярах)

Ответ. Угол **РМТ** - линейный для двугранного угла с РМКТ

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$$\angle TMK = 90^\circ$$

$$MK = MT$$

$$PT \perp MKT$$

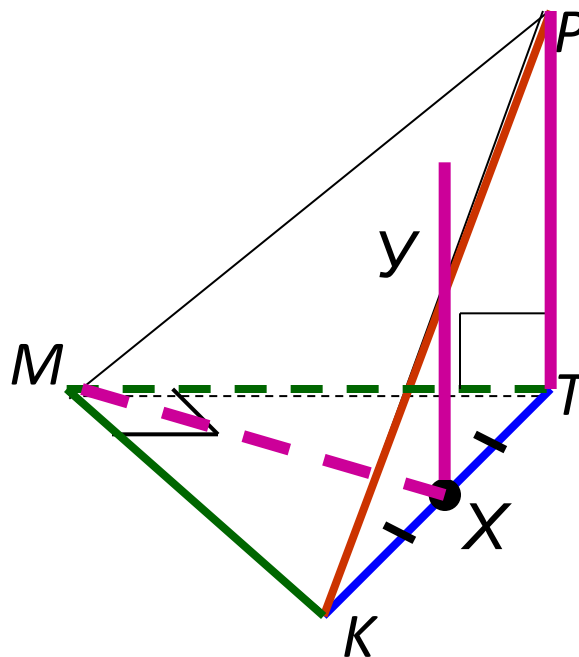
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ



в) Двугранный угол **РТКМ**:

(1) ребро **TK**, грани **TKM** и **TKP**

(2) В грани **MTK** прямая **MX**, где **X** – середина **KT**, перпендикулярна ребру **KT** (по свойству равнобедренного треугольника)

В грани **KPT** прямая **PT** перпендикулярна ребру **KT**
(по определению прямой перпендикулярной плоскости)

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$PT \perp MKT$

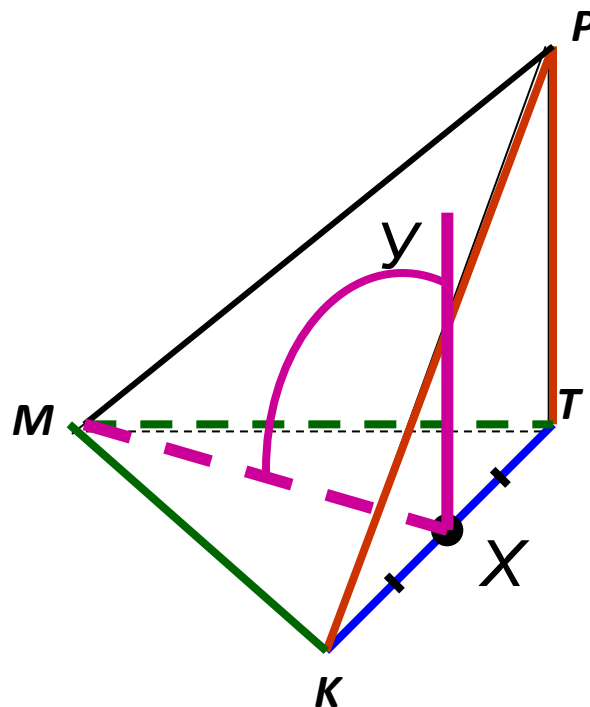
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ

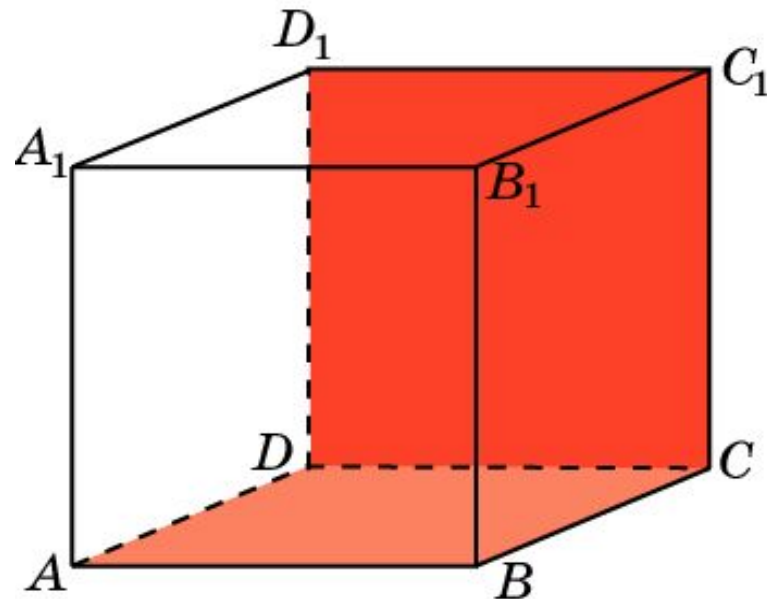


в) Двугранный угол **РКТМ**:

3) Построим прямую **УХ** параллельно прямой **РТ**, она будет лежать в плоскости **РКТ** (почему?) получим, что прямая **ХУ** перпендикулярно ребру **КТ**
(по лемме о связи параллельности и перпендикулярности)

Значит, искомый **угол УХМ**

ПОДУМАЙ!



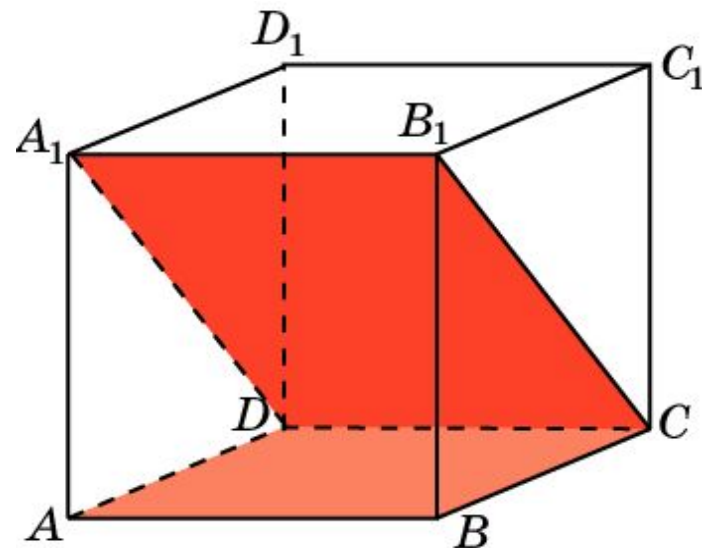
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1 .

Ответ: 90°

ПРАВИЛЬНО!



ПОДУМАЙ!



2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CA_1B_1 .

ПРАВИЛЬНО!

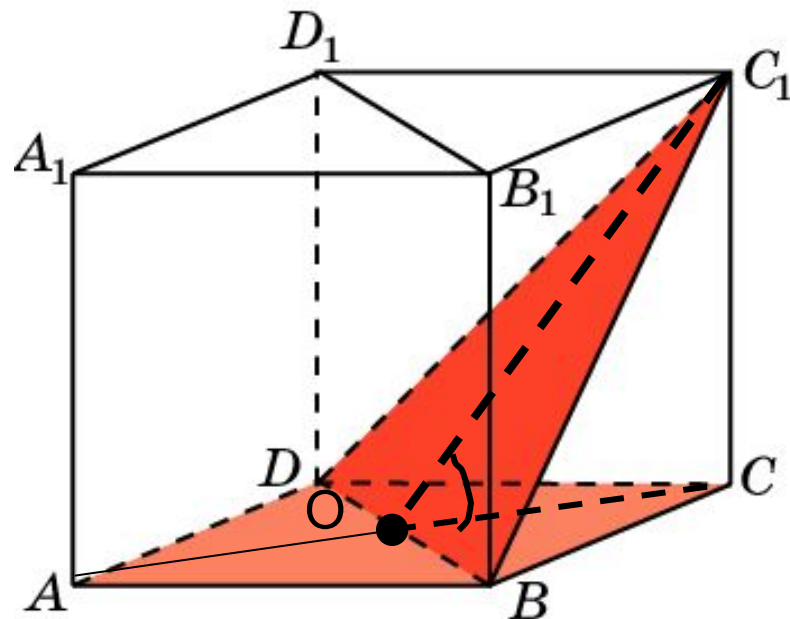


Ответ: 45°

ПОДУМАЙ!

