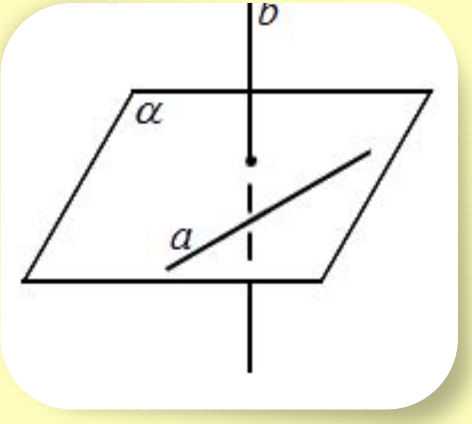
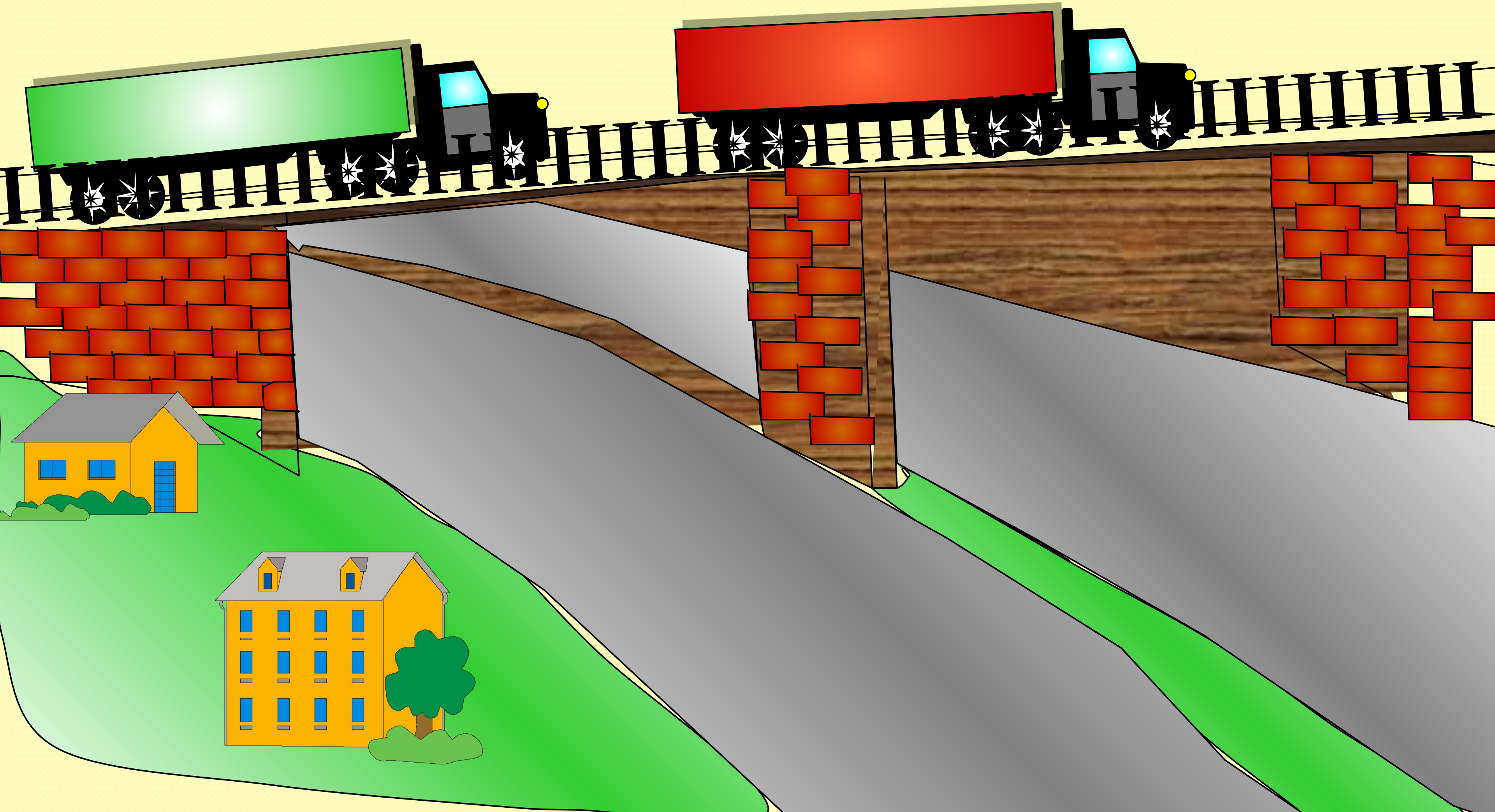
Научно-практическая конференция школьников по математике, физике и химии
“ Киселёвские чтения “

