

Решение задач на вычисление расстояния от прямой до плоскости методом координат

Учитель математики МАОУ «Лицей № 6»
Юдина Елена Павловна

14 (C2). Стереометрическая задача

Расстояние между прямыми и плоскостями

Расстояние от точки до прямой и до плоскости

Сечения многогранников

Угол между плоскостями

Угол между прямой и плоскостью

Угол между скрещивающимися прямыми

Объёмы многогранников

Круглые тела: цилиндр, конус, шар

- Координаты вектора
- Длина вектора
- Скалярное произведение векторов
- Скалярное произведение векторов в координатах
- Свойство скалярного произведения взаимно перпендикулярных векторов
- Свойство координат коллинеарных векторов
- Угол между векторами

Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α задана уравнением: $ax + by + cz + d = 0$.

Дана точка $M(x_0, y_0, z_0)$.

Расстояние от точки M до плоскости α можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача на расстояние от точки до плоскости

Задача 514245

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

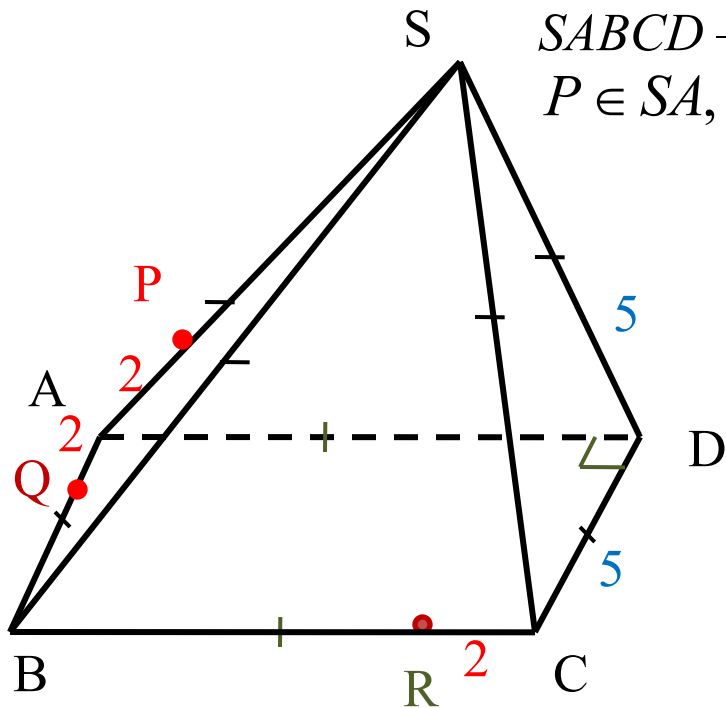
Дано:

$SABCD$ – правильная пирамида, рёбра которой равны 5,
 $P \in SA$, $Q \in AB$, $R \in BC$, $PA = AQ = RC = 2$

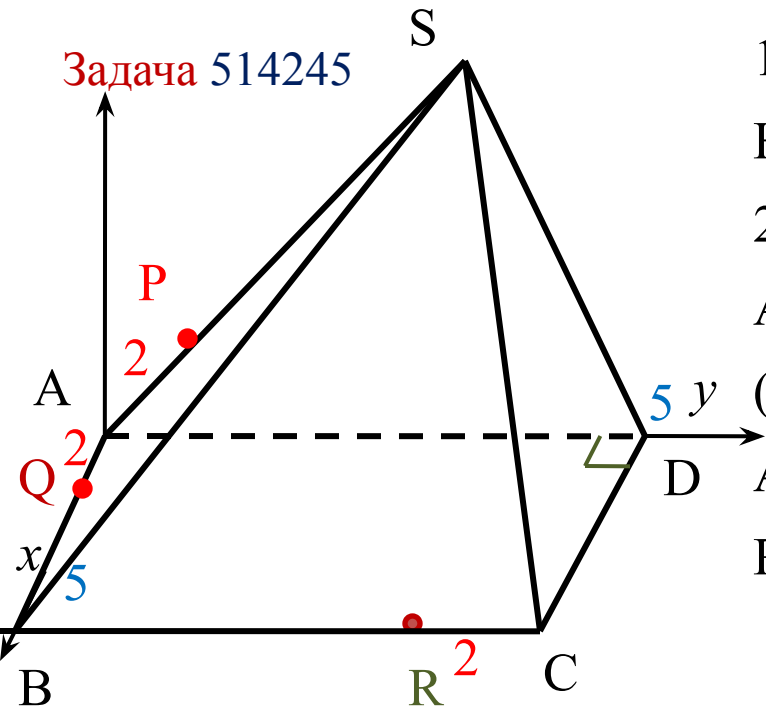
а) *Доказать:* $SD \perp (PQR)$

б) *Найти:* расстояние от точки D до плоскости PQR

Решение:



Задача 514245



1) Введём прямоугольную систему координат.
Найдём координаты точек A, B, C, D, S, P, Q и R.

