Параллельность прямой и плоскости

по учебнику И.М. Смирновой

(может применяться и к другим учебникам по геометрии)

Учитель математики

МАОУ «Обдорская гимназия»

г. Салехард ЯНАО

Е.И. Гусак

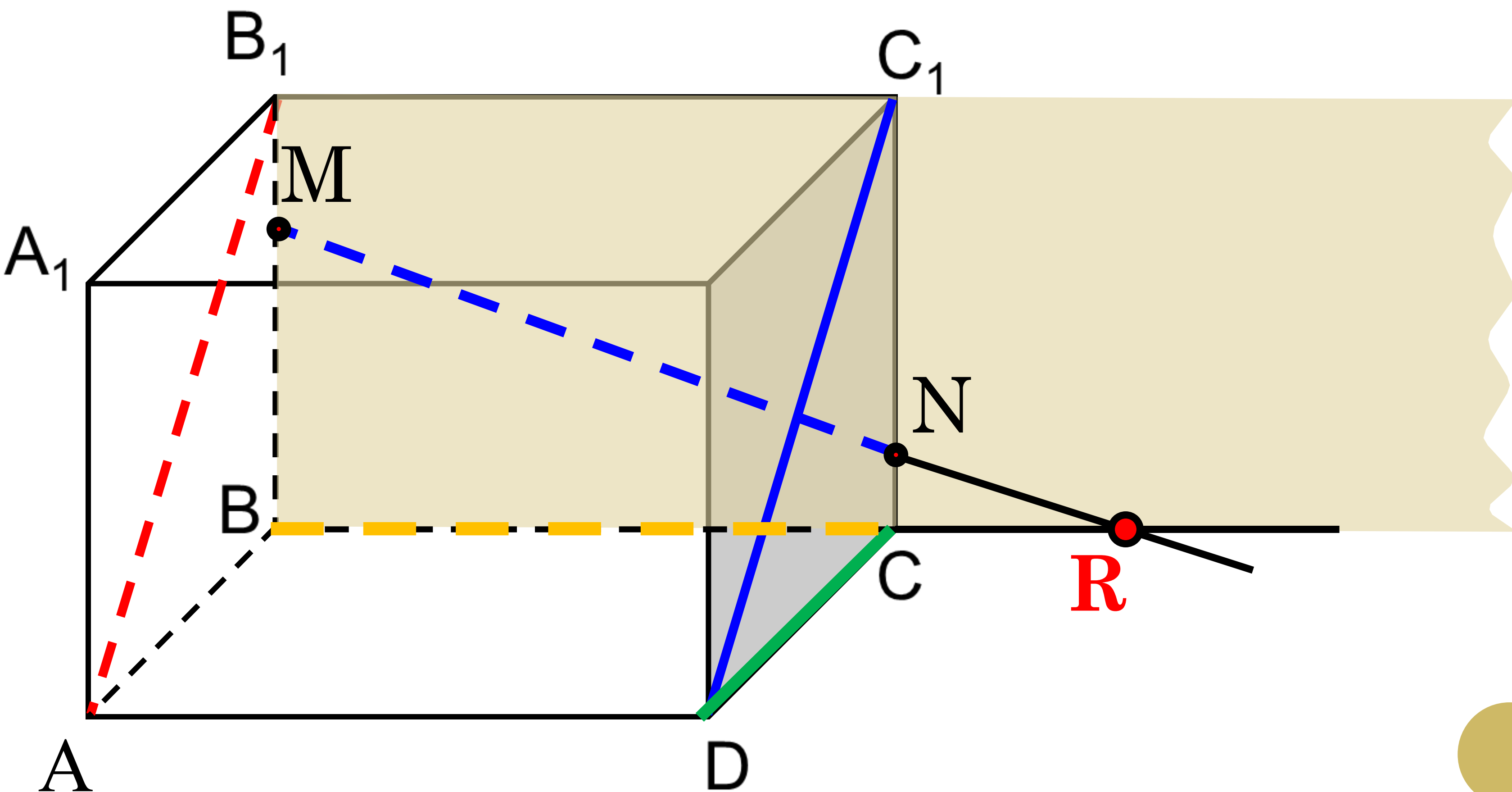
Как располагаются прямые

$AB_1 \parallel DC_1$

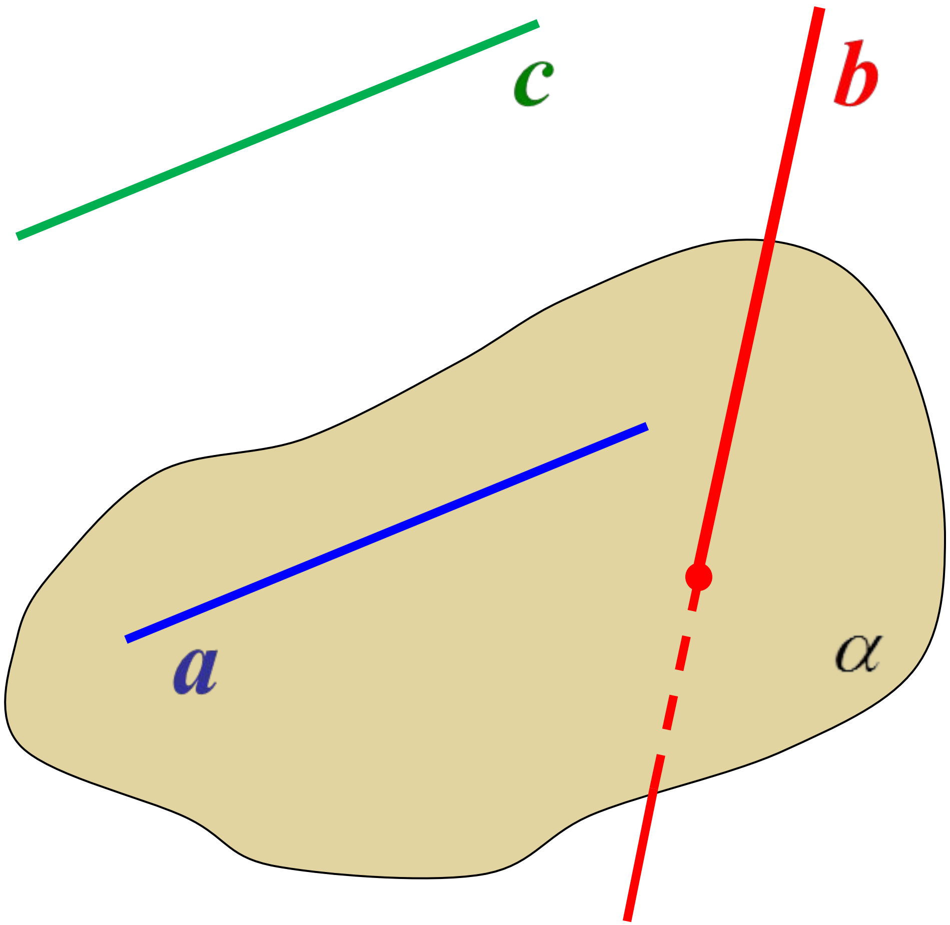