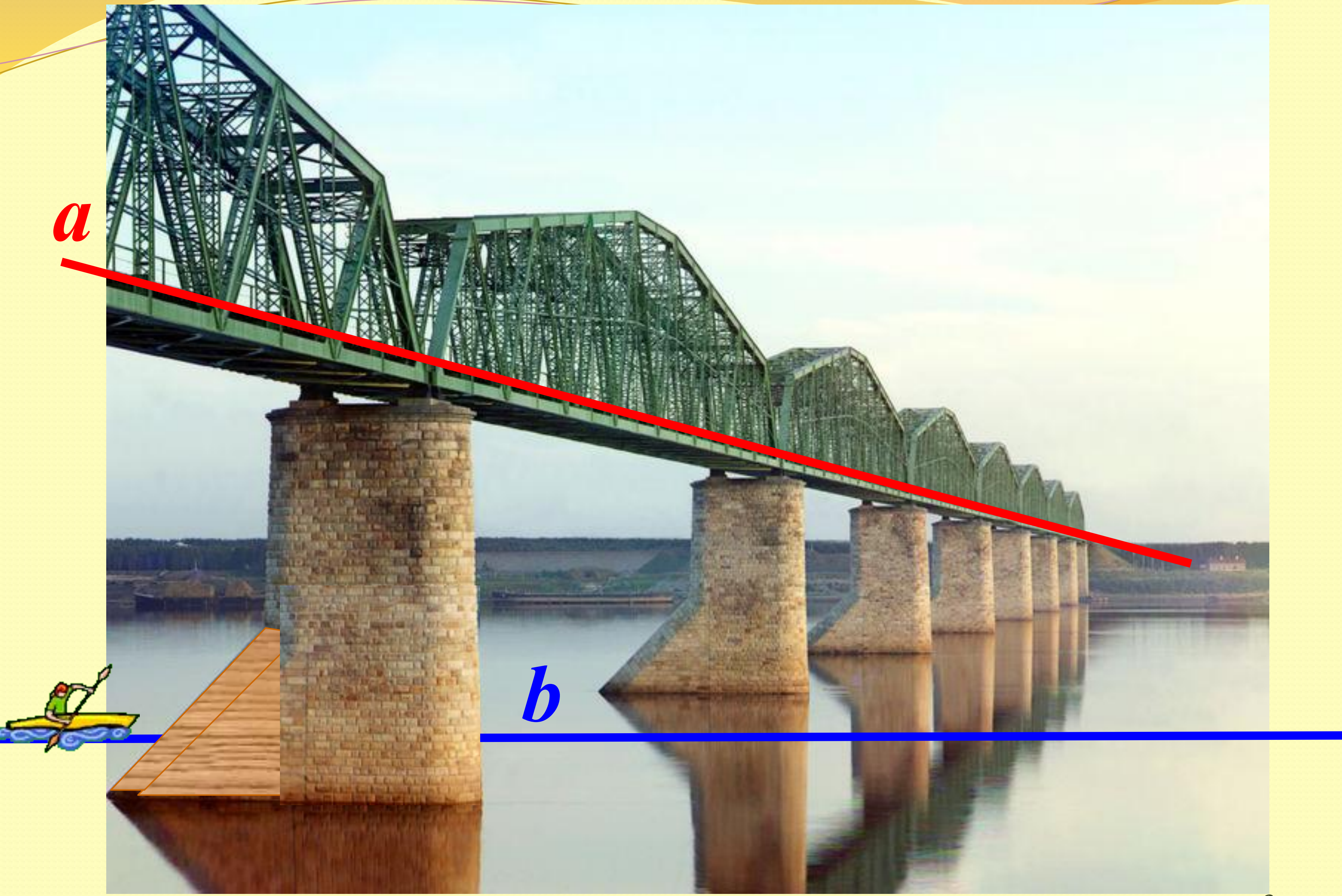
Об углах между скрещивающимися прямыми



Выполнила:
ученица 10 класса МКОУ СОШ№2
им. Н.Д. Рязанцева г. Семилуки
Буданова Алла
Руководитель: учитель математики
Байдикова Инна Ивановна

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая под эстакадой.