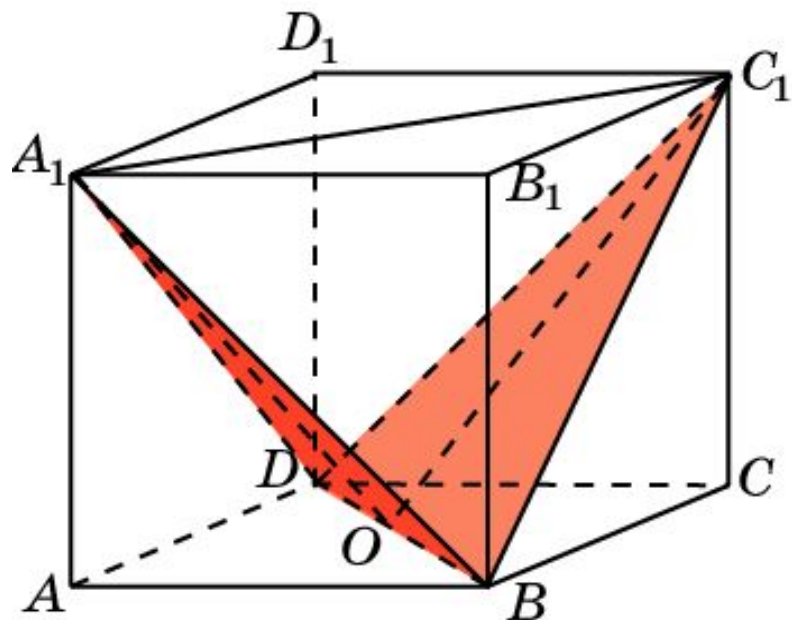


3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D .



Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$.

4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и BA_1D .