2) Координаты точек:

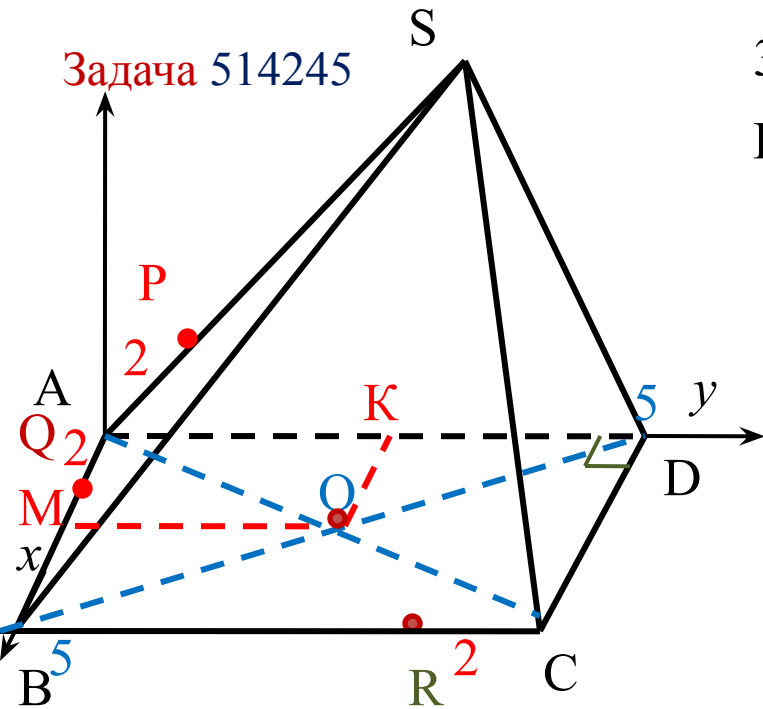
A(0;0;0), B(5;0;0), (т.к. $AB = 5$), D(0;5;0),

(т.к. $AD = 5$), C(5;5;0).

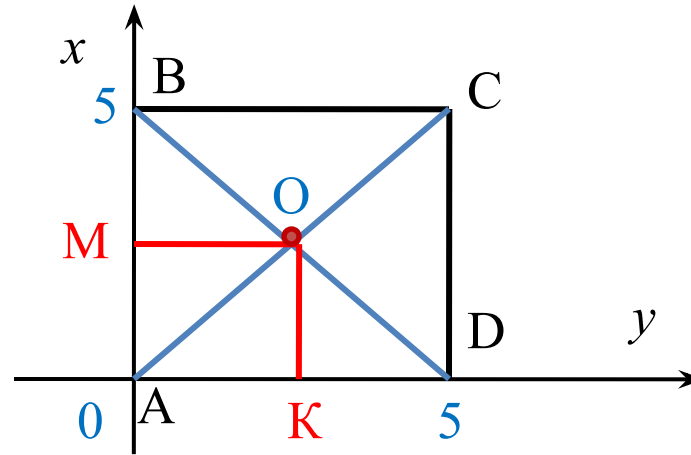
$AQ = 2$, тогда Q(2;0;0), $RC = 2$, $RC = 2$, то $BR = 3$,

R(5;3;0)

Задача 514245



3) Пусть O – центр основания пирамиды.
Найдём координаты точки O .

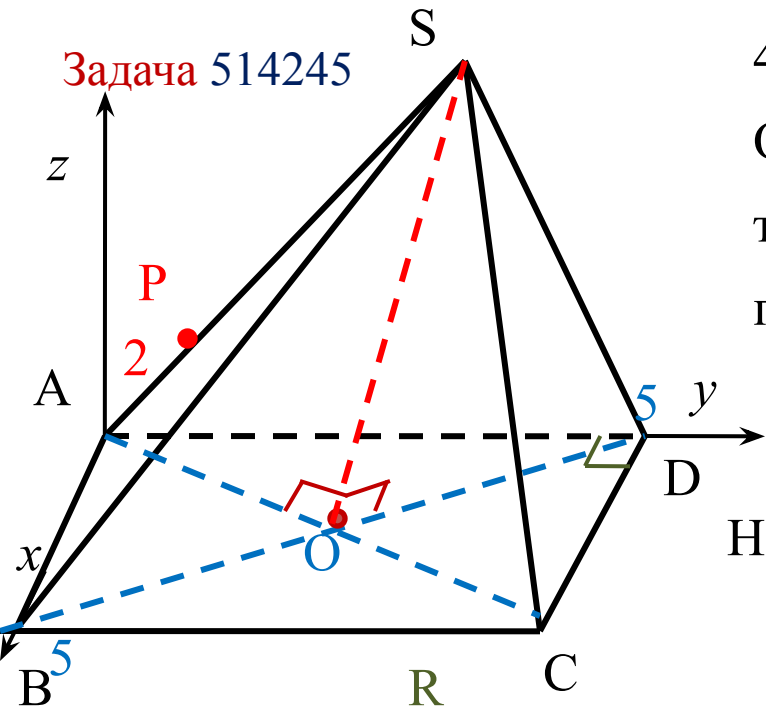


Проведём $OK \perp AD$, $OM \perp AB$.

$OK = OM = r$ – радиусы вписанной в квадрат окружности, тогда

$OK = OM = \frac{1}{2} AB = 5 : 2 = 2,5$, тогда $AM = AK = 2,5$. $O(2,5; 2,5; 0)$.

Задача 514245



4) Найдём координаты точки S.

Отрезок SO – высота правильной пирамиды, тогда $SO \perp (ABC)$, т.е. SO перпендикулярна всем прямым, лежащим в этой плоскости, $SO \perp AO$.

