Учимся решать планиметрические задачи.
Подготовка к ЕГЭ. Задание №16.

Многоугольники

Учитель: Шарова Светлана Геннадьевна,
МБОУ гимназия, г. Урюпинск, Волгоградская область

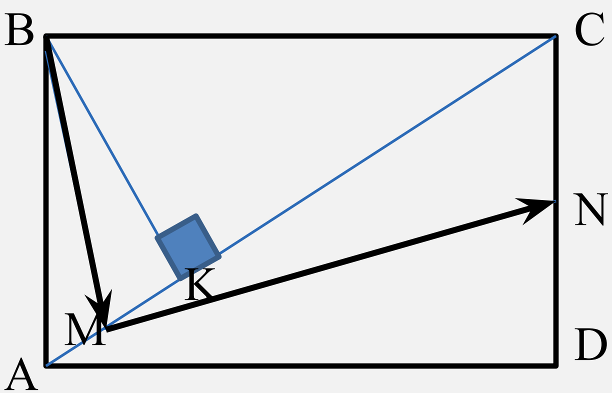
Блез Паскаль

«Каждая решённая мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач»

Задача 1.

В прямоугольнике ABCD опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN – прямой.

Решение. I способ **Векторный метод**



$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KM})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}) =$$

$$= (\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KM})\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) =$$

$$= (\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KM})\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) =$$

$$= (\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KM})\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}\right) =$$

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{BK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KA} =$$

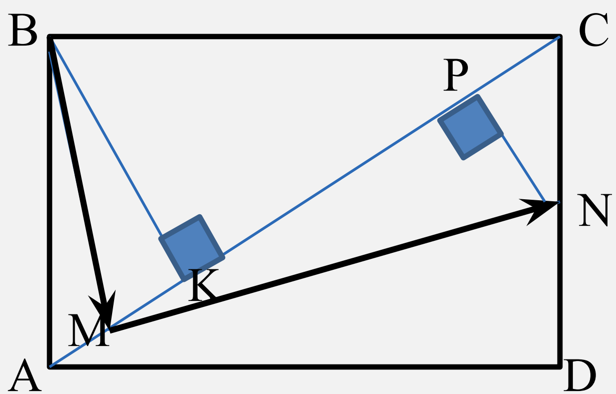
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2+\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2+\overrightarrow{KM}\cdot(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KA} =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{KA}^2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KC} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BK}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{KA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{KC}\right|\cos 180^0 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BK}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BK}\right|^2 = 0$$

$BK^2 = KC\cdot KA$ высота, проведенная из вершины прямого угла

II способ. **Векторный метод и подобие**



$$NP \perp AC$$

$\Delta CPN \sim \Delta AKB \Rightarrow$ $\frac{PN}{KB} = \frac{CP}{AK} = \frac{CN}{AB} = \frac{1}{2}$

$$PN = \frac{1}{2}BK, CP = \frac{1}{2}AK$$

M – середина AK, значит, AM=MK=PC.

Следовательно, MP=KC.

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}\right) = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{PN} =$$

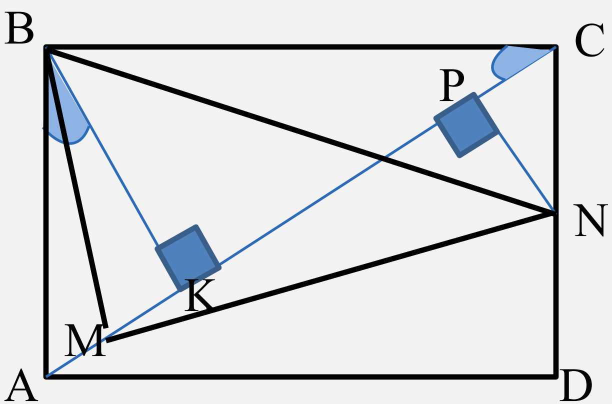
$$= \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BK} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BK}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{KA}\right|\left|\overrightarrow{KC}\right| \cos 180^0 =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BK}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BK}\right|^2 = 0$$

$$BM \perp MN$$

III способ

Применение тригонометрии



Убедимся, что $BN^2 = BM^2 + MN^2$

Пусть $\angle ACB = \angle ABK = \alpha$, $CN = a$, $AB = 2a$

$MP = KC$, $PN = 0{,}5BK$

ΔABK:

$$BK = 2a\cos\alpha, AK = 2a\sin\alpha, MK = \frac{1}{2}AK = a\sin\alpha$$

ΔABC: $BC = 2a\,ctg\,\alpha$

ΔBCN: $BN^2 = BC^2 + CN^2 = 4a^2ctg^2\alpha + a^2$

ΔBMK: $BM^2 = MK^2 + BK^2 = a^2\sin^2\alpha + 4a^2\cos^2\alpha$

ΔBKC: $KC^2 = BC^2 - BK^2 = 4a^2ctg^2\alpha - 4a^2\cos^2\alpha$

ΔMPN : $MN^2 = MP^2 + PN^2 = KC^2 + PN^2 = 4a^2ctg^2\alpha - 4a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$

$$BM^2 + MN^2 = a^2\sin^2\alpha + 4a^2\cos^2\alpha + 4a^2ctg^2\alpha - 4a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\alpha =$$

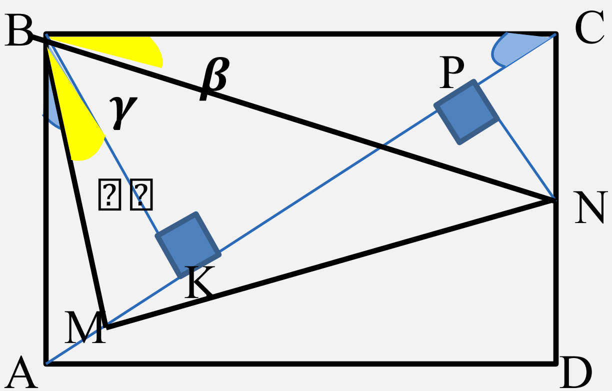
$$= a^2 + 4a^2ctg^2\alpha$$

$$BN^2 = a^2 + 4a^2ctg^2\alpha$$

$BN^2 = BM^2 + MN^2$ $\Rightarrow \angle BMN$ – прямой.

IV способ

Тригонометрия и подобие



Пусть $\angle ACB = \angle ABK = \alpha$

ΔBKC: $\sin\alpha = \dfrac{BK}{BC}$

$\Delta\ ABK$: $\sin\alpha = \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{2MK}{2CN} = \dfrac{MK}{CN}$

$\angle C = \angle K = 90^0$, $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{MK}{CN}$ $\Rightarrow \Delta BCN \sim \Delta BKM$ $\Rightarrow$

$\angle MBK = \angle NBC = \boldsymbol{\beta}$

$\Delta BCN \sim \Delta BKM \Rightarrow$ $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{MK}{CN} = \dfrac{BM}{BN}$

Рассмотрим ΔBMN и ΔBKC

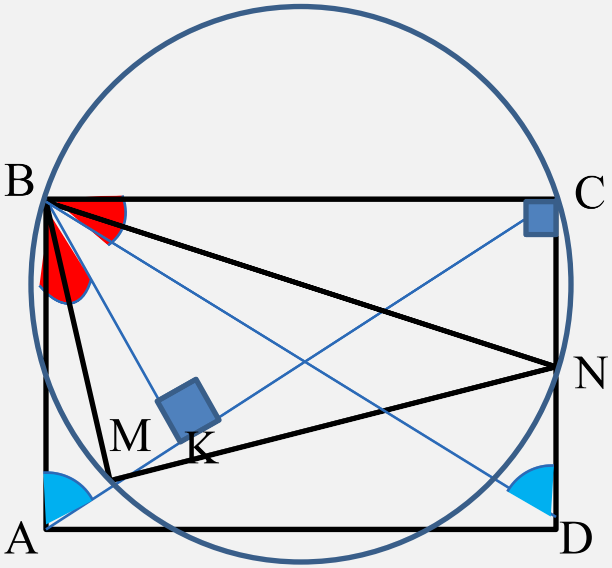
$\angle MBN = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$, $\angle CBK = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \angle\ MBN = \angle CBK$, $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BM}{BN}$ $\Rightarrow$

$\Delta BMN \sim \Delta BKC$

Значит, $\angle BMN = \angle BKC = 90^0$.

V способ.

Подобие и вспомогательная окружность



$\Delta BDC \sim \Delta BAK$

Из условия следует, что BN и BM - медианы

Эти отрезки служат соответственными элементами подобных треугольников.

