ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

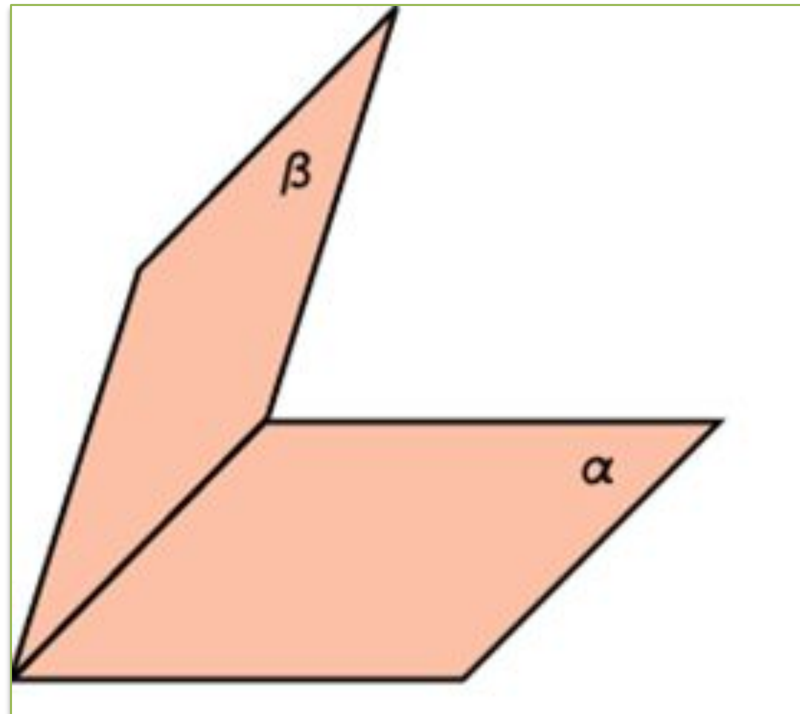
Основные задачи урока:

- Ввести понятие двугранного угла и его линейного угла
- Рассмотреть задачи на применение этих понятий

Определение:

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями.

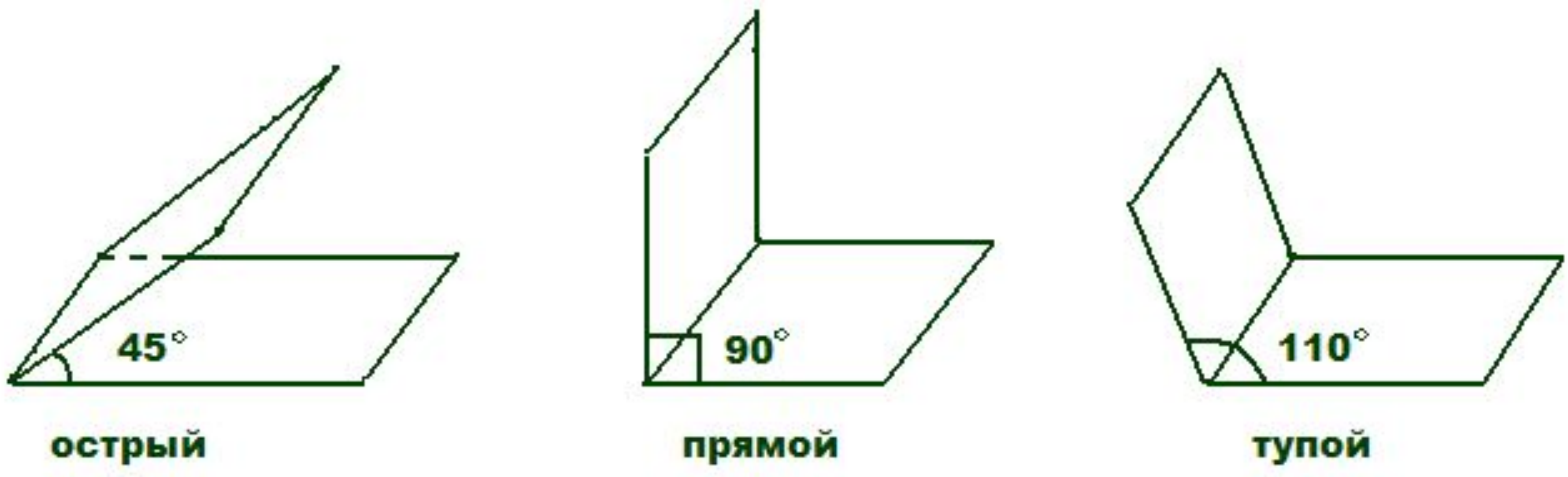


Общая граница этих полуплоскостей – ребром двугранного угла.

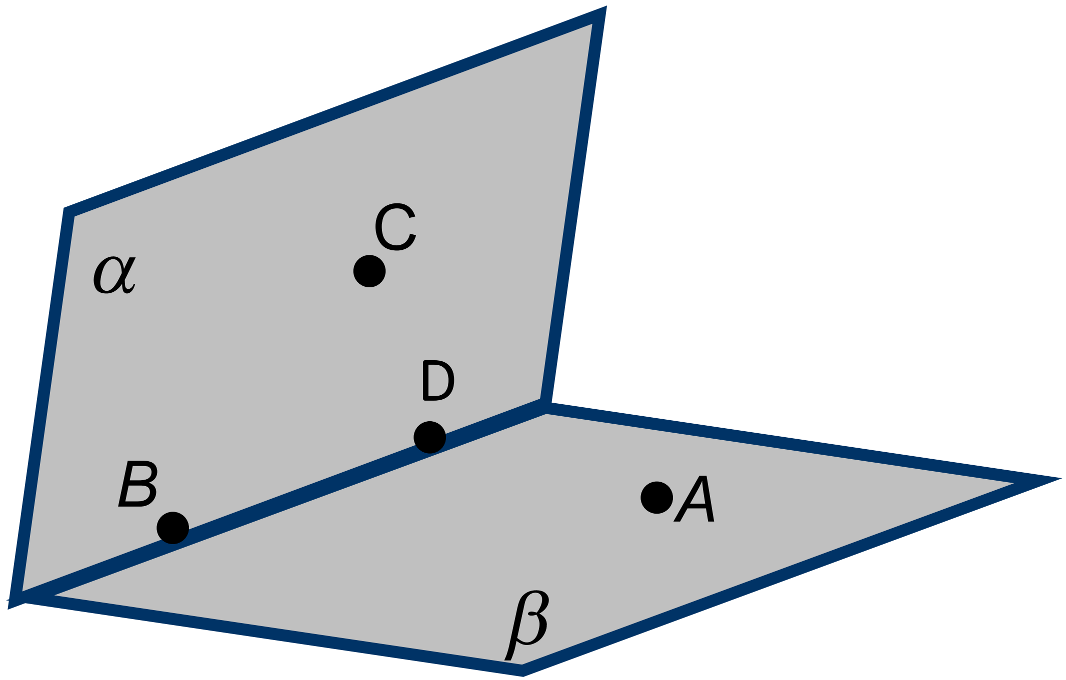
В обыденной жизни, форму двугранного угла имеют

Назовите предметы, имеющие форму двугранного угла

Примеры двугранных углов:



Обозначение двугранного угла.