$S(2,5;2,5;z)$, причём $z = SO$

Найдём SO из прямоугольного треугольника ASO.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза, $AC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

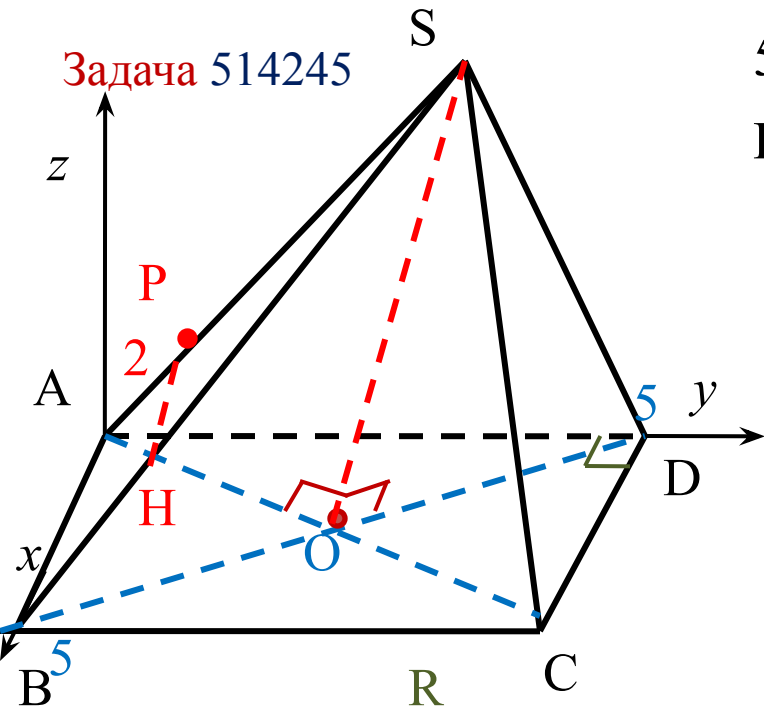
тогда $AO = \frac{1}{2} AC = 2,5\sqrt{2}$

В прямоугольном треугольнике ASO катет SO найдём по теореме Пифагора:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2}, \quad SO = \sqrt{5^2 - (2,5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Координаты точки $S\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

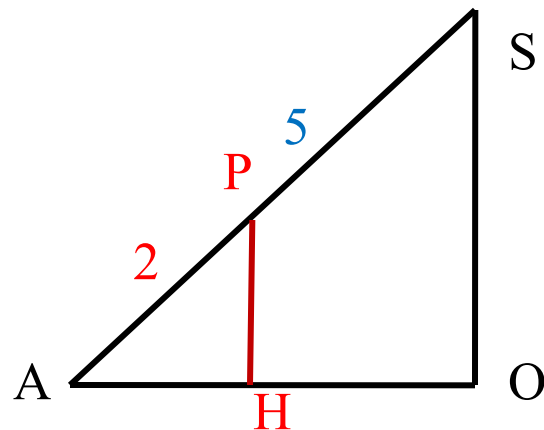
Задача 514245



5) Найдём координаты точки Р.

Проведём $PH \perp (ABC)$, тогда $PH \perp AO$, $H \in AO$

Пусть $P(x;y;z)$, причём $z = PH$. Найдём PH



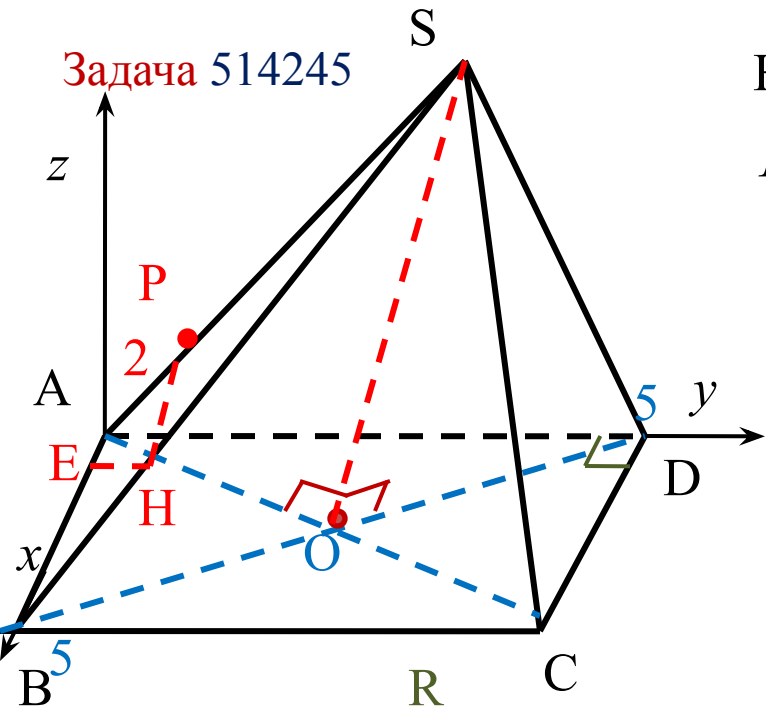
В прямоугольные треугольники ASO и APH подобны по двум углам, тогда

$$\frac{AH}{AO} = \frac{PH}{SO} = \frac{AP}{AS} = \frac{2}{5}, \text{ т.е. } PH = \frac{2}{5} SO = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad z = \sqrt{2}$$