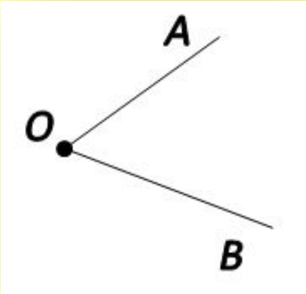

a
b

Цель и задачи работы

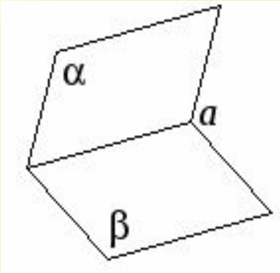
Рассмотрение различных способов определения угла между скрещивающимися прямыми

1. Изучение теории по данной теме.
2. Ознакомление с методами решения.
3. Применение методов в практике.

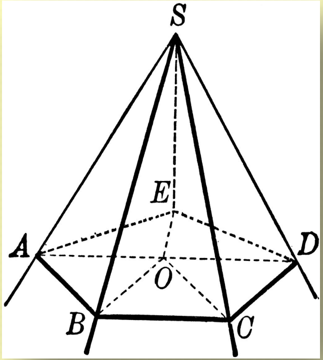
Плоский угол - это геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки (которая называется вершиной угла).



Угол в пространстве (двугранный) – это пара полуплоскостей с общей прямой, которая является границей каждой из полуплоскостей: общая прямая называется ребром двугранного угла.



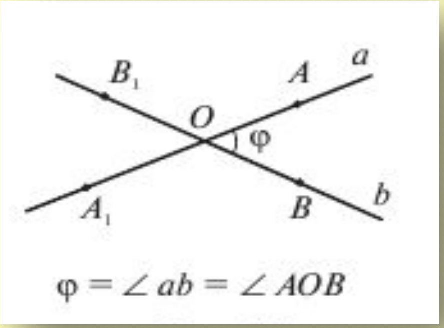
Многогранный угол - это поверхность, определенная совокупность плоских углов

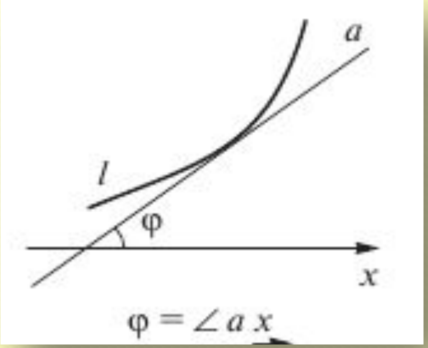


Угол – мера множества лучей, выходящих из одной точки, мера всевозможных направлений.

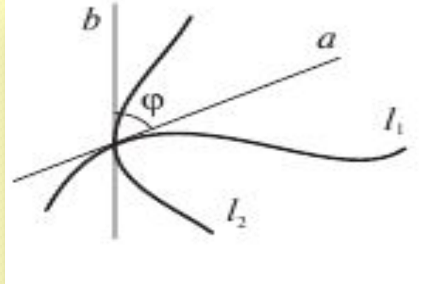
Как величина угол определяется в разных ситуациях и, соответственно, по-разному фиксируются его границы

1. Угол *между двумя лучами с общим началом* лежит в границах от 0 до π.
2. Угол *между двумя прямыми* лежит в границах от о до π/2 .
3. Угол *между двумя отрезками* (например, диагонали четырехугольника), лежит в границах от о до π/2.
4. Угол *между двумя нулевыми векторами* лежит в границах от о до π.
5. Угол *между двумя осями* лежит в границах от о до π.
6. Угол *между прямой и осью* лежит в границах от о до π.
7. Угол *между нулевым вектором и осью* лежит в границах от о до π.
8. *Двугранных угол* лежит в границах от о до π.