$AB_1 \dot{-} MN$

$MN \dot{-} DC$

$MN \cap BC$



Как могут располагаться прямая и плоскость?



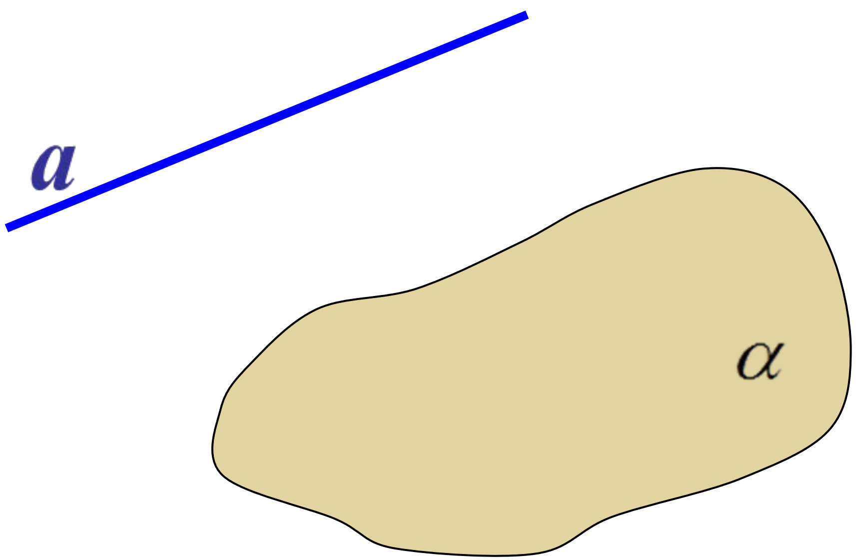
Лежать в плоскости

Пересекать плоскость

Не иметь с плоскостью ни одной общей точки

Определение параллельности прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая и плоскость