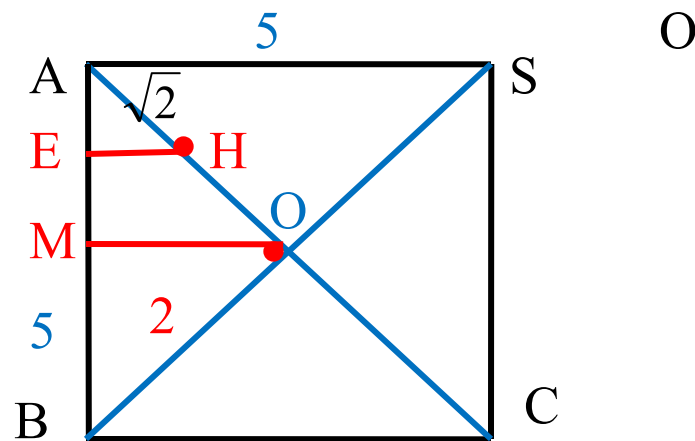
Причём, $AH = \frac{2}{5} AO = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Найдём абсциссу и ординату точки Р.

Задача 514245



Найдём абсциссу и ординату точки Р, проведём $HE \perp AB$, тогда, $x = AE$, $y = EH$



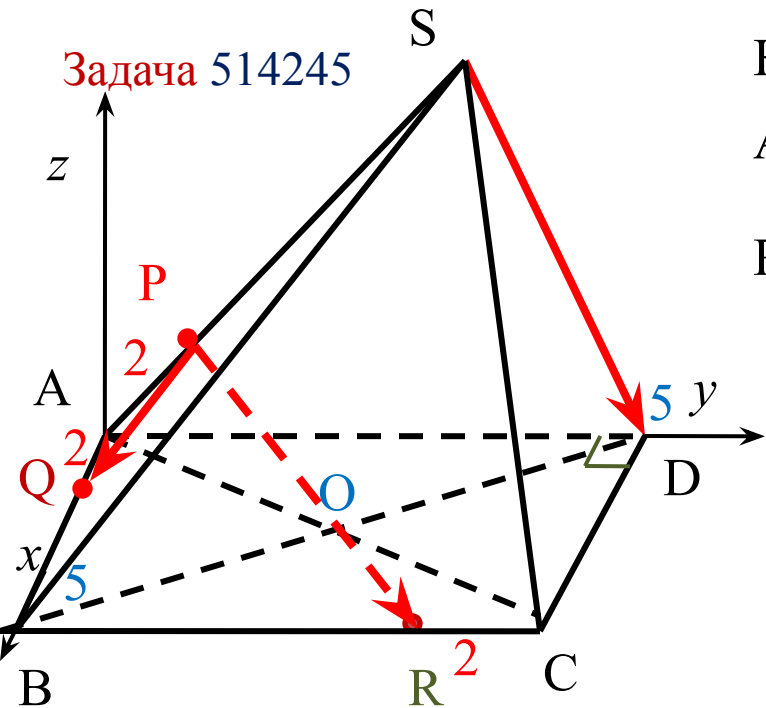
Прямоугольные треугольники АМО и АЕН подобны по двум углам, тогда

$$\frac{AH}{AO} = \frac{EH}{MO} = \frac{AE}{AM}, \quad AH = \sqrt{2}, \quad AO = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{AH}{AO} = \sqrt{2} : \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2}{5},$$

$$\text{тогда} \quad EH = AE = \frac{2}{5} AM = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1,$$

$$\text{Итак, } \underline{P(1;1;\sqrt{2})}$$

Задача 514245



Координаты точек:

$A(0;0;0)$, $B(5;0;0)$, $C(5;5;0)$, $D(0;5;0)$, $Q(2;0;0)$,

$R(5;3;0)$, $O(2,5;2,5;0)$, $S(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{\sqrt{2}})$, $P(1;1;\sqrt{2})$

а) Докажем, что $SD \perp (PQR)$, для этого докажем, что SD перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости, например, прямым PQ и PR .

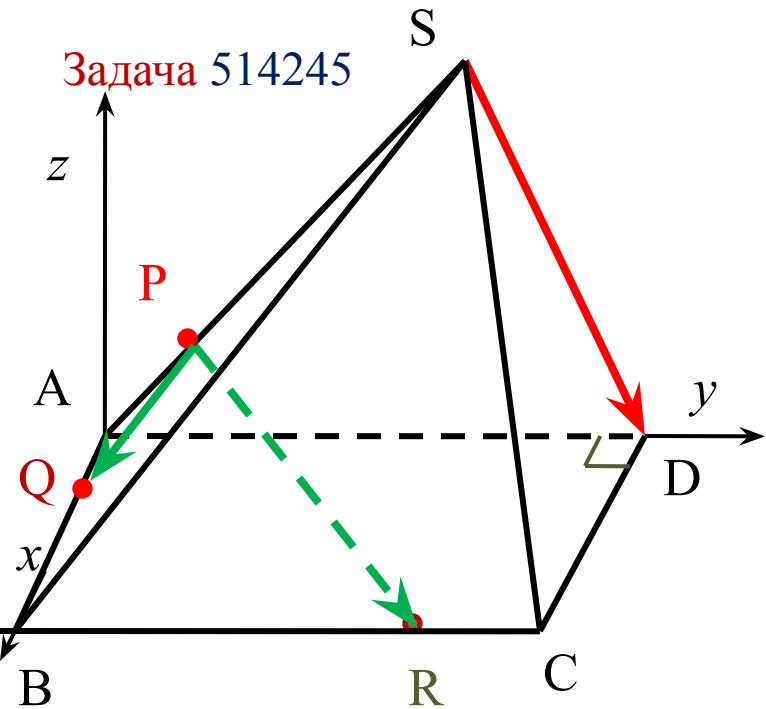
Введём векторы $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{SD}$, найдём их координаты.