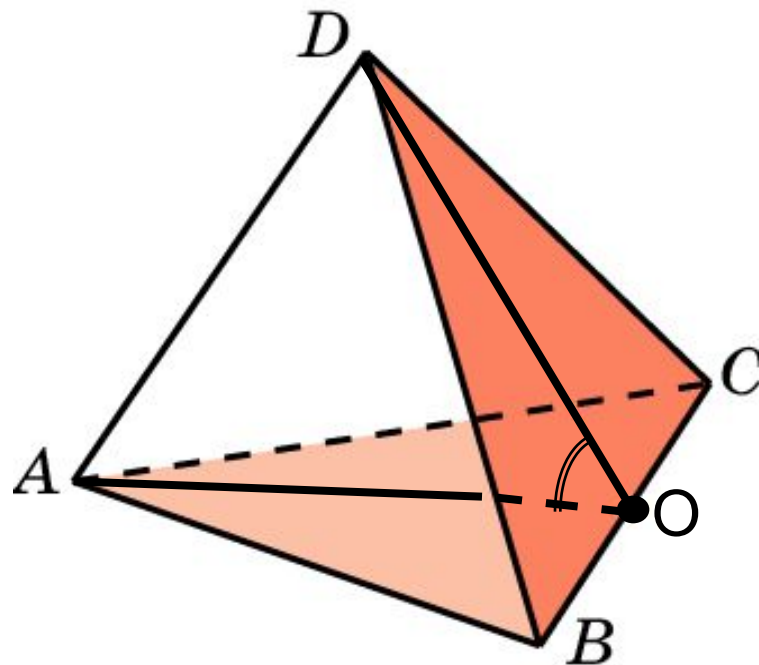


Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

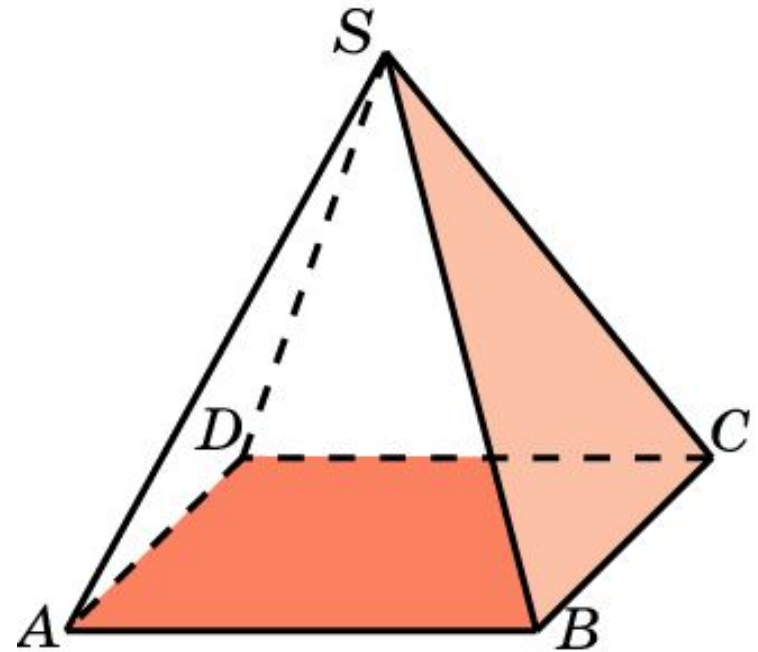


ПОДУМАЙ!

В тетраэдре ABCD, ребра которого равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD.



Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.



В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями SBC и ABC .

В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен 120° , $AD = 8$ см, $DC = 6$ см, прямая PC перпендикулярна плоскости (ABC) , $PC = 9$ см.

Найти величину двугранного угла с ребром AD и площадь параллелограмма.

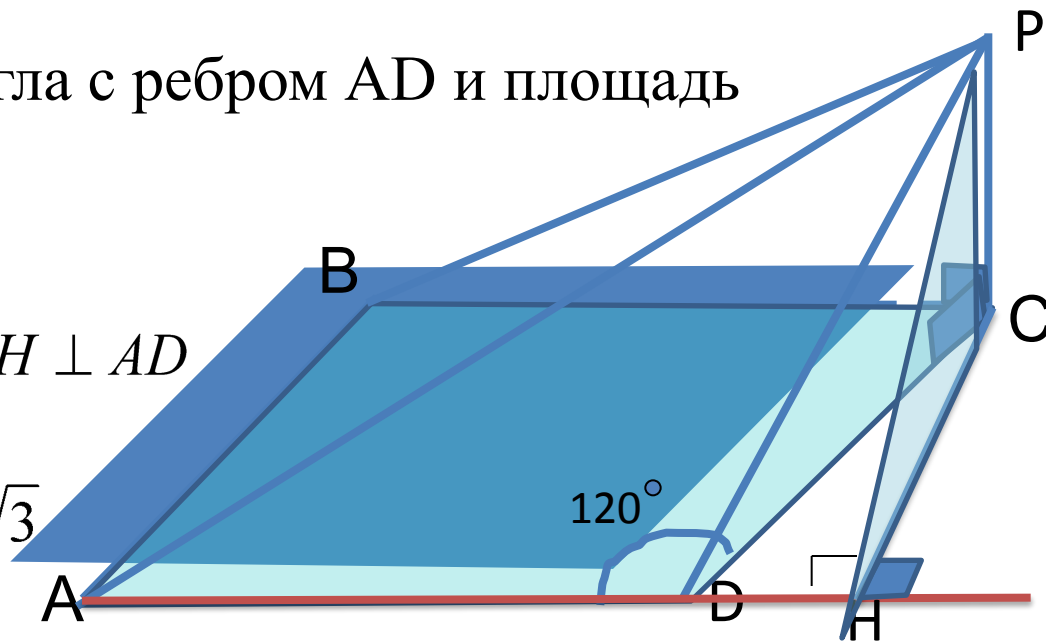
~~Решение~~
Решение

$PC \perp (ABC), CH \perp AD, \Rightarrow$ по ТТП $PH \perp AD$

$$\Delta DCH : CH = 6 \sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Delta PHC : \operatorname{tg} PHC = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \angle PHC = 60^\circ \quad \angle PHC \text{ линейный}$$

$$S_{ABCD} = CH \cdot AD = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$



Домашнее задание:

Параграф 3, п.22, №167, 169,
с.57, вопросы 7-10.