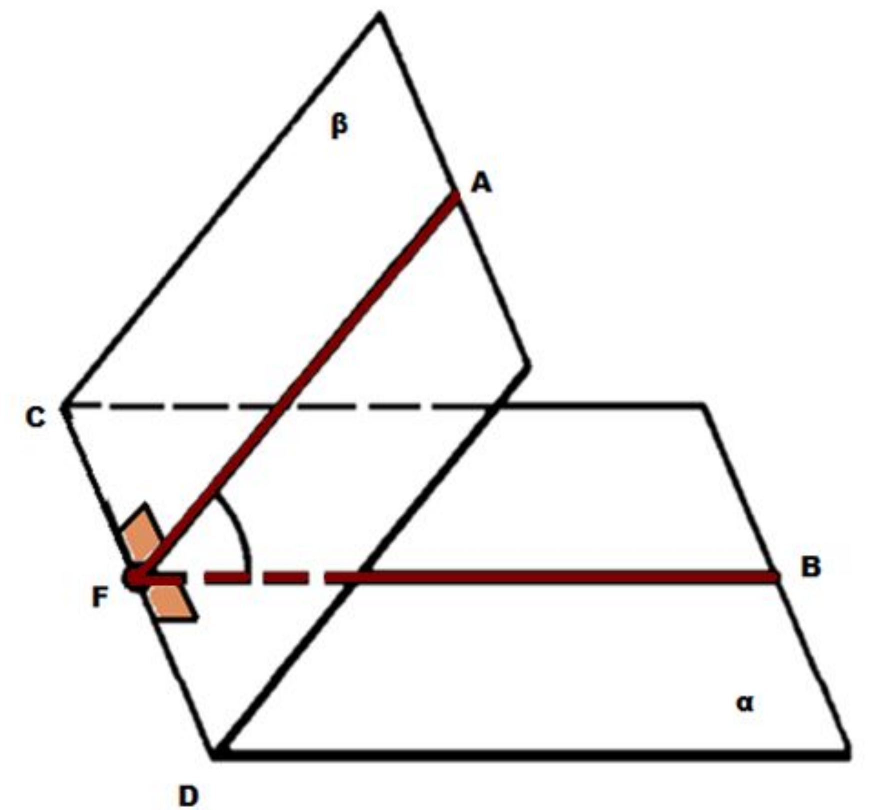


Угол CBDA

⊥

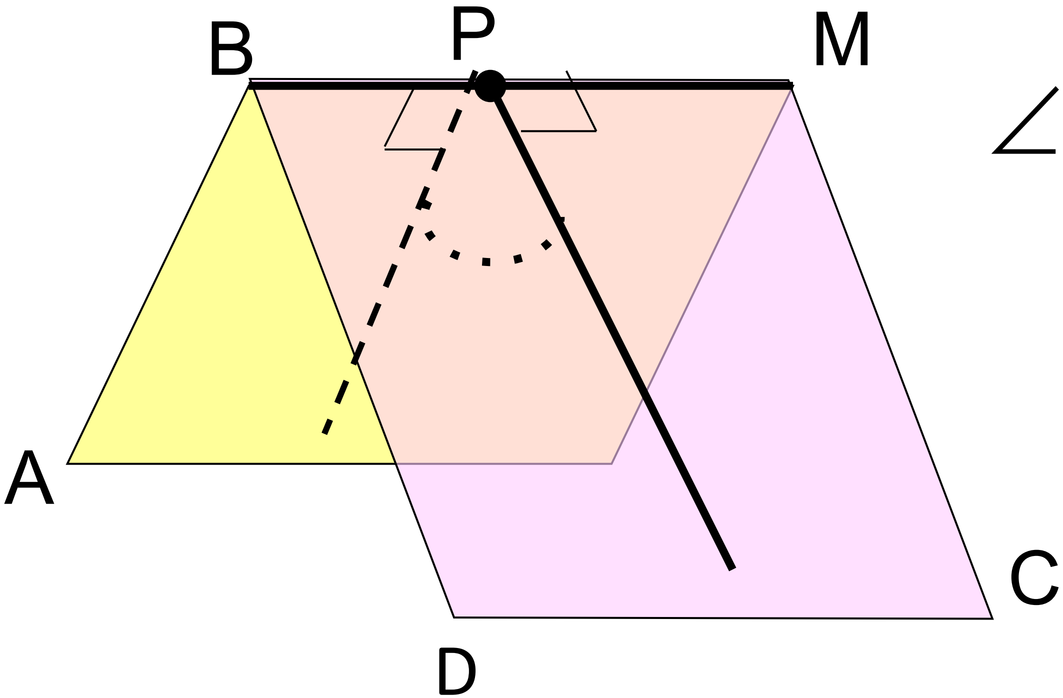
AF ⊥ CD
BF ⊥ CD

AFB-линейный угол двугранного угла **ACDB**



Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Измерение двугранных углов. Линейный угол.

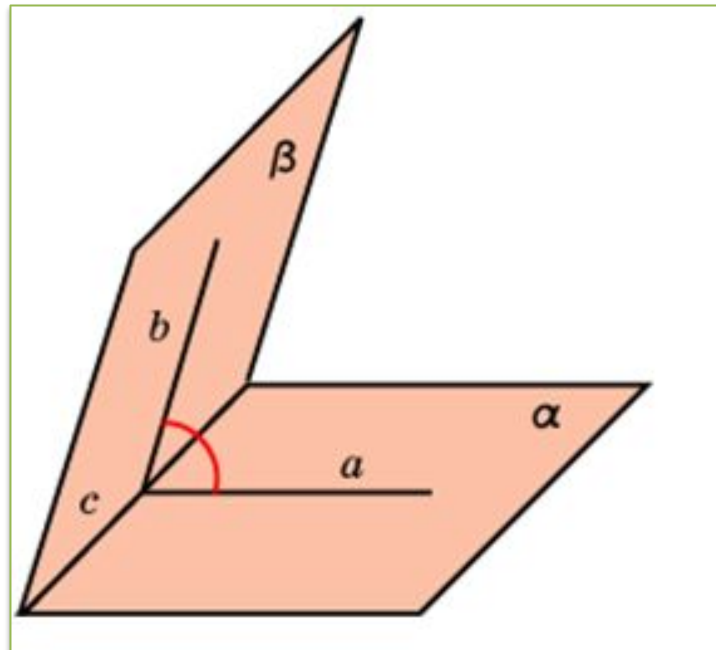


$\angle ABMC = \angle P$

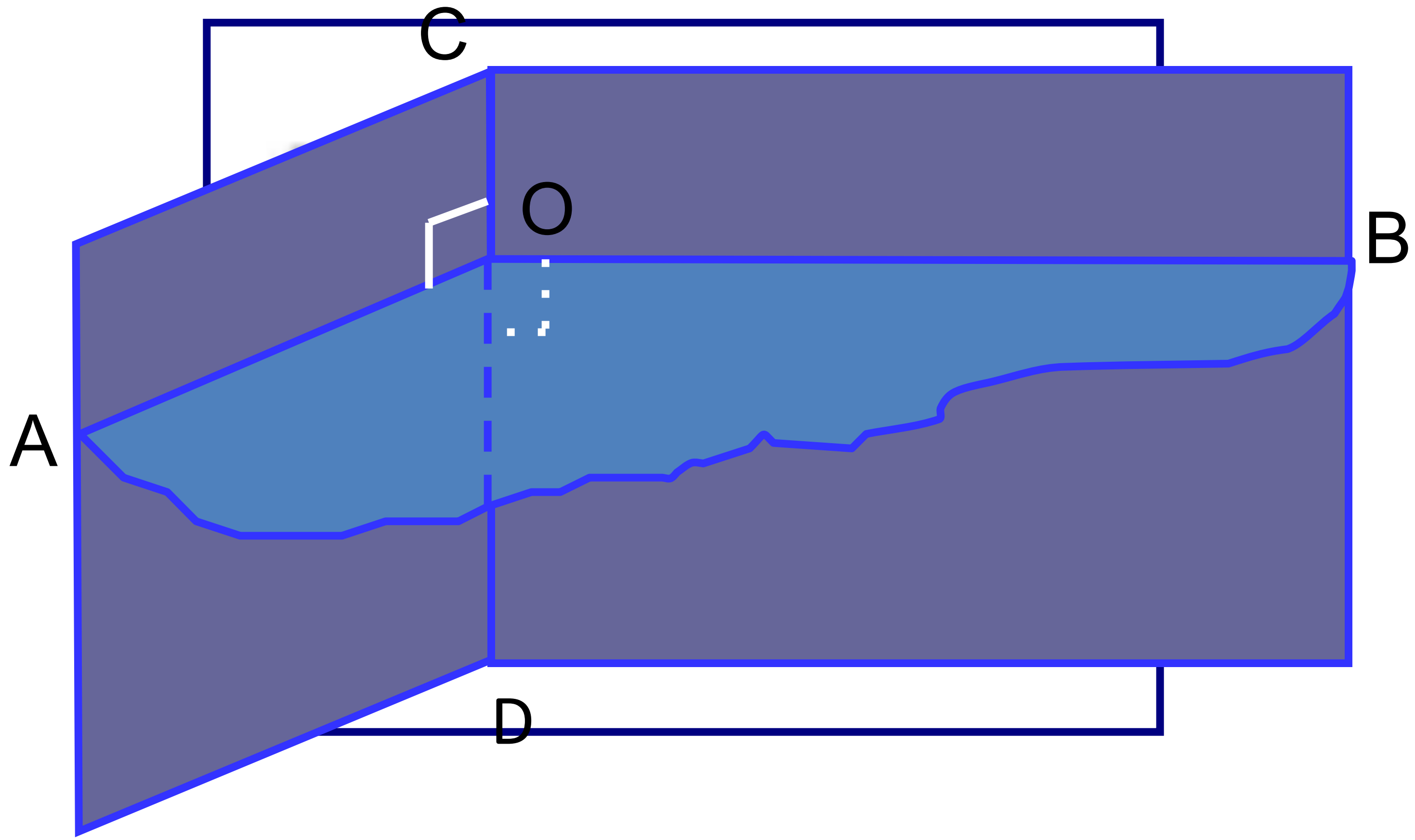
Угол P – линейный угол двугранного угла ABMC

Определение:

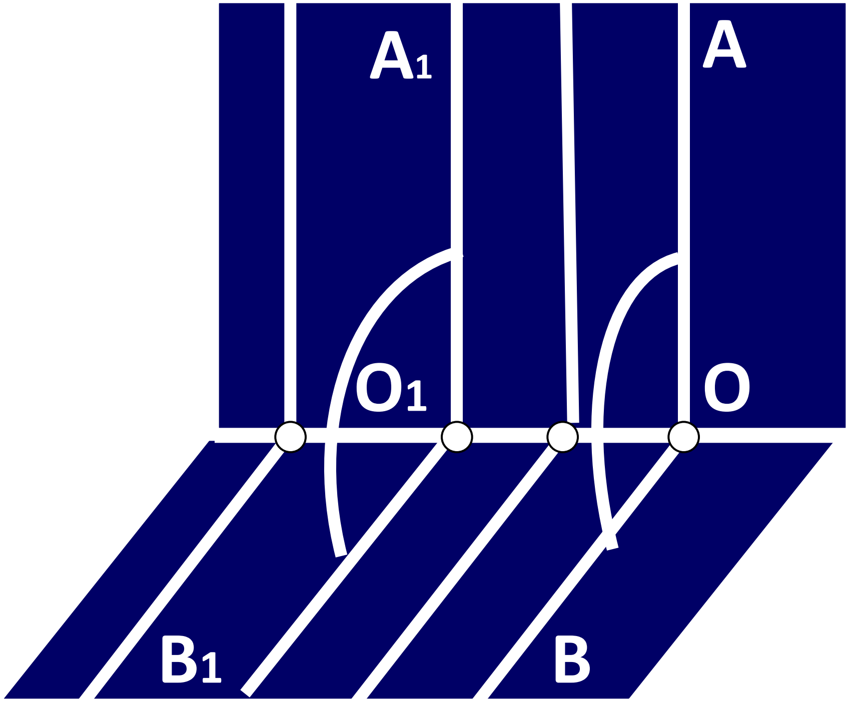
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.



Линейным углом двугранного угла *называется сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру.*



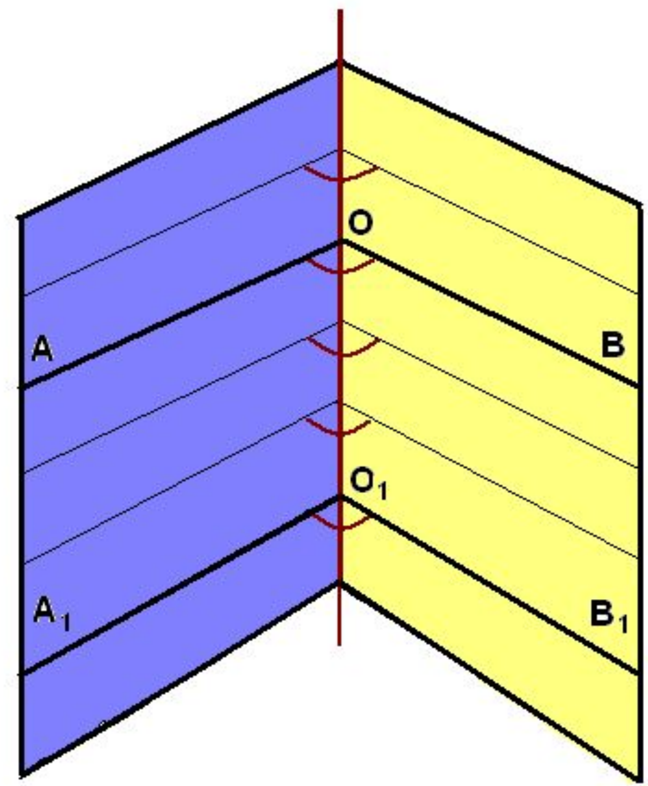
Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.



Докажем, что все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Рассмотрим два линейных угла АОВ и A_1OB_1. Лучи ОА и OA_1 лежат в одной грани и перпендикулярны OO_1, поэтому они сонаправлены. Лучи ОВ и OB_1 также сонаправлены.

Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ (как углы с сонаправленными сторонами).



Способ нахождения (построения) линейного угла.

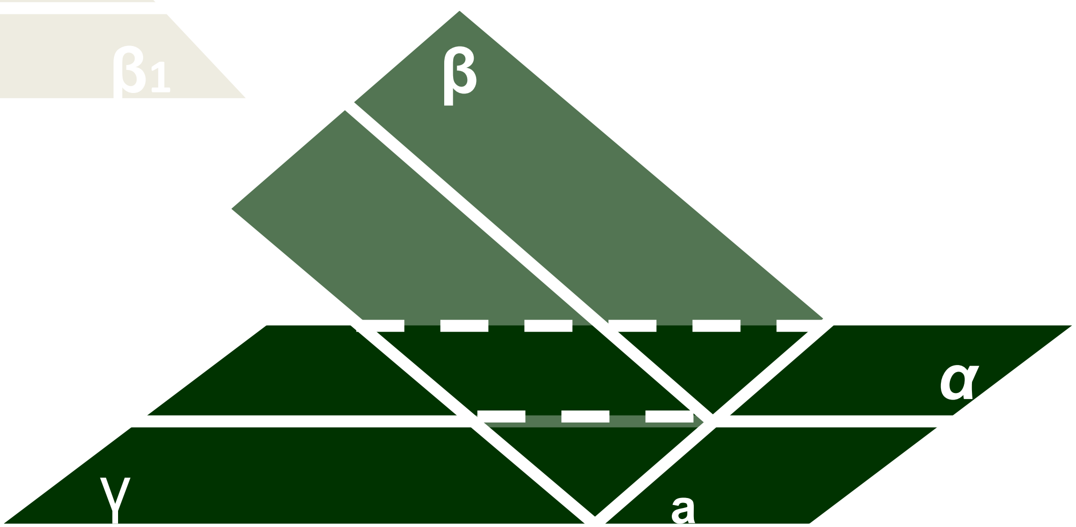
1. Найти (увидеть) ребро и грани двугранного угла

*2. **В гранях** найти направления (прямые) перпендикулярные ребру*

3. (при необходимости) заменить выбранные направления параллельными им лучами с общим началом на ребре двугранного угла

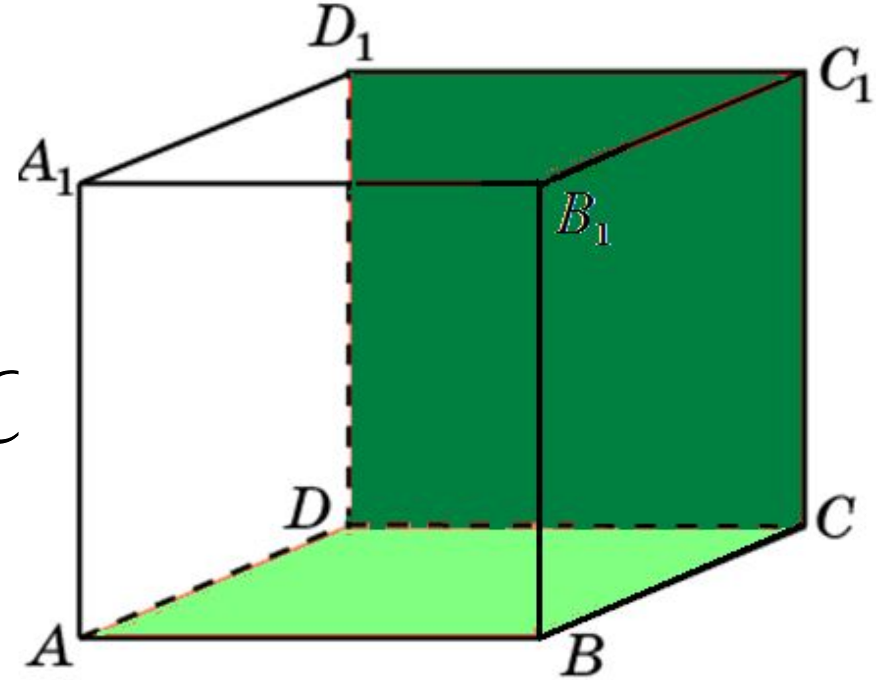
При изображении сохраняется параллельность и отношение длин параллельных отрезков

Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.