Для $\overrightarrow{PQ}$: $P(1;1;\sqrt{2})$, $Q(2;0;0)$, тогда $\overrightarrow{PQ}\{2-1;0-1;0-\sqrt{2}\}$, $\overrightarrow{PQ}\{1;-1;-\sqrt{2}\}$

Для $\overrightarrow{PR}$: $P(1;1;\sqrt{2})$, $R(5;3;0)$, тогда $\overrightarrow{PR}\{4;2;-\sqrt{2}\}$

Для $\overrightarrow{SD}$: $S(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{\sqrt{2}})$, $D(0;5;0)$, тогда $\overrightarrow{SD}\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2};-\frac{5}{\sqrt{2}}\}$

Задача 514245



Найдём скалярное произведение векторов

$$\overrightarrow{PQ}\{1;1;-\sqrt{2}\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{SD}\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2};-\frac{5}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{SD} = 1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 1 \cdot \frac{5}{2} - \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 5 = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{SD} = 0, \quad \text{тогда}$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{SD}, \quad \text{тогда прямые } PQ \perp SD$$

Найдём скалярное произведение векторов

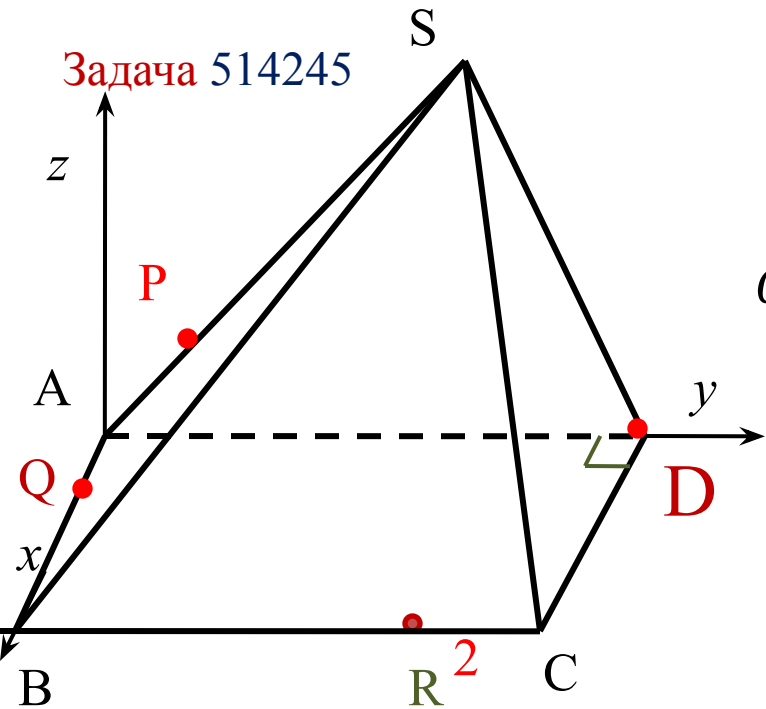
$$\overrightarrow{PR}\{4;2;-\sqrt{2}\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{SD}\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2};-\frac{5}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{SD} = 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot \frac{5}{2} - \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = -10 + 5 + 5 = 0$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{SD} = 0, \quad \text{тогда } \overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{SD}, \quad \text{тогда прямые } SD \perp PR.$$

Итак, прямая SD перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости PQR, а значит, $SD \perp (PQR)$.

Задача 514245



Найдём расстояние от точки D до плоскости PQR.

Расстояние от точки $D(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α , заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$

можно вычислить по формуле:

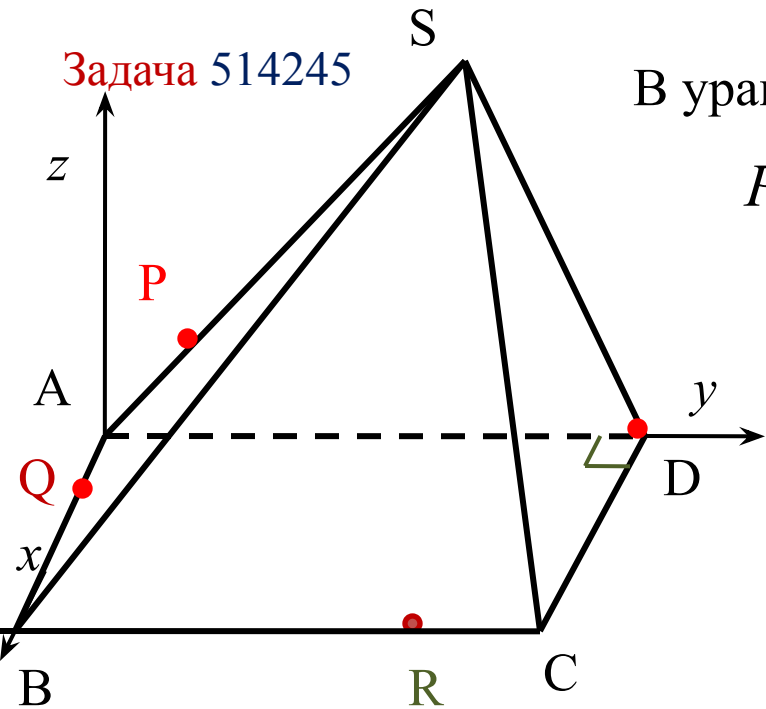
$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Причём, $D(0;5;0)$.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки $Q(2;0;0)$, $R(5;3;0)$, $P(1;1;\sqrt{2})$