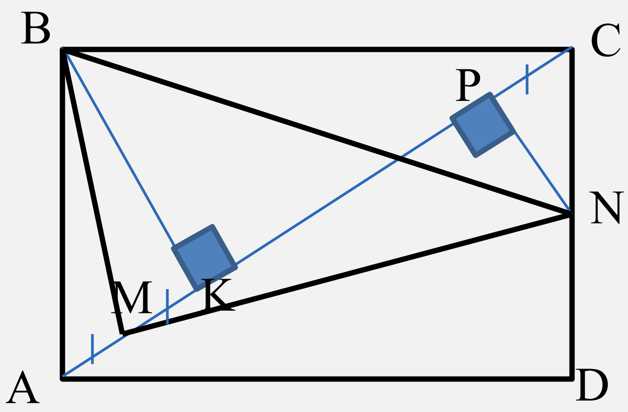
Отсюда, $\Delta\ BMK \sim \Delta\ BNC$, $\angle BMC = \angle BNC$

И точки M,N,C,B лежат на одной окружности.

Её диаметр – медиана BN, так как $\angle BCN = 90^0$

Таким образом, $\angle BMN = 90^0$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр).

VI способ. **Обратный ход**



Предположим, что $\angle BMN$ - прямой, тогда

$$BN^2 = BM^2 + MN^2$$

1) $BN^2 = BC^2 + CN^2$

2) $BM^2 = BK^2 + MK^2$

3) $MN^2 = MP^2 + PN^2$

4) MP = KC, MK = PC

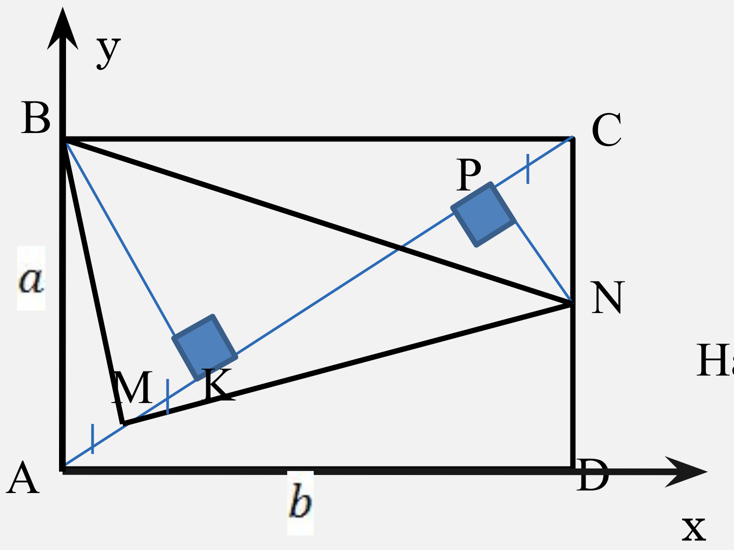
Таким образом, $BC^2 + CN^2 = BK^2 + MK^2 + MP^2 + PN^2$

$$BC^2 + CN^2 = BK^2 + MK^2 + KC^2 + PN^2$$

$$BC^2 + CN^2 = BC^2 + MK^2 + PN^2$$

$CN^2 = PC^2 + PN^2$ -верно, т. к. ΔPCN - прямоугольный

VII способ. **Координатный метод**



$$A(0;0), B(0;a), D(b;0), C(b;a), N(b;\frac{a}{2})$$

$k_{AC} = \frac{a}{b}; y = \frac{a}{b}x$ - уравнение прямой AC

BK $\perp$ AC (условие) $\Rightarrow k_{BK} = -\frac{b}{a}$

Напишем уравнение прямой BK : $B(0;a), k_{BK} = -\frac{b}{a}$

$$y = -\frac{b}{a}x + a$$

Найдем координаты точки пересечения BK и AC

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x + a, \\ y = \frac{a}{b}x, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a^2b}{a^2+b^2} \\ y = \frac{a^3}{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow K(\frac{a^2b}{a^2+b^2}; \frac{a^3}{a^2+b^2}) \Rightarrow M(\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}; \frac{a^3}{2(a^2+b^2)})$$

M – середина AK

Найдем угловые коэффициенты прямых BM и MN по формуле: $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$k_{MN} = \frac{ab}{a^2+2b^2}$ $k_{BM} = \frac{-a^2-2b^2}{ab}$ $k_{MN} \cdot k_{BM} = -1$ $BM \perp MN$