Задача 1:

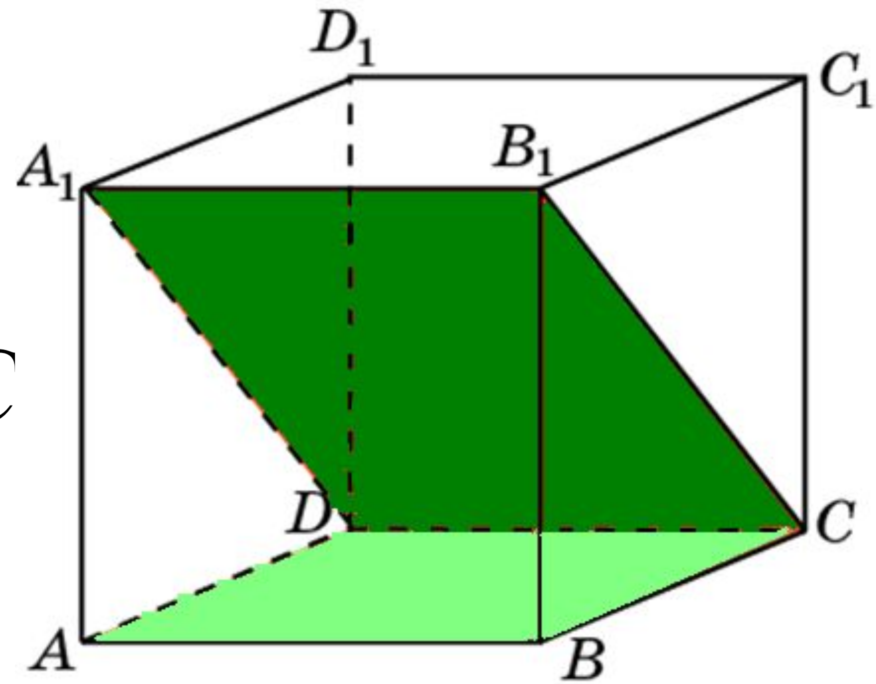
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.



Ответ: 90^o.

Задача 2:

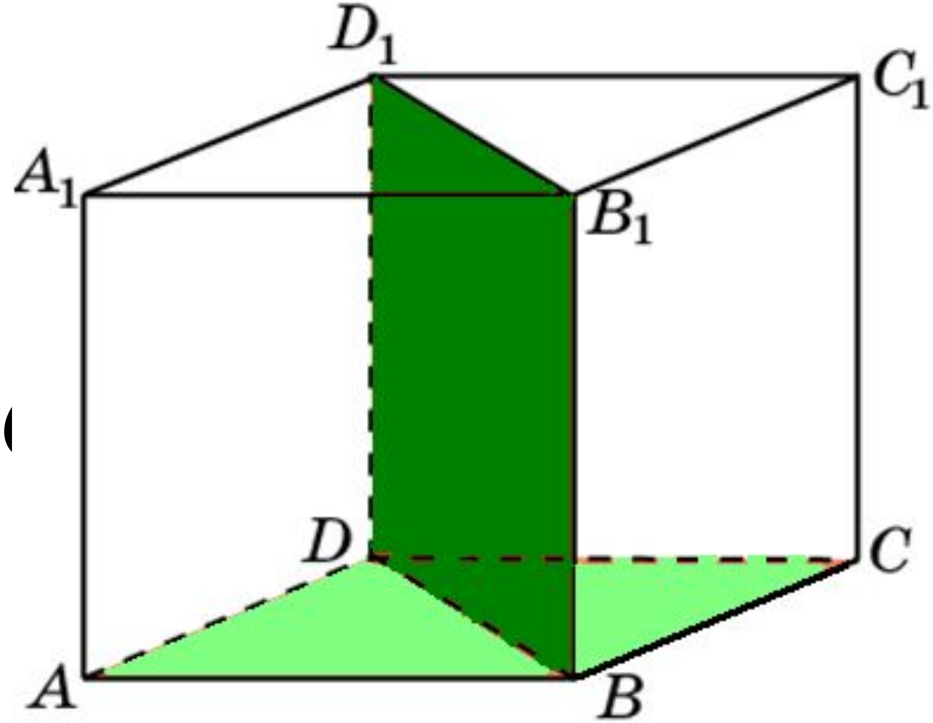
В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.



Ответ: 45º.

Задача 3:

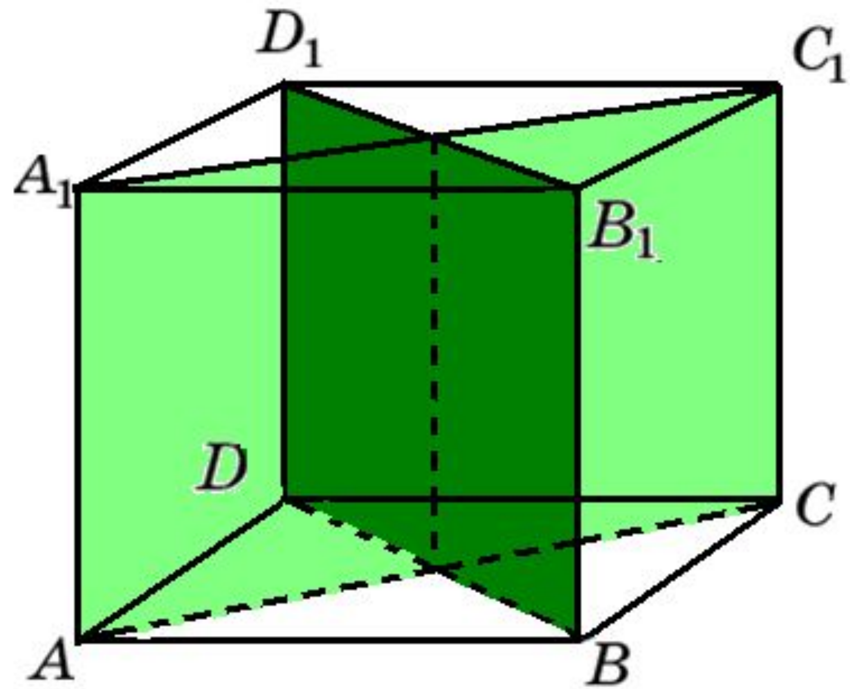
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BDD_1.



Ответ: 90^{o}.

Задача 4:

В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BDD_1.

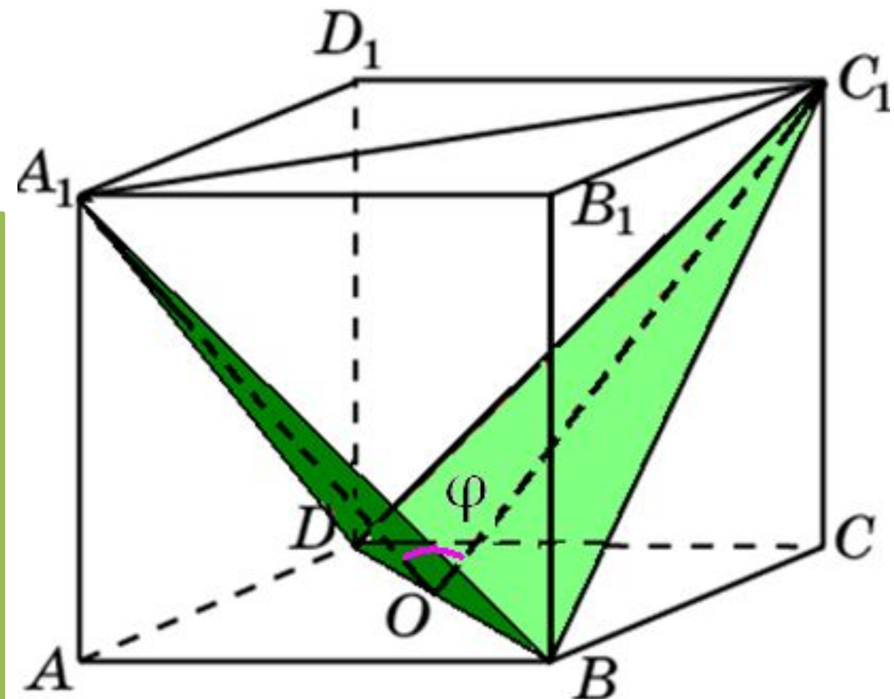


Ответ: 90°.

Задача 5:

В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями

BC_1D и BA_1D.



Решение:

Пусть O – середина BD. A_1OC_1 – линейный угол двугранного угла A_1BDC_1.