Имеют общие точки

Не имеют общих точек

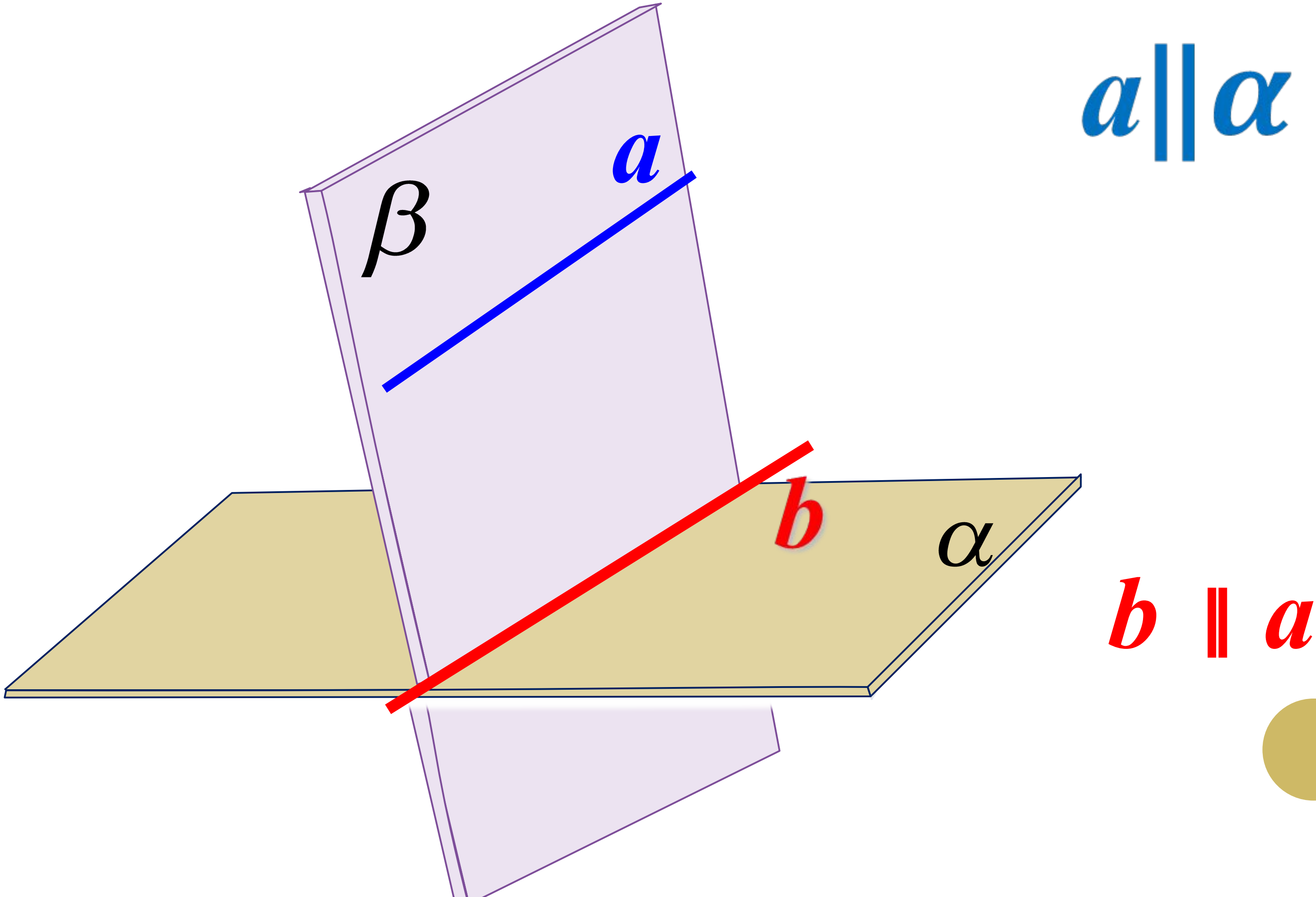
(параллельны)

Имеют одну общую точку (пересекаются)

Имеют более одной общей точки (прямая лежит в плоскости)

Теорема.(Признак параллельности двух прямых)

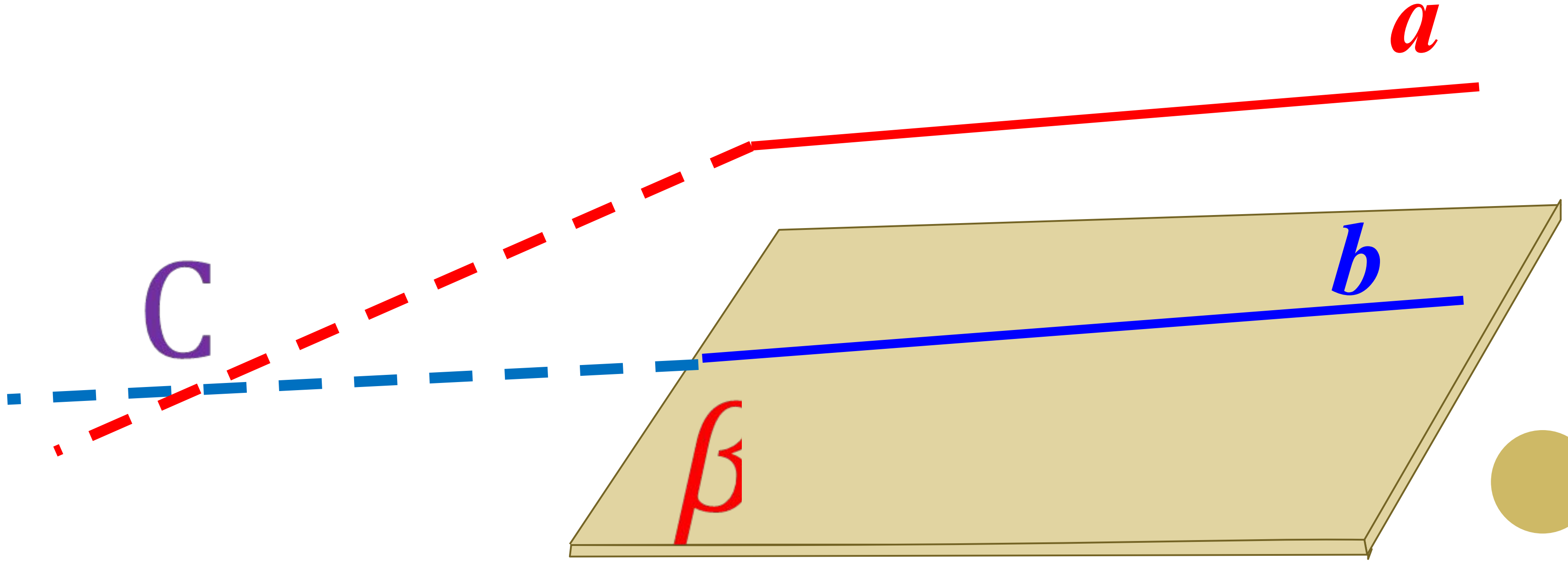
Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