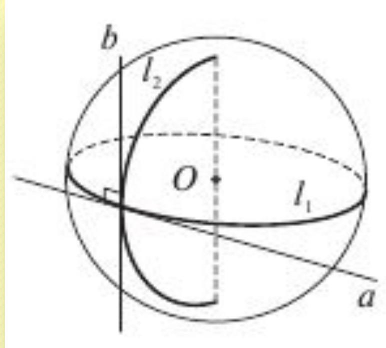




9. *Угол между прямой и плоскостью* лежит в границах от о до π/2
10. *Угол между двумя плоскостями* лежит в границах от о до π/2.
11. *Угол между пересекающимися прямой и кривой*, расположенными в одной плоскости, лежит в границах от о до π/2.
12. *Угол между двумя пересекающимися кривыми* лежит в границах от о до π/2.
13. *Угол между двумя лучами, не имеющими общего начала* , лежит в границах от о до π.
14. *Угол между двумя скрещивающимися прямыми* лежит в границах от о до π/2.
15. *Угол между двумя отрезками, лежащими на скрещивающихся прямых* , лежит в границах от о до π/2 .
16. *Угол поворота* лежит в границах от о до π.



$\varphi = \angle a\,b = \angle l_1\,l_2$,
a — касательная к кривой l_1,
b — касательная к кривой l_2



$\angle l_1\,l_2 = \angle a\,b = \frac{\pi}{2}$

Угол в теории

1. Теорема о смежных углах.
2. Теорема о вертикальных углах .
3. Теорема о сумме углов треугольника.
4. Теорема о сумме углов многоугольника.
5. Теорема об углах с соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонами.
6. Теоремы об углах, полученных при пересечении параллельных прямых секущей.
7. Признаки равенства треугольников.
8. Признаки подобия треугольников.
9. Теорема косинуса.
10. Теорема синусов.
11. Теоремы об углах, связанных с окружностью.
12. Теорема косинусов для трехгранного угла.
13. Теорема синусов для трехгранного угла.

Применение в практике

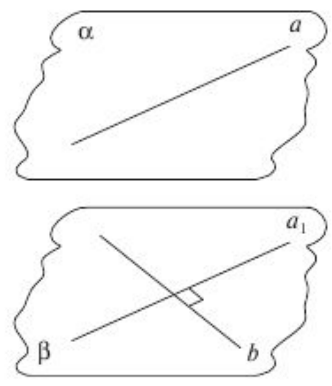
- **Задачи на установление перпендикулярности скрещивающихся прямых.**

- **Задачи на вычисление угла между скрещивающимися прямыми.**

Задачи на установление перпендикулярности скрещивающихся прямых

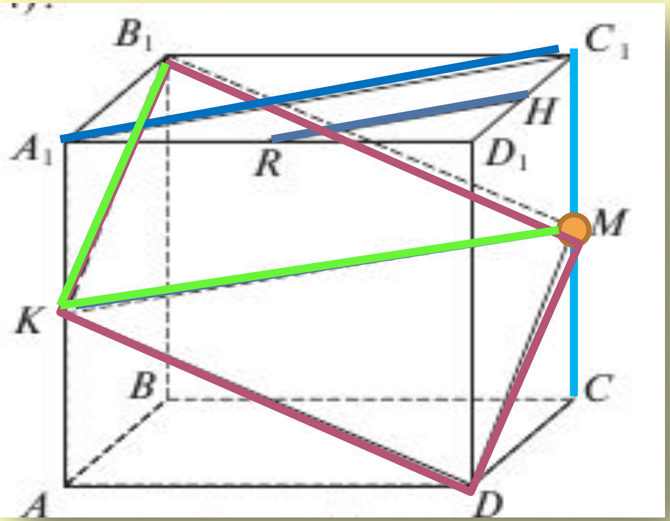
1. *Способ параллельного переноса*
2. *Способ с помощью определения угла между скрещивающимися прямыми*
3. Способ опирающийся на *перпендикулярность двух плоскостей*
4. Способ опирающийся на *параллельность прямой и плоскости*
5. Способ – использование *теоремы о трех перпендикулярах*
6. Способ – *проектирование двух точек одной прямой на другую прямую*
7. Способ – *векторный*

Способ опирается на *параллельность прямой и плоскости*



Если $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, a_1 — проекция a на β, $b \perp a_1$, то $a \perp b$

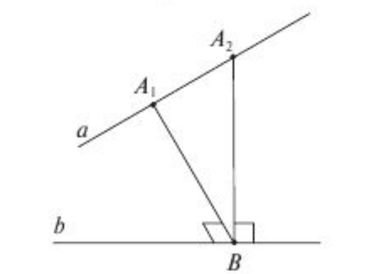
Задача. Перпендикулярны ли прямые KB_1 и RH_1?