$A_1C_1 = \sqrt{2}$, $A_1O = C_1O = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

По теореме косинусов получаем:

$$\cos\varphi = \frac{1}{6}.$$

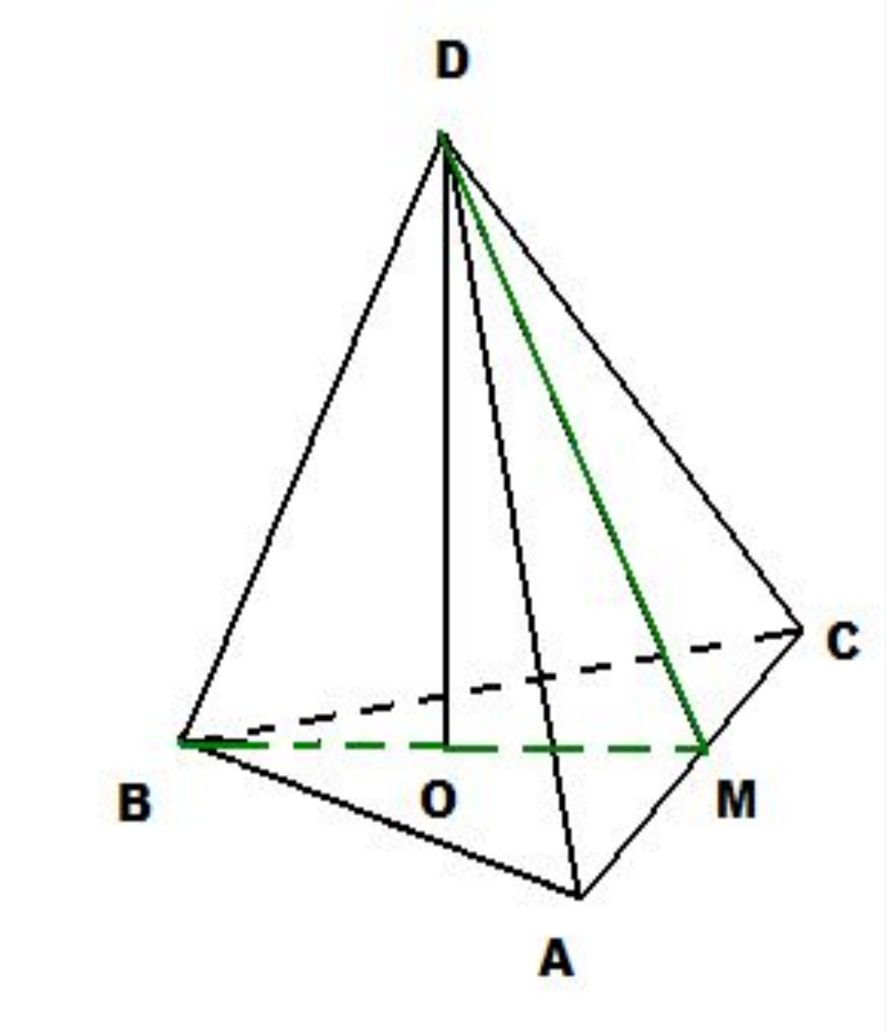
Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{1}{6}$.

Задача 6:

В тетраэдре DABC все ребра равны, точка M – середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла BACD.

Решение:

Треугольники ABC и ADC правильные, поэтому, $BM \perp AC$ и $DM \perp AC$ и, следовательно, $\angle DMB$ является линейным углом двугранного угла DACB.



Задача 7:

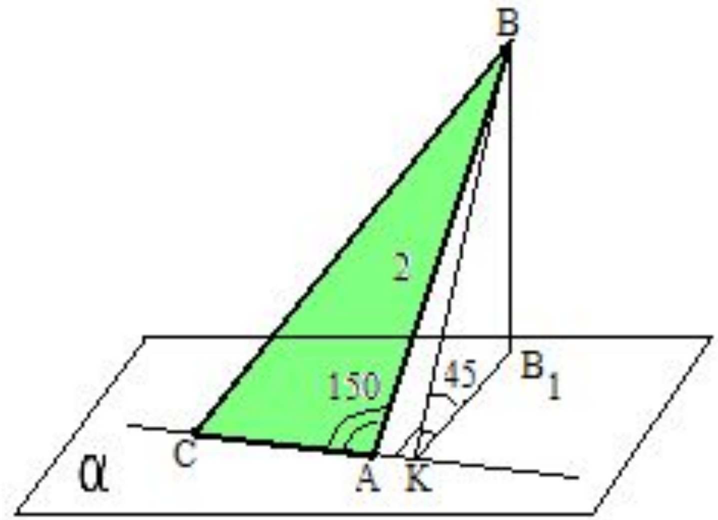
Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояние от точки B до прямой AC и до плоскости α, если AB=2, $\angle BAC = 150^0$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45^0.

Решение:

1) ABC – тупоугольный треугольник с тупым углом A, поэтому основание высоты BK лежит на продолжении стороны AC.

BK – расстояние от точки B до AC.

BB_1 – расстояние от точки B до плоскости α



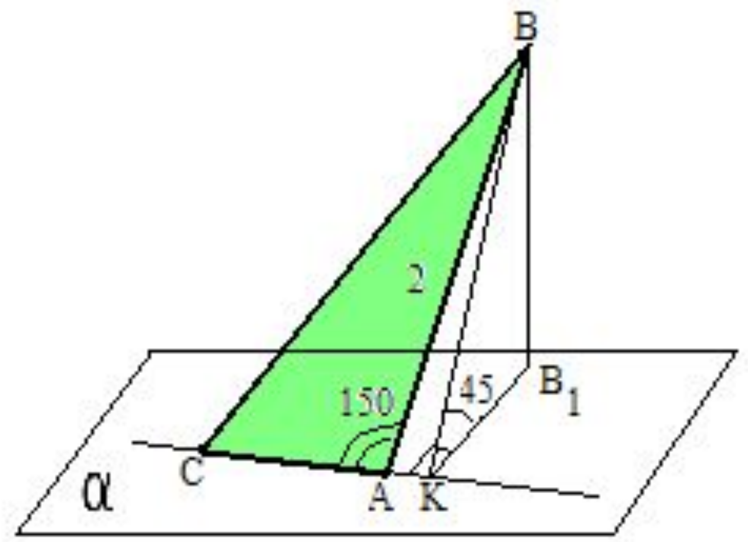
2) Так как $AC \perp BK$, то $AC \perp KB_1$ (по теореме , обратной теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $\angle BKB_1$ – линейный угол двугранного угла $BACB_1$ и $\angle BKB_1 = 45^0$.

3) $\underline{\Delta BAK}$:

$\angle A = 30^0$, $BK = BA \cdot \sin 30^0$, $BK = 1$.

$\underline{\Delta BKB_1}$:

$BB_1 = BK \cdot \sin 45^0$, $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Ответ: $BK = 1$, $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

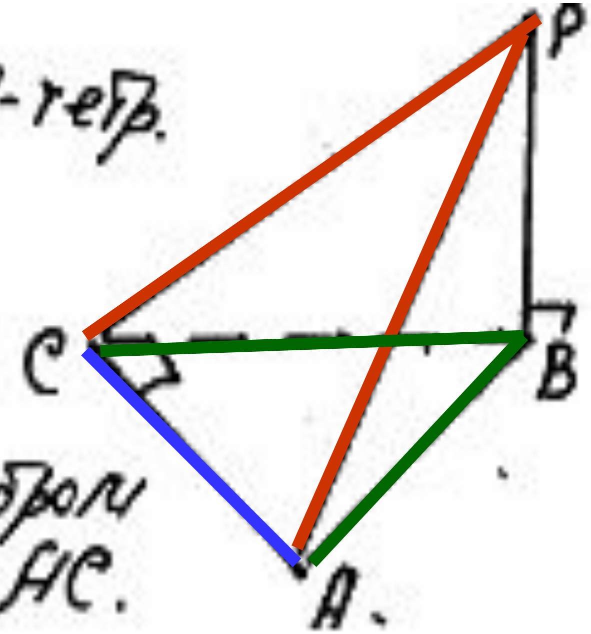
Задача 1

Дано: $PABC$ - тетр.

$\angle ACB = 90^\circ$

$PB \perp ABC$.

Указать: лин. $\angle$ для двугранного с ребром AC.



Решение

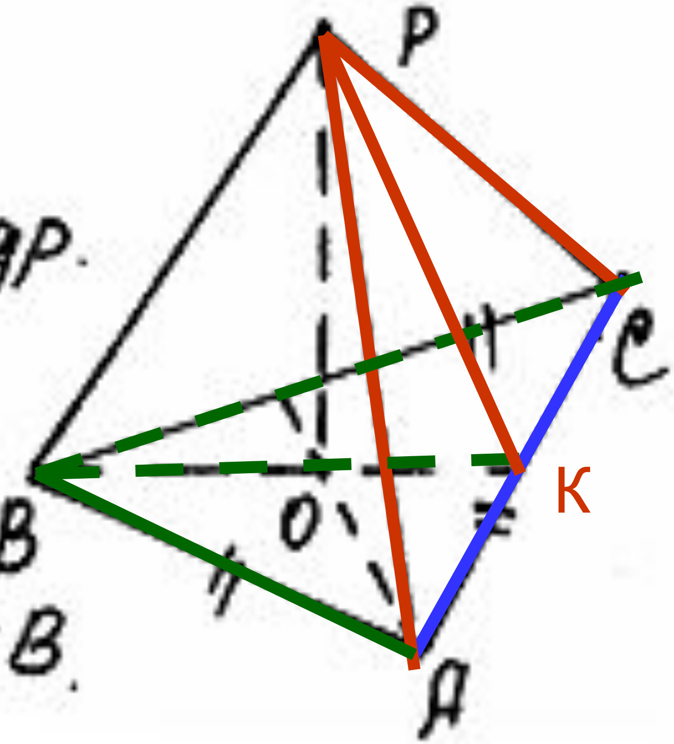
Ребро AC ...., грани ACP .... и ACB

1. В грани ACB прямая CB перпендикулярна ребру CA (по условию)

2. В грани ACP прямая CP перпендикулярна ребру CA (по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, угол PCB - линейный для двугранного угла с ребром AC

Задача 2. Дано PABC-тетраэдр.
△ABC-правильный
O-центр △ABC.
PO ⊥ ABC.
Указать: лин.∠ для ∠PCAB.