Теорема (признак параллельности прямой и плоскости)

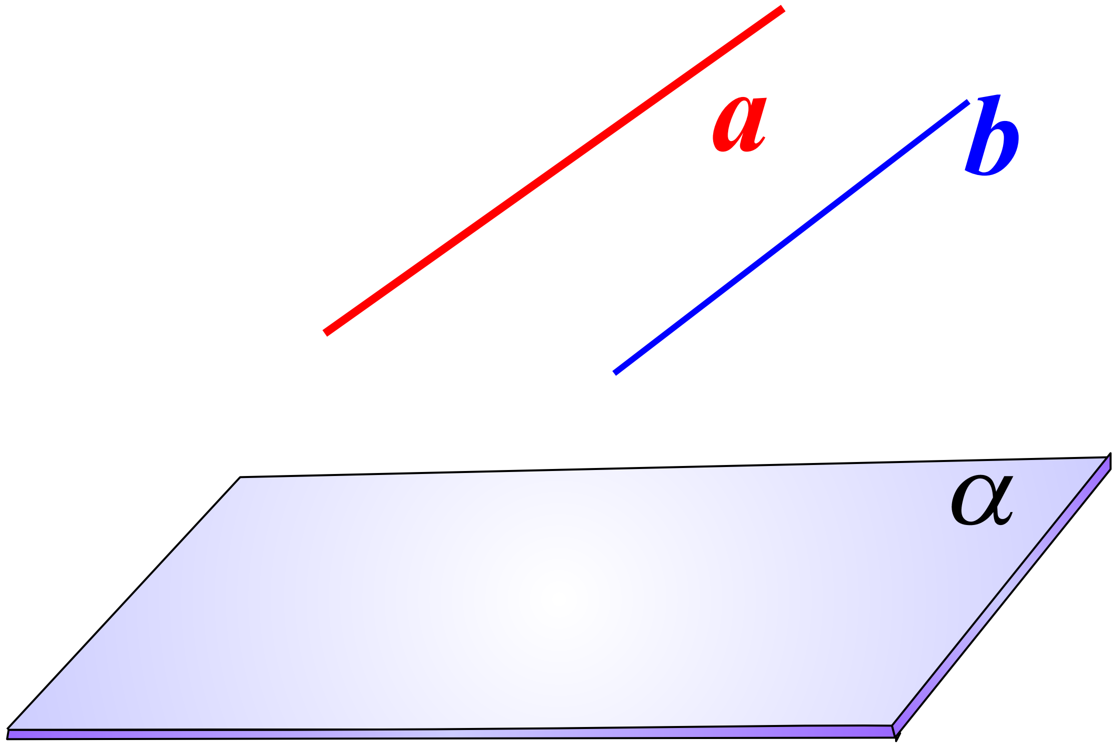
Если прямая не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

Дано: $a \not\subset \beta, a \parallel b$ Доказать: $a \parallel \beta$



Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

$$(a \parallel b,\ a \parallel \alpha) \Rightarrow (b \parallel \alpha \vee b \subset \alpha)$$



Теорема.(Признак параллельности прямых): св-во транзитивности

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

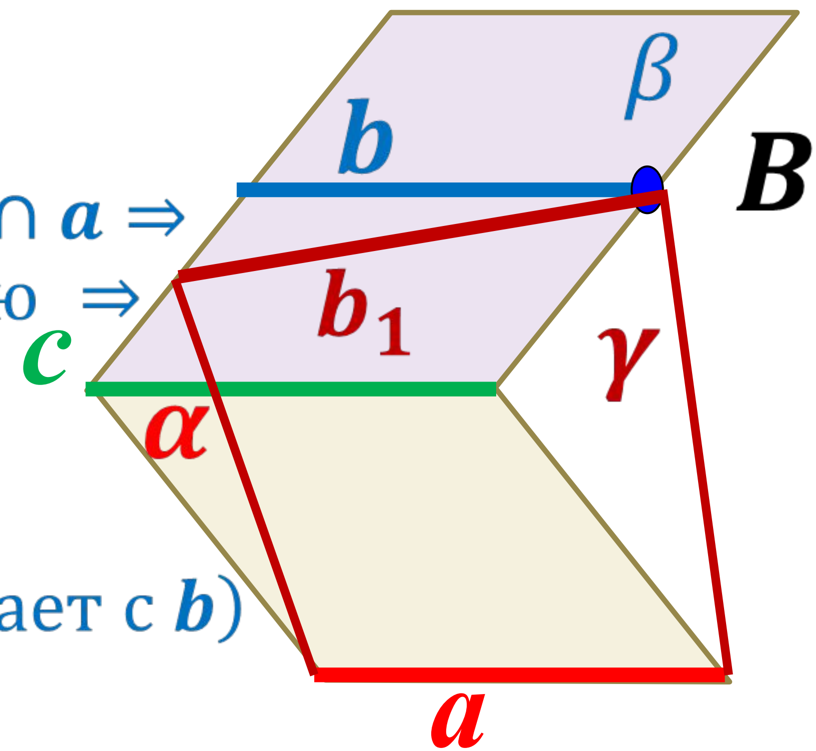
$(a \parallel c, b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel b)$

γ: B и a $\qquad \gamma \cap \beta = b_1$

Пусть $b_1 \cap \alpha \Rightarrow b_1 \cap$ с и $b_1 \cap a \Rightarrow$

$c \cap a$ противоречие условию $\Rightarrow$

b_1 не $\cap$ с $\Rightarrow b_1 \parallel$ с



$(b_1 \parallel$ с и $b \parallel c) \Rightarrow (b_1$ совпадает с $b)$

$$\left(\begin{matrix} b_1 \text{ не } \cap a \\ b_1 \text{ совп. с } b \\ \{b_1, b, a \subset \gamma\} \end{matrix}\right) \Rightarrow \qquad (b \text{ не } \cap a) \Rightarrow (a \parallel b)$$

Что и т. д.