Задача №2

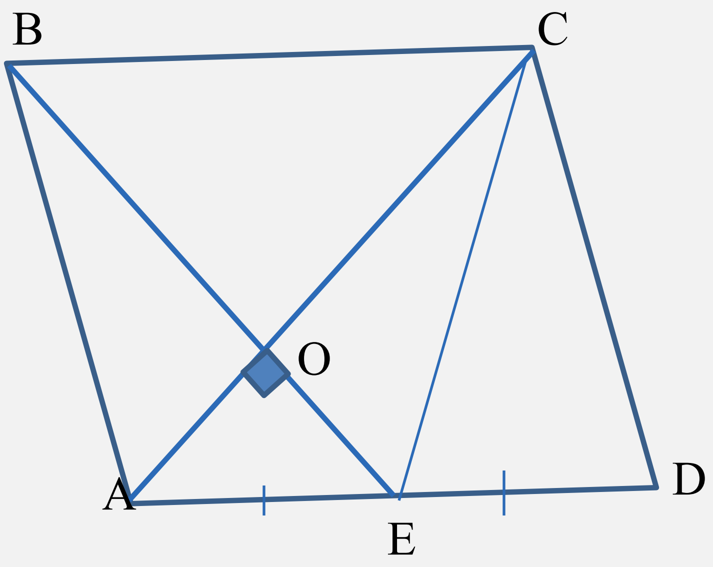
Точка E – середина стороны AD параллелограмма ABCD, прямые BE и AC взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O.

a) Докажите, что площади треугольников AOB и COE равны.

b) Найдите площадь параллелограмма ABCD, если AB = 3, BC = 4.

Решение.

a) .



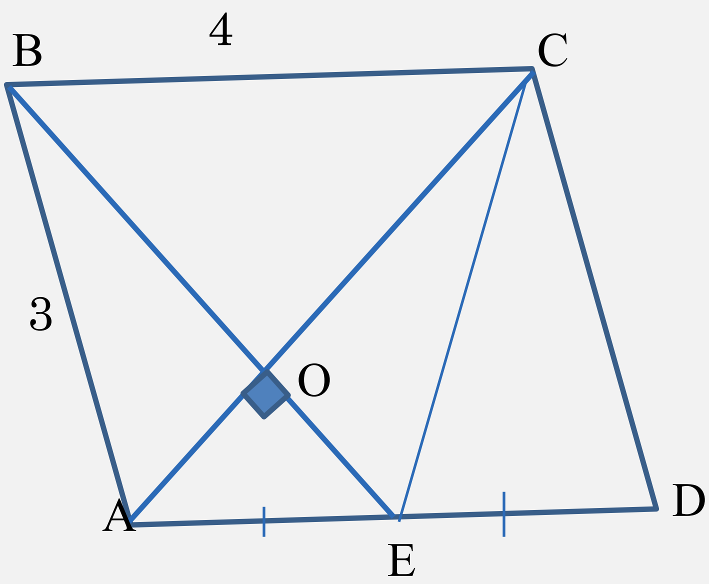
$S_{ABE} = S_{ACE}$

(у треугольников равны высоты, проведенные к общей стороне AE)

Вычитая из равных площадей S_{ABE}, S_{ACE} площадь треугольника AOE, приходим к тому, ч$S_{AOB} = S_{COE}$

Найдите площадь параллелограмма ABCD, если AB = 3, BC = 4.

b).



1) Пусть $OE = x$

ΔAOE: $\angle O = 90^0$, $AE = 2$.

$$AO = \sqrt{AE^2 - OE^2} = \sqrt{2^2 - x^2}$$

ΔABO: $AB = 3$, $AO = \sqrt{4 - x^2}$

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 + 5}$$

$\Delta BOC \sim \Delta EOA, k = 2$ $\qquad \frac{OB}{OE} = 2$

$$\frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = 2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}} \qquad BE = BO + OE = 3\sqrt{\frac{5}{3}}$$

ΔABE: $BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot cosA$

$$15 = 9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{6}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - cos^2 A} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot sinA = 2\sqrt{35}$$