Решение

Ребро **AC** ...., грани **ACP** и **ACB**

1 В грани *ACB* *прямая BO перпендикулярна ребру CA*
(по свойству равностороннего треугольника)

2 В грани *ACP* *прямая PK перпендикулярна ребру CA*
(по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, Угол **PKB** *- линейный для двугранного угла с PCAB*

Задача №3

Дано:

KMPT – тетраэдр

$\angle TMK = 90^0$

MK=MT

$PT \perp MKT$

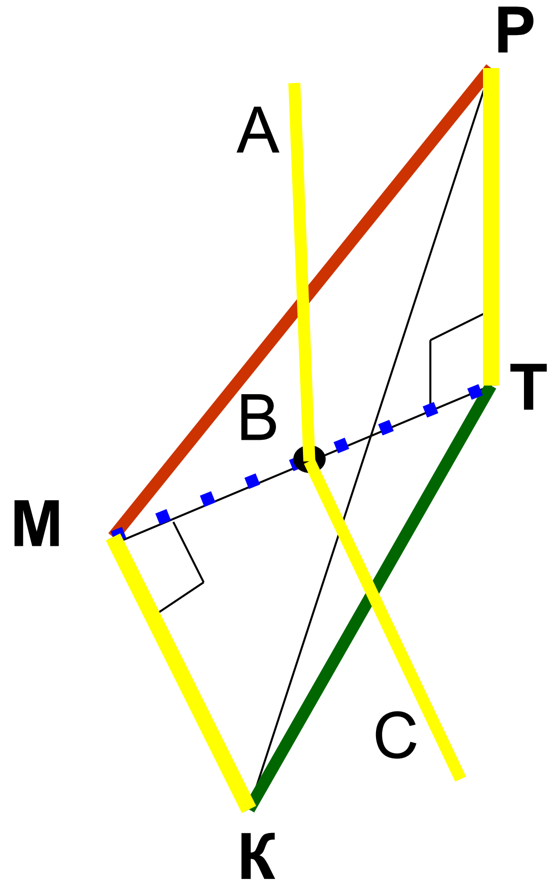
Указать:

линейные углы для двугранных углов

а). PTMK,

б). PMKT,

в). PKTM



А) Двугранный угол **PTMK**:

*(1) ребро **MT**, грани MTP и MTK*

(2) В грани *MTP прямая TP перпендикулярна ребру MT*

(по определению прямой, перпендикулярной плоскости)

В грани *MTK прямая MK перпендикулярна ребру MT*

(по условию)

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK=90^0$

МК=МТ

$PT \perp MKT$

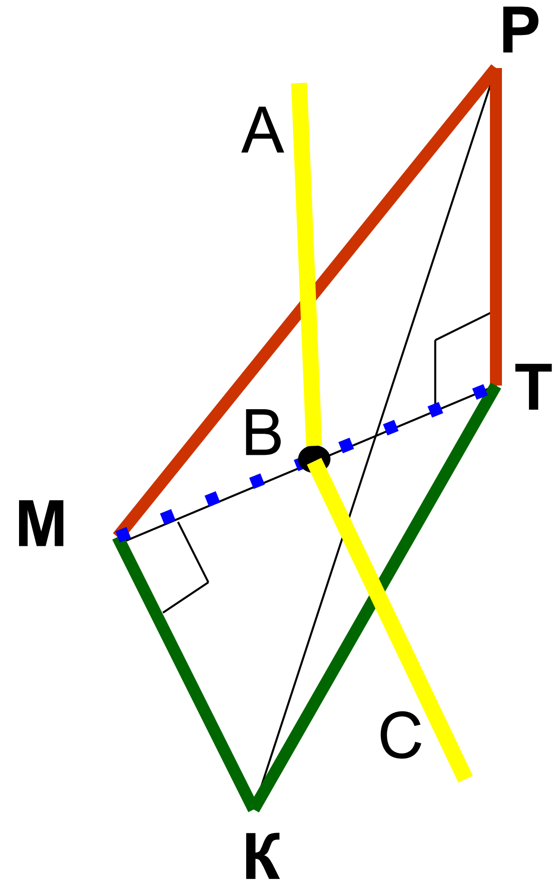
Указать:

линейные углы для двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ



АВ параллельна РТ *(по построению),* а так как РТ перпендикулярна ребру МТ *(по доказанному),* то АВ перпендикулярна ребру МТ *(по лемме о связи параллельности и перпендикулярности) Аналогично ВС перпендикулярна ребру МТ. Значит, угол <u>АВС – искомый</u>*

Задача №3

Дано:

KMPT – тетраэдр

$\angle TMK = 90^0$

MK=MT

$PT \perp MKT$

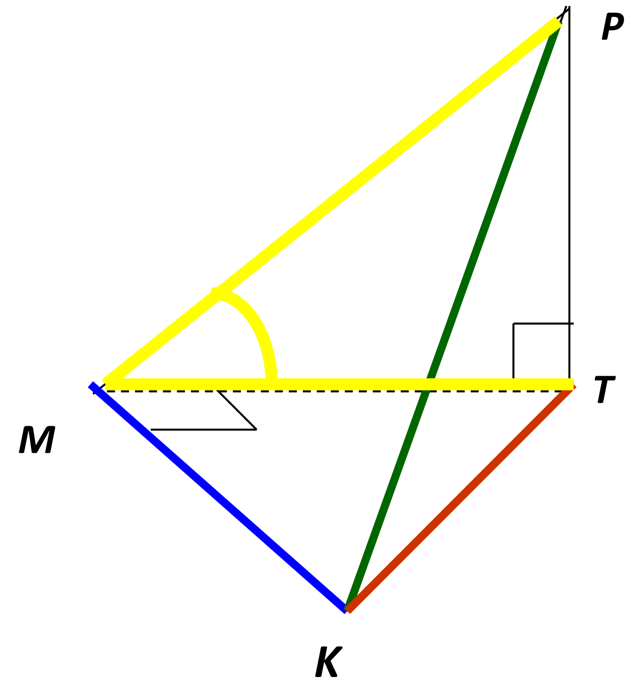
Указать:

линейные углы для двугранных углов

а). PTMK,

б). PMKT,

в). PKTM



б) Двугранный угол ***PMKT****:*

(1) ребро ***MK****, грани MKP и MKT*

(2) В грани MTK прямая MT перпендикулярна ребру MK (по условию)

В грани *MKP прямая MP перпендикулярна ребру MK (по теореме о трех перпендикулярах)*

Ответ. Угол ***PMT*** *- линейный для двугранного угла с PMKT*

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK=90^0$

МК=МТ

$PT \perp MKT$

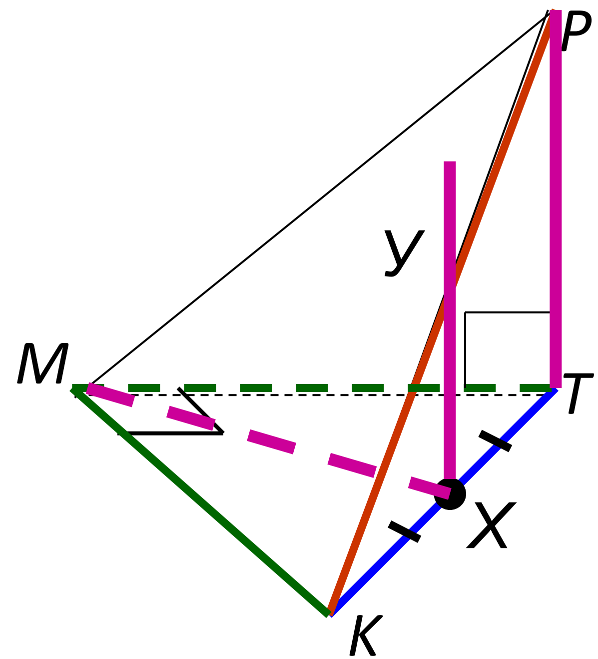
Указать:

линейные углы для двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ



в) Двугранный угол ***РТКМ****:*

(1) ребро ***ТК****, грани ТКМ и ТКР*

(2) В грани *МТК* *прямая* ***МХ****,* **где Х – середина КТ,**
перпендикулярна ребру КТ (по свойству равнобедренного треугольника)

В грани ***КРТ*** *прямая* ***РТ*** *перпендикулярна ребру КТ*
(по определению прямой перпендикулярной плоскости)