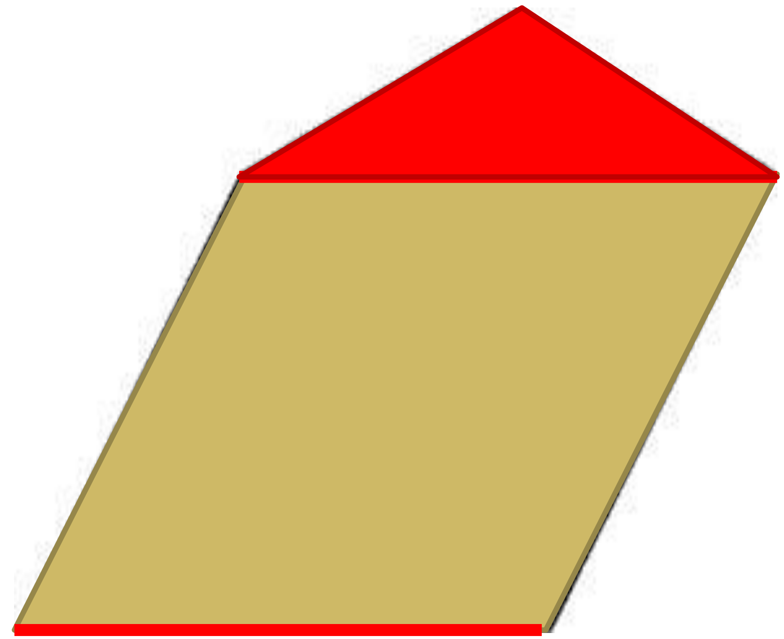
Задача. Доказать, что ребра одного основания призмы параллельны другому основанию этой призмы.

Решение.

Боковые грани – параллелограммы $\Rightarrow$

каждое ребро одного основания призмы параллельно ребру другого ее основания

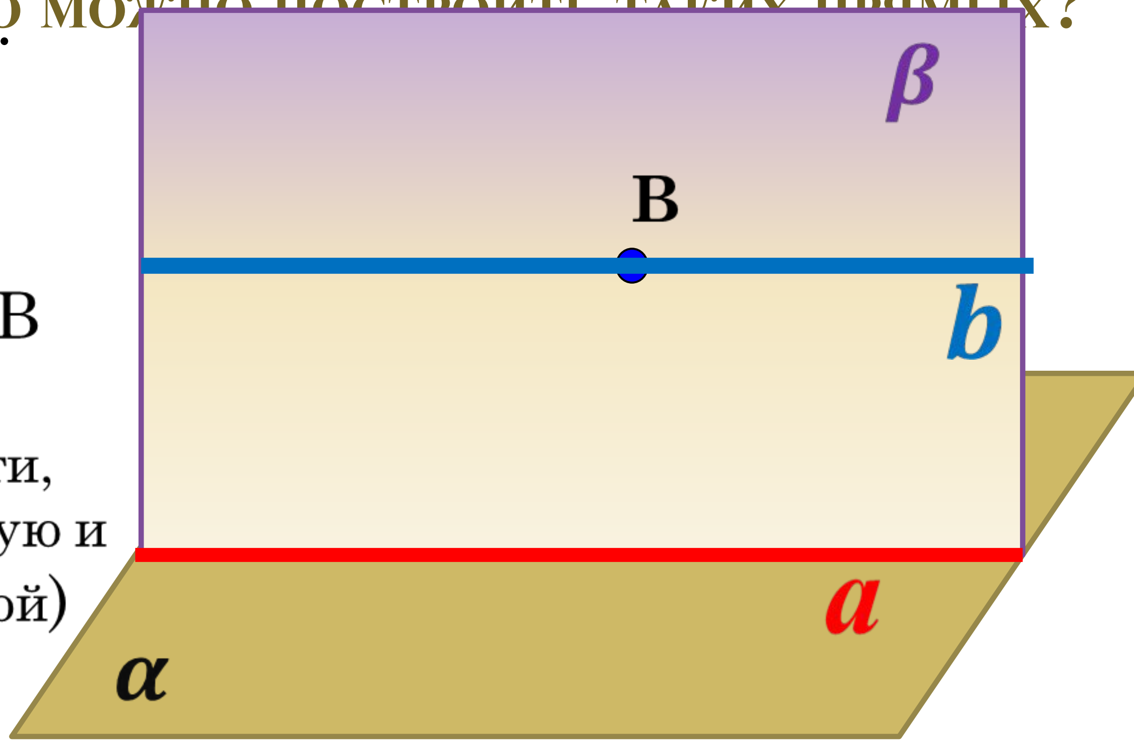
$\xRightarrow{\text{по признаку } \parallel \text{ прямой и плоскости}}$



каждое ребро одного основания призмы параллельно другому ее основанию

Задача. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, провести прямую, параллельную этой плоскости. Сколько можно построить таких прямых?