Ответ: $2\sqrt{35}$

Задача 3

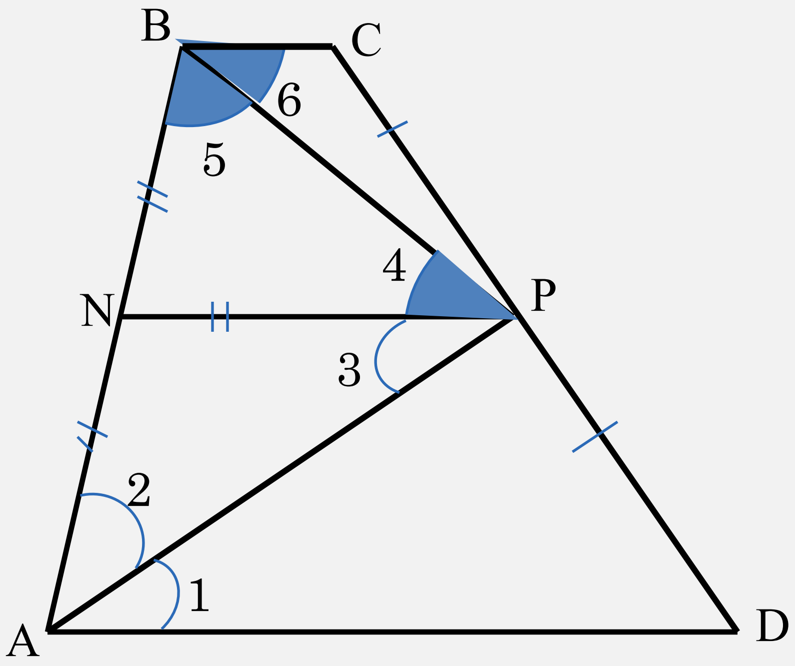
В трапеции ABCD BC и AD – основания. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в ее середине – точке P.

a) Докажите, что BP - биссектриса угла ABC.

b) Найдите площадь трапеции ABCD, если известно, что AP = 8, BP=6.

Решение.

а)



Пусть N – середина AB, $NP \parallel AD \parallel BC$

$\angle 1 = \angle 3$(накрест лежащие)

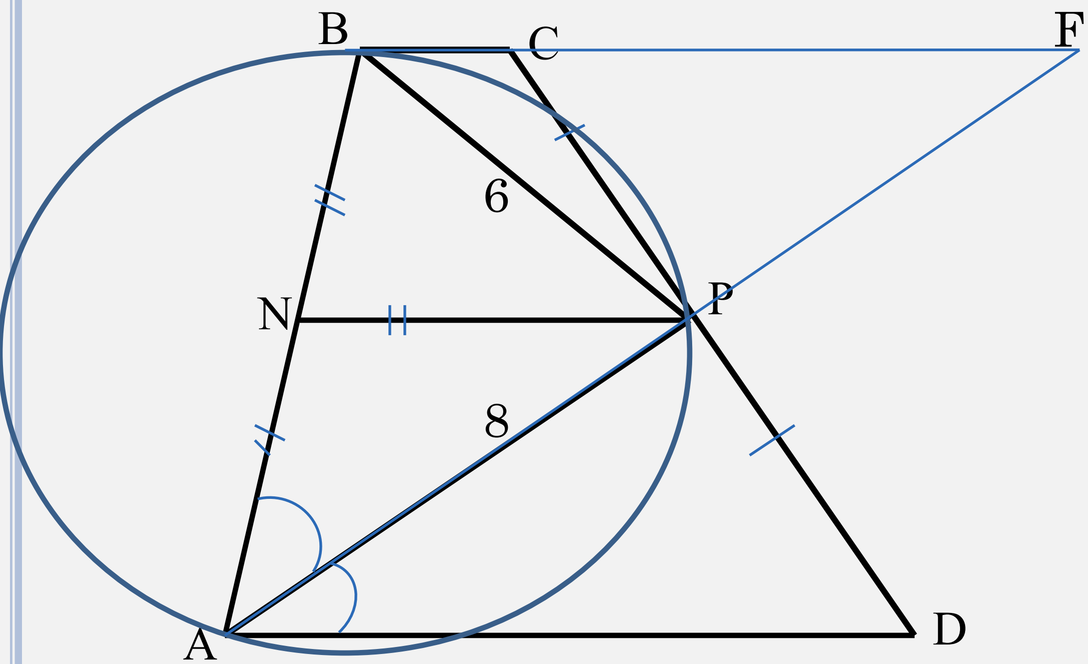
С учетом условия $\angle 1 = \angle 2$, получаем:
$\angle 2 = \angle 3$, то есть ΔANP – равнобедренный.