В уравнение плоскости подставим координаты точек.

Задача 514245



В уравнение плоскости подставим координаты точек:

$$P(1;1;\sqrt{2}), Q(2;0;0), R(5;3;0),$$

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot \sqrt{2} + d = 0, \\ a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot 5 + b \cdot 3 + c \cdot 0 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c \cdot \sqrt{2} + d = 0, & (1) \\ 2a + d = 0, & (2) \\ 5a + 3b + d = 0 & (3) \end{cases}$$

Получили систему трёх уравнений с четырьмя переменными.

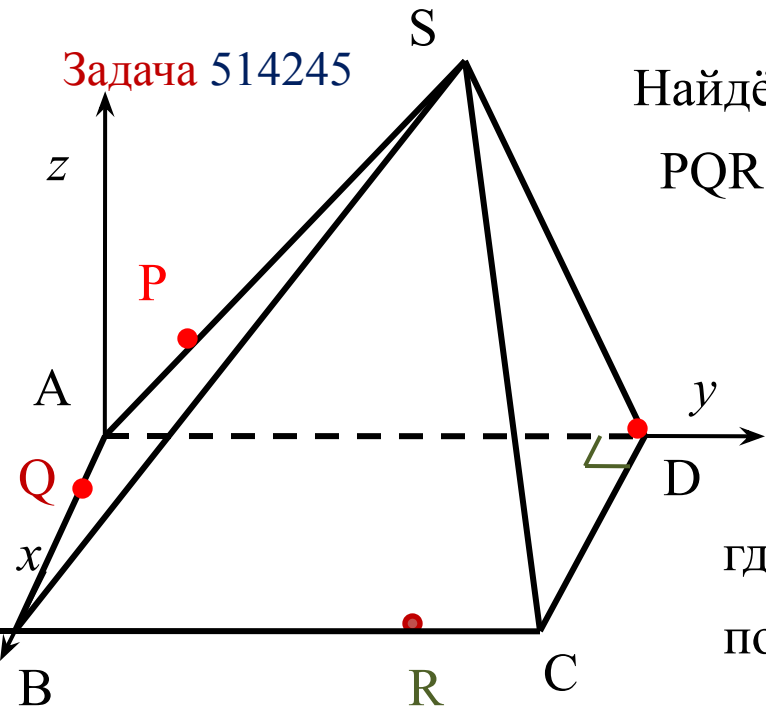
Пусть $a = 1$, тогда из уравнения (2) найдём d : $2 \cdot 1 + d = 0$, $d = -2$.

Из уравнения (3) найдём b : $5 \cdot 1 + 3b - 2 = 0$, тогда $3b = -3$, $b = -1$.

Найдём c из уравнения (1): $1 - 1 + c \cdot \sqrt{2} - 2 = 0$, $c = \sqrt{2}$

Запишем уравнение плоскости: $ax + by + cz + d = 0$, где $a = 1$, $b = -1$, $c = \sqrt{2}$, $d = -2$, получим: $x - y + \sqrt{2} \cdot z - d = 0$

Задача 514245



Найдём расстояние от точки $D(0;5;0)$ до плоскости PQR, заданной уравнением $x - y + \sqrt{2} \cdot z - d = 0$

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

где $x_0=0, y_0=5, z_0=0, a=1, b=-1, c=\sqrt{2}, d=-2$,
получим:

$$\rho(D, (PQR)) = r = \frac{|0 - 5 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: расстояние от точки D до плоскости PQR равно 3,5

Задача на расстояние между скрещивающимися прямыми

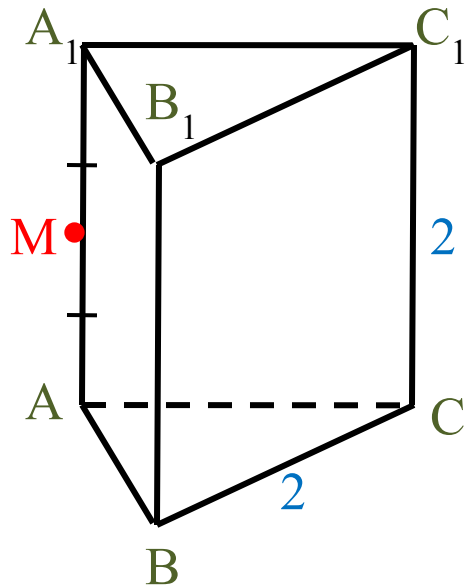
Задача 519659

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2.

Точка M — середина ребра AA_1 .