Решение.



Дана плоскость α и точка B не $\in \alpha$.

Проведем $a \subset \alpha$.

Проведем через a и B (по следствию о существовании плоскости, проходящей через прямую и точку не $\in$ данной прямой) плоскость β.

В β через B проведем b || a $\xRightarrow{\text{по признаку || прямой и плоскости}}$

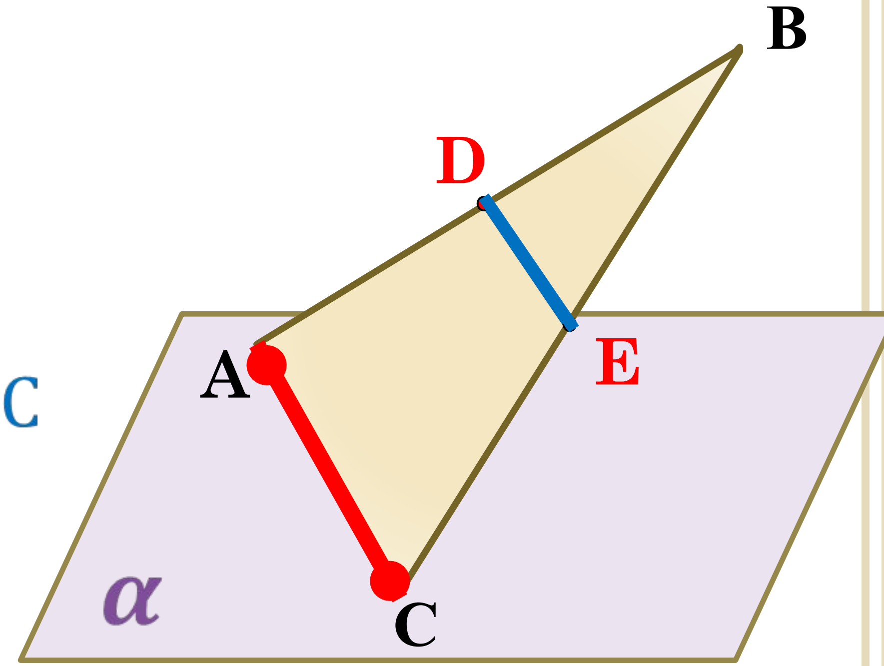
b || α. Итак, **b – искомая прямая**.

Таких прямых можно построить **бесконечно много**.

Задача. **Плоскость α проходит через сторону AC треугольника ABC. Точки D и E - середины отрезков AB и BC соответственно.**
Докажите, что DE ∥ α.

Доказательство.

$(ABC) \cap \boldsymbol{\alpha} = AC$



DE – средняя линия $\triangle ABC$ по определению $\Rightarrow \boldsymbol{D}E \parallel AC$

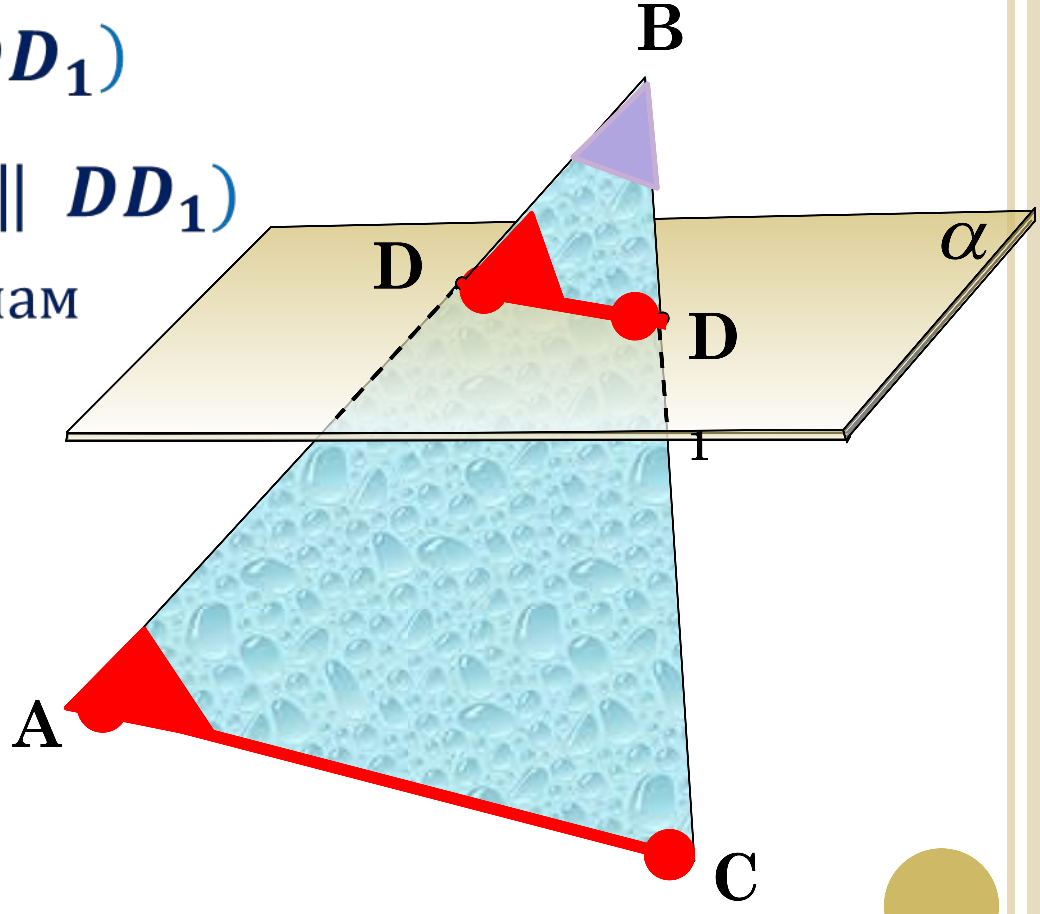
$$\boldsymbol{D}E \parallel AC \xrightarrow{\text{по Т(признак ∥ пр.и пл.)}} \boldsymbol{D}E \parallel \boldsymbol{\alpha}$$