Решение. Построим плоскость KB_1M , где точка M середина CC_1 . Сечение KB_1MD – является ромбом. RH параллельна прямой A_1C_1 , а A_1C_1 параллельна прямой KM, следовательно прямые RH и KM параллельны. Значит, KM – параллельная проекция RH на плоскость KB_1M. А так как прямые KM и KB_1 не перпендикулярны, то не будут перпендикулярны и прямые RH и KB_1.

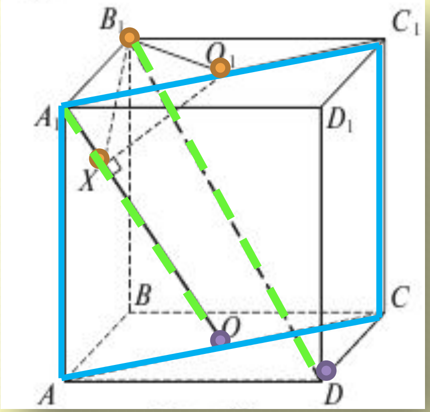
Способ – *проектирование двух точек одной прямой на другую прямую*

Задача. Перпендикулярны ли прямые B_1D и A_1O?



Если точка B — проекция A_1 и A_2 на прямую b, то $a \perp b$

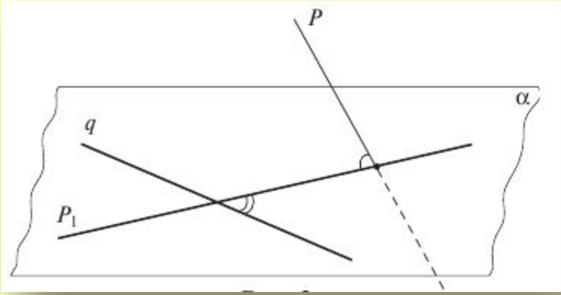
Решение. Спроектируем две точки прямой B_1D на прямую A_1O. Для простоты возьмем точки B_1 и D. Проекцией D будет точка O . Проекцию точки B_1 найдем в два приема. Сначала спроектируем точку B_1 на плоскость AA_1C_1 (в ней лежит прямая A_1O); проекцией будет точка O1. Затем O_1, спроектируем в плоскости AA_1C_1 на прямую A_1O. Проекцией будет какая-то точка X, лежавшая внутри отрезка A_1O. Согласно теореме о трех перпендикулярах (в слегка измененной формулировке) точка X и будет проекцией точки B_1 на прямую A_1O. Мы видим, что проекции точек B_1 и D на прямую A_1O не совпадают, следовательно, прямые B_1D и A_1O не перпендикулярны.



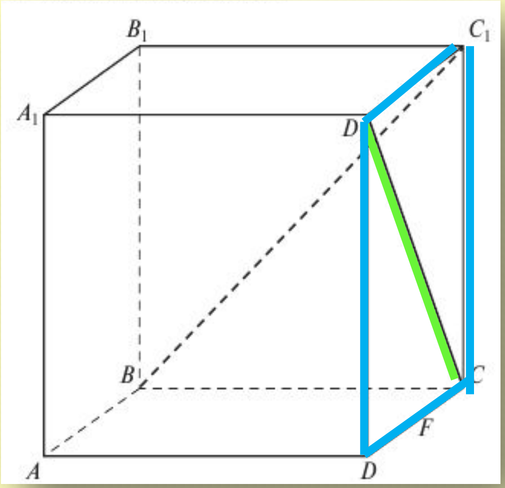
Задачи на вычисление угла между скрещивающимися прямыми

1. Способ с помощью *параллельного переноса*
2. Способ – «*в три косинуса*»
3. Способ – *проектирование обеих скрещивающихся прямых* на плоскость
4. Способ – *проектирование отрезка одной из скрещивающихся прямых на другую*
5. Способ– векторный
6. Способ– « с помощью замкнутой ломаной»
7. Способ – «с помощью тетраэдра»
8. Способ– координатный

Способ – «*в три косинуса*»



$\cos\angle pq = \cos\angle pp_1 \cdot \cos\angle p_1q$



Задача. Перпендикулярны ли прямые CD_1 и BC_1 ?