а) Докажите, что прямые MB и BC_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная пирамида, рёбра которой равны 2, M — середина AA_1

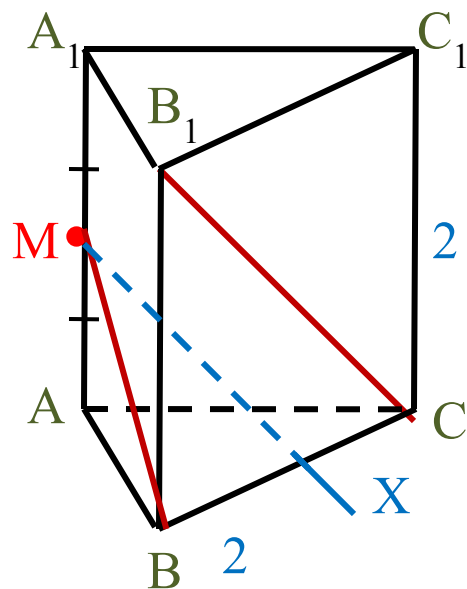
а) *Доказать:* $MB \perp BC_1$.

б) *Найти:* расстояние между прямыми MB и B_1C .

Решение:

б) Найдем расстояние между прямыми MB и B_1C .

Задача 519659



б) Найдем расстояние между прямыми MB и B_1C .

Прямые MB и B_1C являются скрещивающимися.

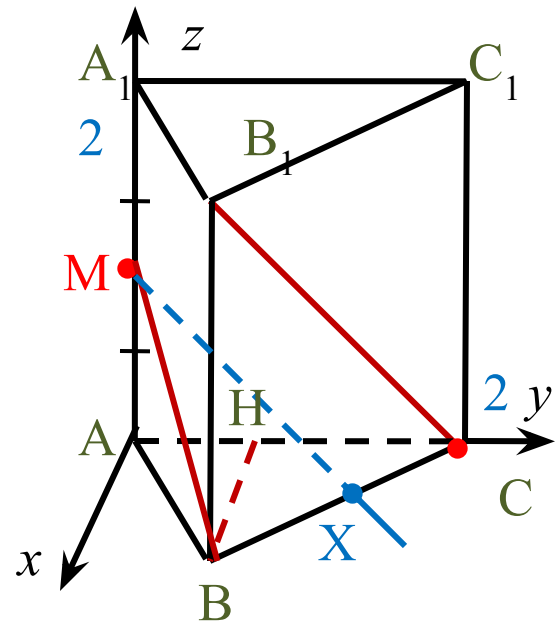
Расстоянием между скрещивающимися прямыми является расстояние от одной из этих прямых до плоскости, содержащей другую прямую, и параллельную первой.

Построим плоскость, параллельную прямой B_1C , проходящую через прямую MB .

Проведём прямую MX , параллельную прямой B_1C . Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости прямая B_1C параллельна плоскости MBX . Найдем расстояние от прямой B_1C до плоскости MBX , для этого на прямой B_1C выберем точку, например, точку C , найдём расстояние от точки C до плоскости MBX по формуле:

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача 519659



б) Введём прямоугольную систему координат.

Нам необходимо задать уравнение плоскость MBX и найти координаты точки C.

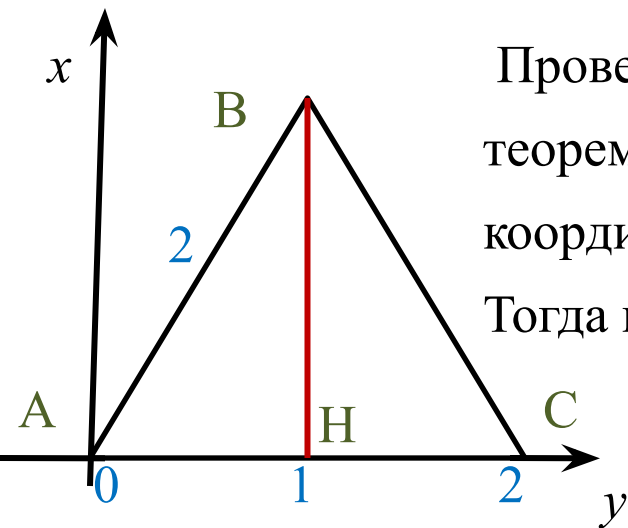
Найдём координаты точек: $C(0;2;0)$, $M(0;0;1)$.

Пусть X - точка пересечения прямых MX и BC , тогда $X(x;y;0)$.

Найдём x и y . Рассмотрим векторы $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{MX}$

Найдём их координаты.

Найдём координаты точки B. Треугольник ABC – равносторонний, со стороной 2.