Что и т. д.

Задача. **В треугольнике АВС на стороне АВ выбрана точка D такая, что BD:BA = 1:3. AC || α. Найти отношение $BD_1 : D_1C$.**

Решение.

$(AC \parallel \boldsymbol{\alpha}, (ABC) \cap \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{DD_1}) \xRightarrow{\text{по Т(признак } \parallel \mathbf{2}\text{–х пр.)}} (AC \parallel \boldsymbol{DD_1})$



$\triangle\, DBD_1 \sim \triangle\, ABC$ по двум углам

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BD_1}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$BD_1 = k, BC = 3k \Rightarrow$

$D_1C = 3k - k = 2k \Rightarrow$

$$\frac{\mathbf{BD_1}}{\mathbf{D_1C}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Ответ: 1: 2.

Задача. Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

вспомним

Доказательство.

ABCD-пространственный четырехугольник,

M, N, K, L – середины сторон

AC – диагональ ABCD.

MN – средняя линия $\triangle ABC$,

LK – средняя линия $\triangle ACD$.

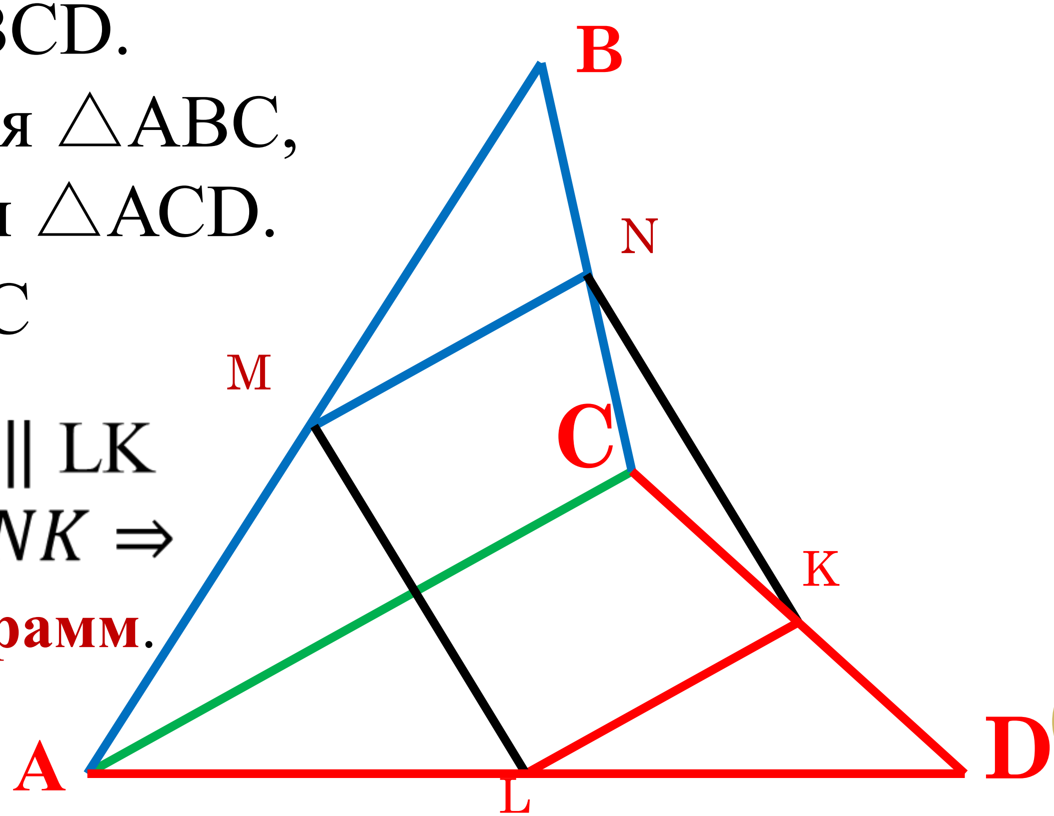
MN $\parallel$ AC и LK $\parallel$ AC

$\xRightarrow{\text{по Т(признак }\parallel\text{пр.)}}$ MN || LK

Аналогично, ML || NK ⇒

MNKL – параллелограмм.

Что и т.д.



Задача. **Даны две скрещивающиеся прямые. Как через одну из них провести плоскость, параллельную другой?**

Дано: $a \dotminus b$

Решение.