Решение. Чтобы найти угол между прямыми CD_1 и BC_1, спроектируем CD_1 на плоскость грани BCC_1B_1. Проекцией будет прямая CC_1. Дальше только вычисления по формуле:

$\cos\angle(CD_1, BC_1) = \cos\angle(CD_1, CC_1) \cdot \cos\angle(CC_1, BC_1)$.

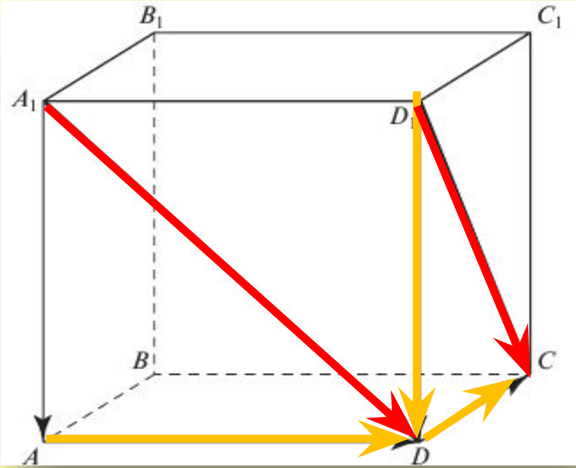
$\cos\angle(CD_1, BC_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2} =$ Искомый угол равен 60°, прямые CD_1 и BC_1 не перпендикулярны.

Способ – векторный

$$\cos\angle \vec{a}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

Задача. Перпендикулярны ли прямые DA_1 и CD_1?

Бескоординатный вариант



Представим вектор $\overrightarrow{A_1D}$ как сумму векторов $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{AD}$ а вектор $\overrightarrow{D_1C}$ как сумму векторов $\overrightarrow{D_1D}$ и $\overrightarrow{DC}$ Затем, считая куб единичным, найдем скалярное произведение векторов A1D и D1C

$$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD}\ , \quad \overrightarrow{D_1C} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC}$$

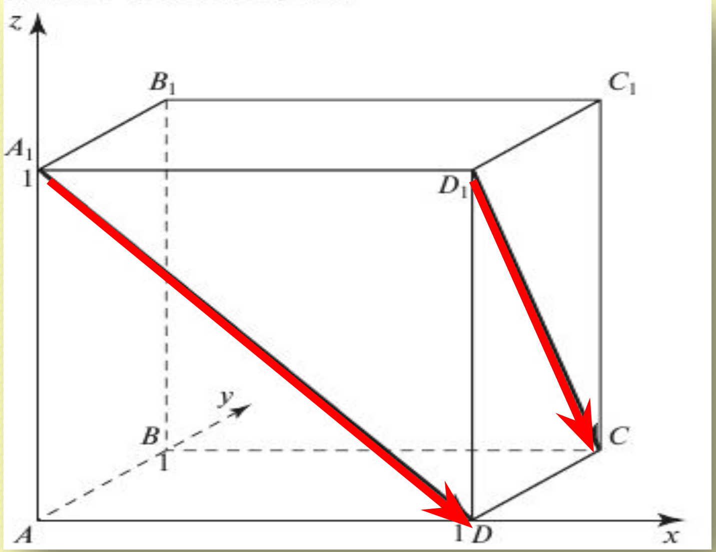
$$\overrightarrow{A_1D} * \overrightarrow{D_1C} = (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC}) = 1$$

И наконец, разделим полученный результат на произведение длин этих векторов (а длина каждого равна $\sqrt{2}$). В итоге получим косинус угла между векторами A_1D и D_1C , равный , и сам угол — 60°.

Способ – векторный

Пусть начало координат находится в точке A, а оси x, y, z направлены по лучам AD,AB, AA_1 соответственно. Найдем координаты векторов A_1D и D_1C. Вектор A_1D имеет координаты (1; 0; –1), а вектор D_1C-координаты (0; 1; -1). В результате их скалярного перемножения получаем 1. Дальнейшие вычисления такие же, как и в первом варианте решения. Косинус угла между векторами A_1D и D_1C, равный $\frac{1}{2}$, и сам угол — 60°.

Координатный вариант



Спасибо за внимание!