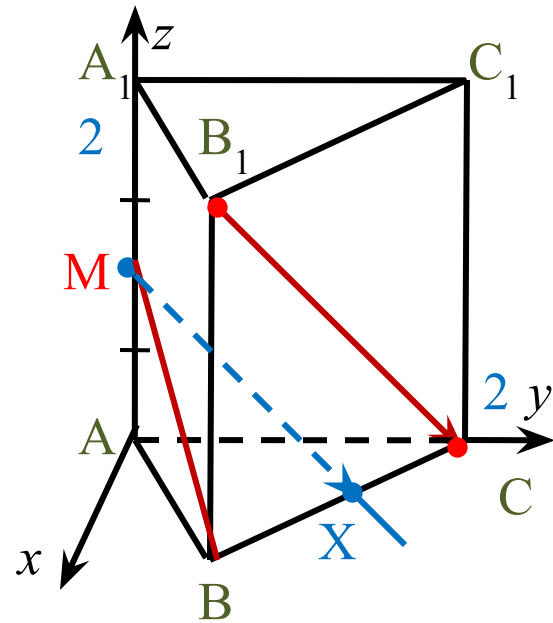


Проведём BH – высоту треугольника, $AH = 1$, тогда по теореме Пифагора $BH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

координаты точки B: $B(\sqrt{3};1;0)$

Тогда координаты точки B_1 : $B_1(\sqrt{3};1;2)$

Задача 519659



$X(x;y;0)$

Найдём x и y . Рассмотрим векторы $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{MX}$
 Векторы лежат на параллельных прямых, а значит коллинеарны, тогда их координаты пропорциональны.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{MX}$

Для $\overrightarrow{B_1C}$: $B_1(\sqrt{3};1;2)$, $C(0;2;0)$, тогда $\overrightarrow{B_1C} \{-\sqrt{3};1;-2\}$

Для $\overrightarrow{MX}$: $M(0;0;1)$, $X(x;y;0)$, тогда $\overrightarrow{MX} \{x;y;-1\}$

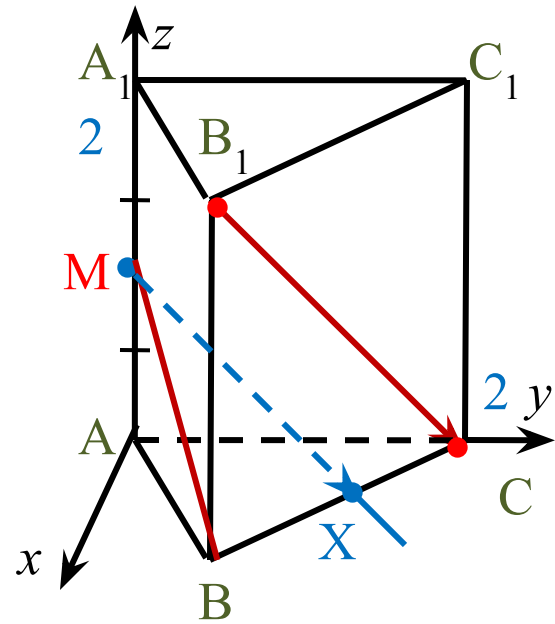
Учитывая коллинеарность векторов, получаем:

$$\frac{-\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{y} = \frac{-2}{-1}$$

Из равенства $\frac{1}{y} = \frac{2}{1}$ находим $y = \frac{1}{2}$. Из равенства $\frac{-\sqrt{3}}{x} = \frac{2}{1}$ находим $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Получаем координаты точки X : $X(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0)$

Задача 519659



Зададим плоскость BMX уравнением:

$$M(0;0;1), \quad B(\sqrt{3};1;0), \quad X\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right),$$

в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$

подставим координаты точек:

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ \sqrt{3}a + b + d = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2} + d = 0 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} c + d = 0, & (1) \\ \sqrt{3}a + b + d = 0, & (2) \\ -\sqrt{3}a + b + 2d = 0 & (3) \end{cases}$$

Пусть $c = 1$, тогда $d = -1$, из равенств (2) и (3), сложив их, получаем:

$$+ \begin{cases} \sqrt{3}a + b + d = 0, \\ -\sqrt{3}a + b + 2d = 0 \end{cases}$$

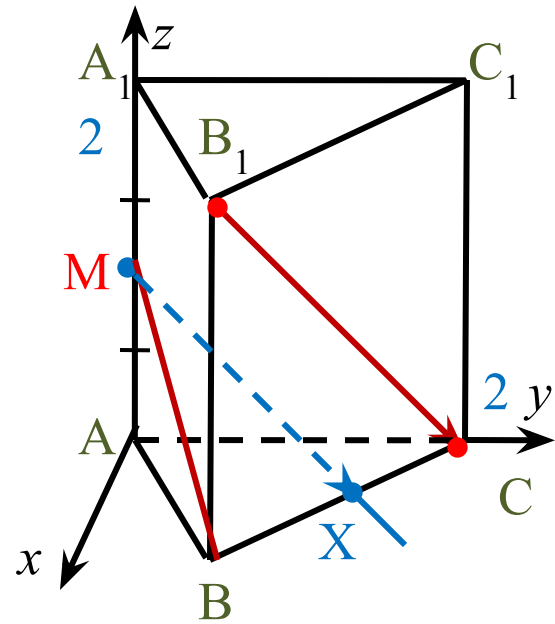
$$\begin{aligned} 2b + 3d &= 0 \\ 2b &= 3 \\ b &= 1,5 \end{aligned}$$

Из равенства (1) найдём a :

$$\sqrt{3}a + \frac{3}{2} - 1 = 0$$

$$a = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

Задача 519659



Уравнение плоскости BMX : $-\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$

где $a = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 1$, $d = -1$

Координаты точки C : $C(0;2;0)$.

Найдём расстояние от точки C до плоскости BMX

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$r = \frac{|0 + 3 + 0 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{9}{4} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{28}{12} + 1}} = 2 : \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$