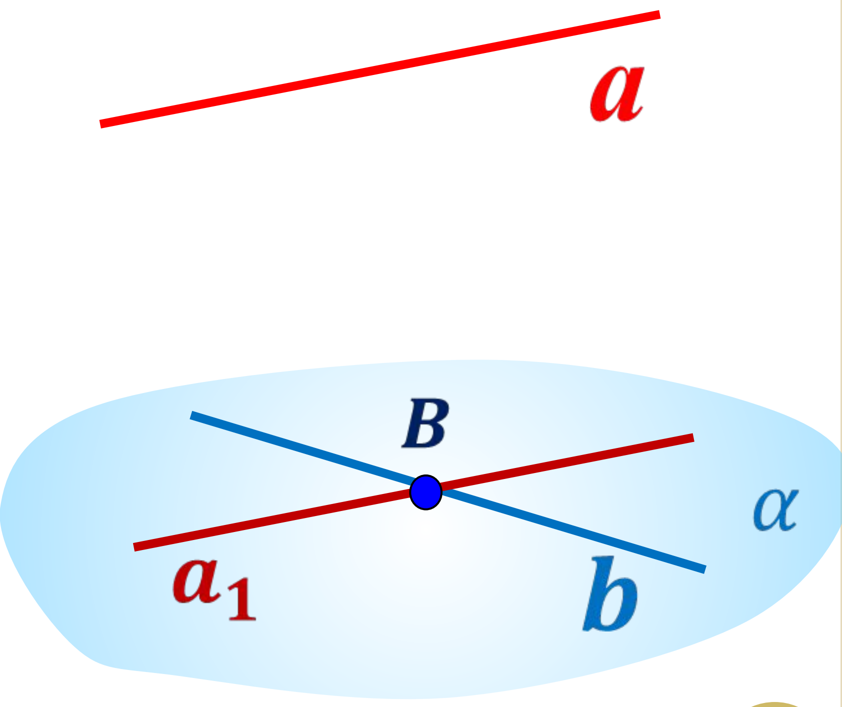
Возмем $B \in b$. Через B проведем $a_1 \parallel a$.

По свойству о $\exists$ плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые проведем α.

По Т(признак $\parallel$ пр. и пл.)

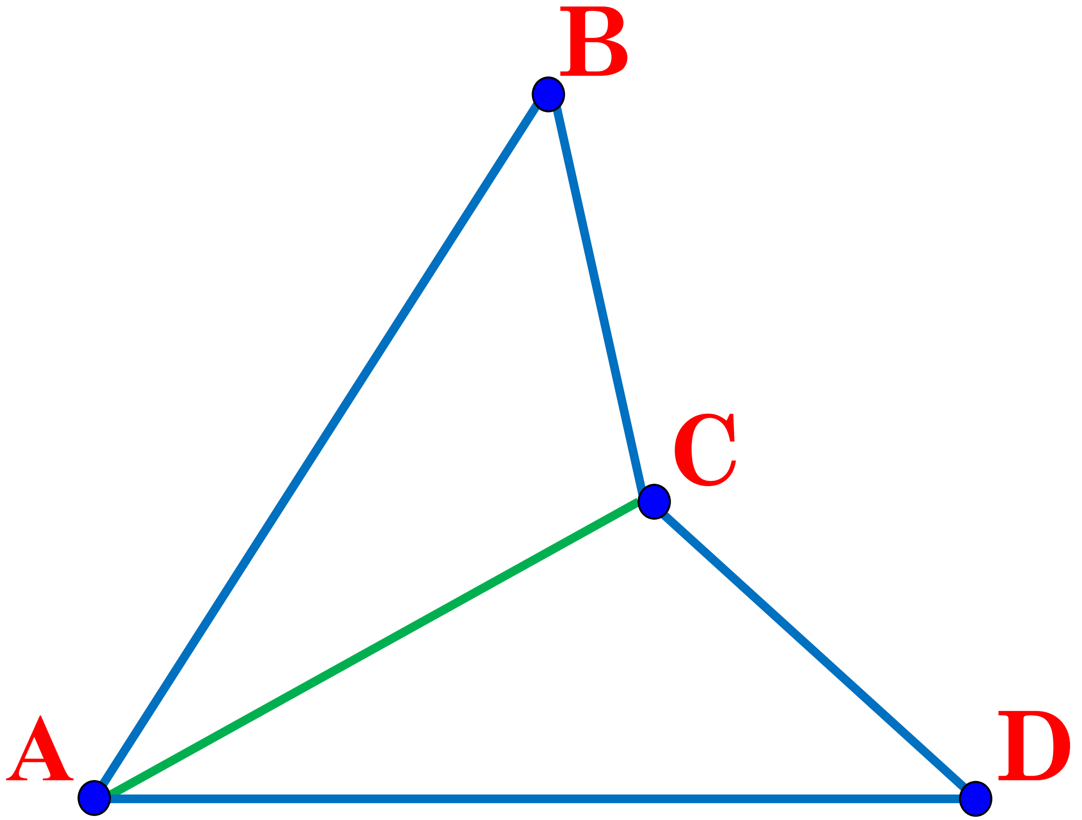
$a \parallel \alpha$.

Что и т. д.



Спасибо за совместную работу

Пространственным четырёхугольником называется четырехугольник, вершины которого не лежат в одной плоскости.



назад