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle$ ТМК=90^0

МК=МТ

РТ $\perp$ МКТ

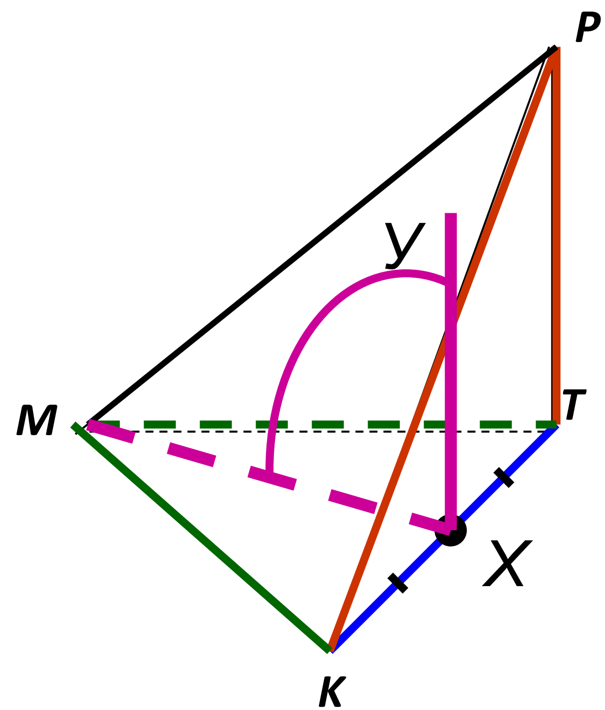
Указать:

линейные углы для двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ

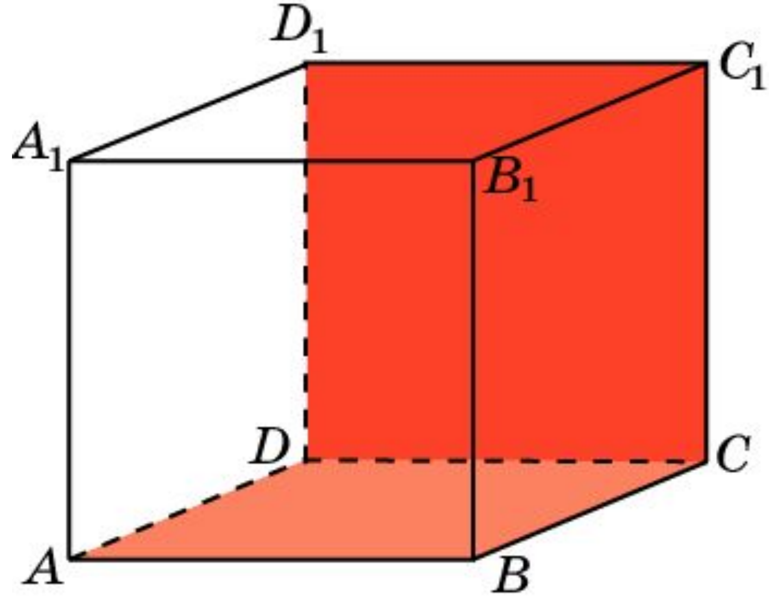


в) Двугранный угол **РТКМ**:

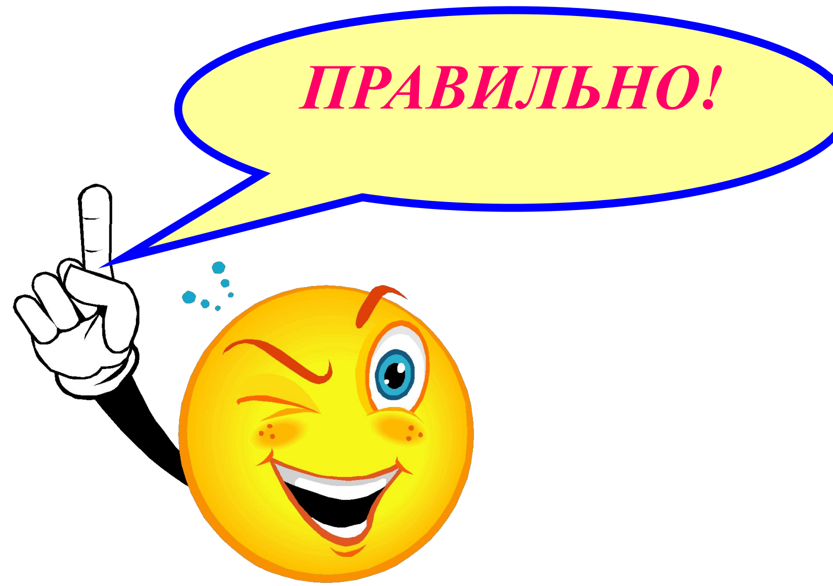
3) Построим прямую **УХ** параллельно прямой РТ , она будет лежать в плоскости РКТ (почему?) получим , что прямая ХУ перпендикулярно ребру КТ

(по лемме о связи параллельности и перпендикулярности)

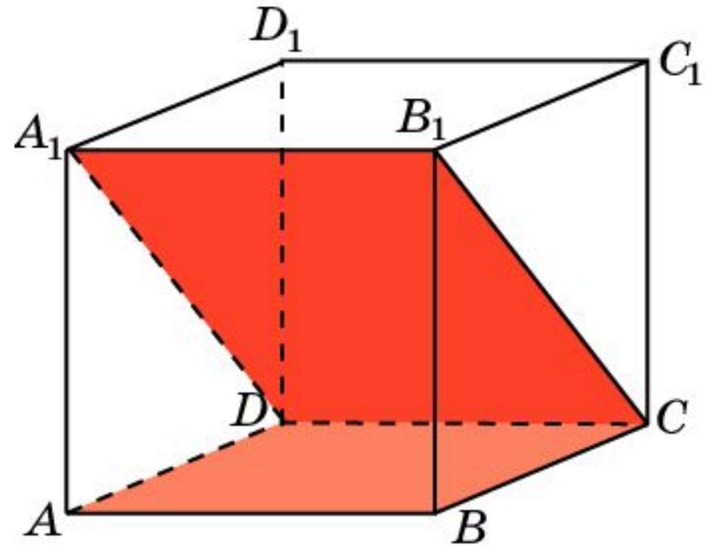
<u>Значит, искомый угол **УХМ**</u>



1. В кубе A…D1 найдите угол между плоскостями ABC и CDD1.

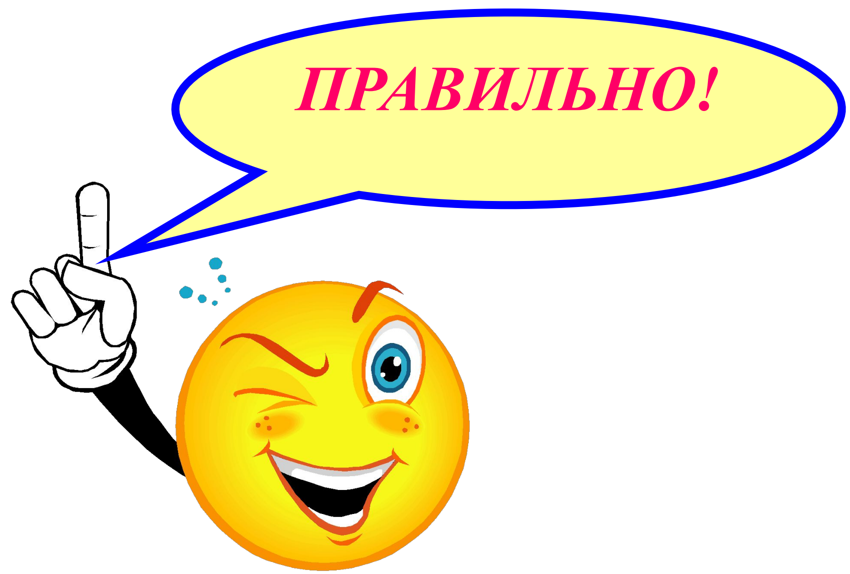


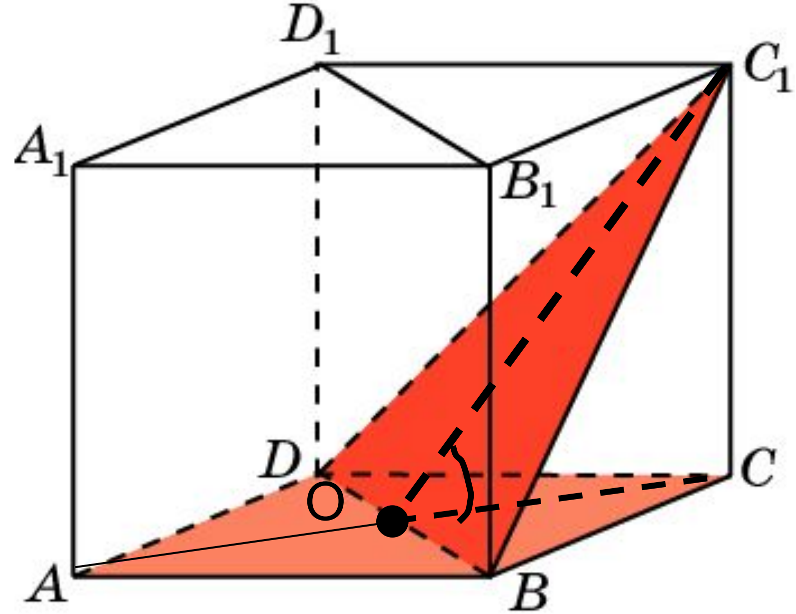
Ответ: 90°



2.В кубе *A*…*D*1 найдите угол между плоскостями *ABC* и *CDA*1.

Ответ: 45°

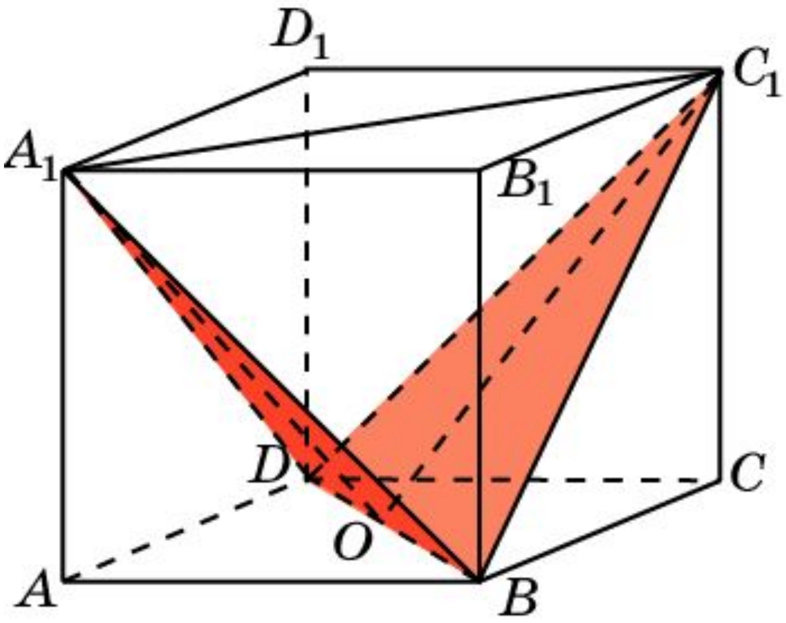




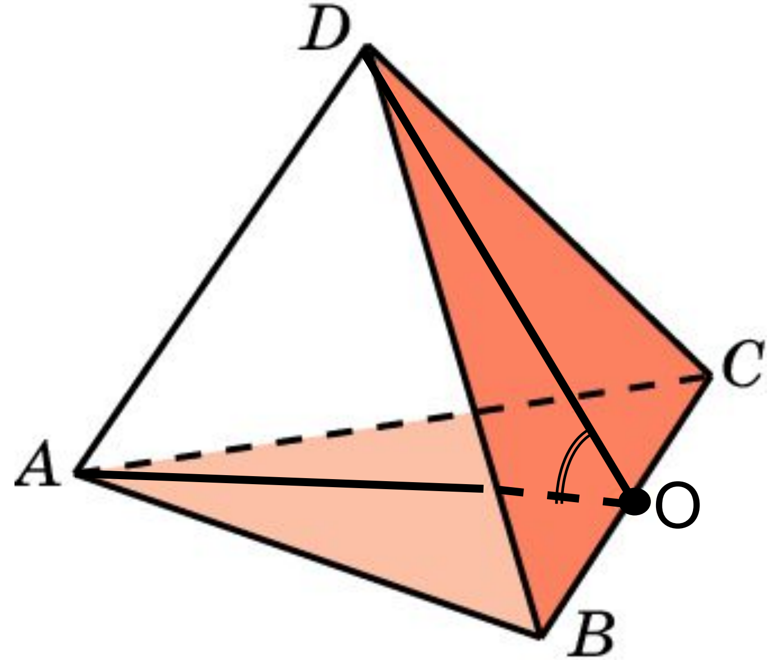
3.В кубе А…D1 найдите угол между плоскостями ABC и BC1D.

Ответ: $tg\,\varphi = \sqrt{2}.$

4. В кубе A…D1 найдите угол между плоскостями BC1D и BA1D.

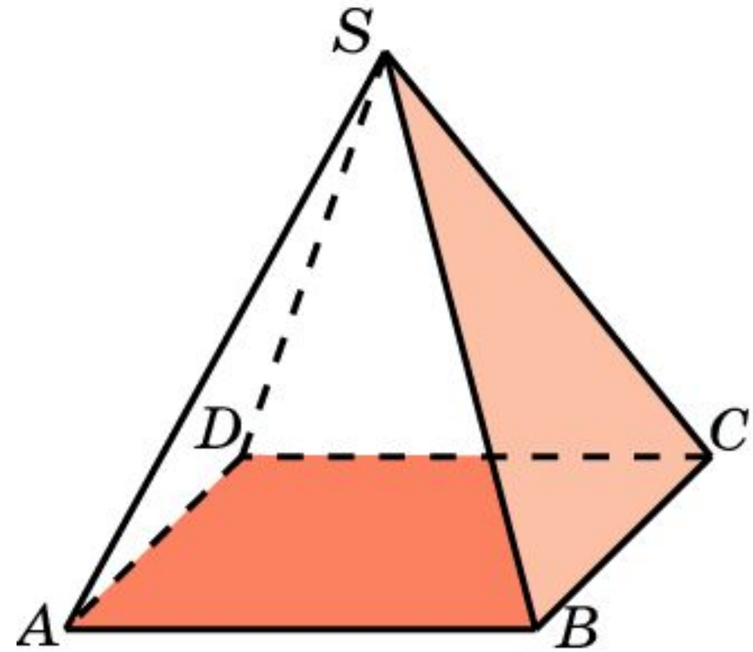


Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}.$



В тетраэдре ABCD, ребра которого равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}.$



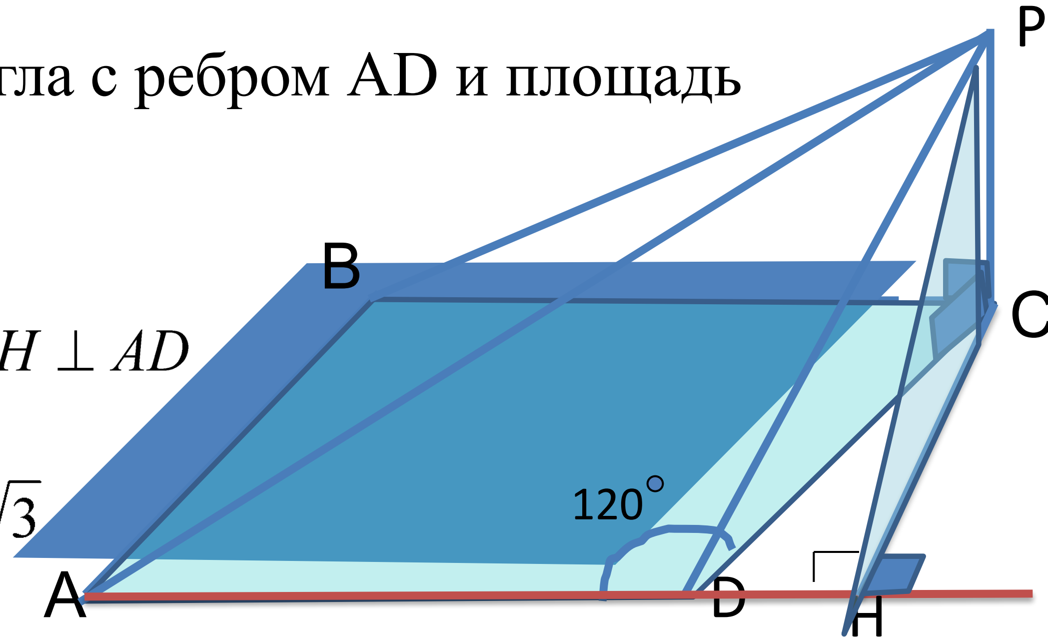
В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями *SBC* и *ABC*.

В параллелограмме ABCD угол ADC равен 120^0, AD = 8 см, DC= 6 см , прямая PC перпендикулярна плоскости (ABC), PC= 9 см.

Найти величину двугранного угла с ребром AD и площадь параллелограмма.

Решение:

$\angle ADC = 120^0$



$PC \perp (ABC), CH \perp AD, \Rightarrow по ТТП\ PH \perp AD$

$\Delta DCH: \quad CH = 6\sin 60^0 = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\Delta PHC: \quad tgPHC = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \angle PHC = 60^0$

$\angle PHC$ *линейный*

$S_{ABCD} = CH \cdot AD = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

Домашнее задание:

Параграф 3, п.22, №167, 169, с.57, вопросы 7-10.