ΔNPB – равнобедренный, $\angle 4 = \angle 5$

$\angle 4 = \angle 6$ (накрест лежащие)

Значит, $\angle 5 = \angle 6 \Rightarrow$ BP - биссектриса

b) Найдите площадь трапеции ABCD, если известно, что AP = 8, BP=6.



BN =NA=NP

N – центр окружности, описанной около ΔABP.

AB - диаметр окружности ⇒∠APB - прямой

AP∩ BC = F

Δ CFP = Δ DAP (по II признаку)

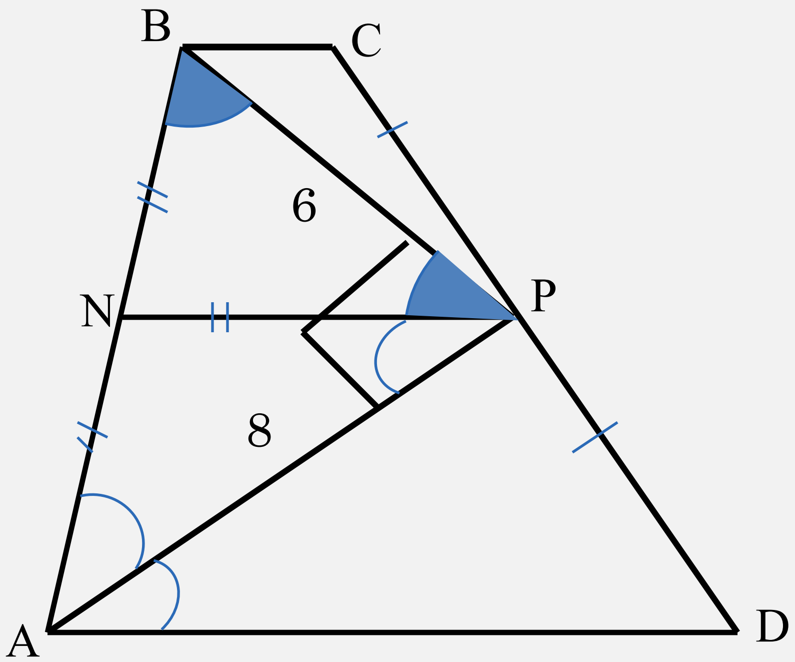
$$S_{ABCD} = S_{APB} + S_{BFP}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABF}$$

ΔABP =ΔFBP (по двум катетам)

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 48$$

Ответ: 48


B
C
6
N
P
8
A
D

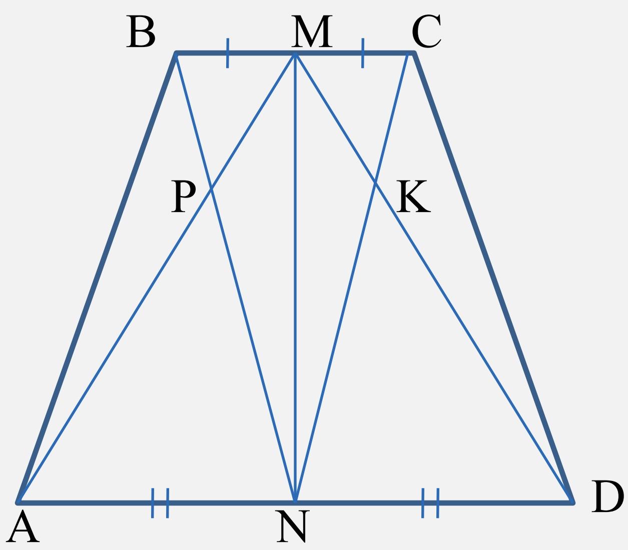
Задача №4

В равнобедренной трапеции ABCD точки M и N- середины оснований BC и AD соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN пересекаются в точке K.

a) Докажите, что площадь четырехугольника PMKN равна сумме площадей треугольников ABP и DCK.

b) Найдите площадь четырехугольника PMKN, если известно, что BC = 8, AD = 18, AB=CD=13.

Решение.



a) $S_{ABM} = S_{BMN}$

(у треугольников равны высоты, проведенные к общей стороне BM)

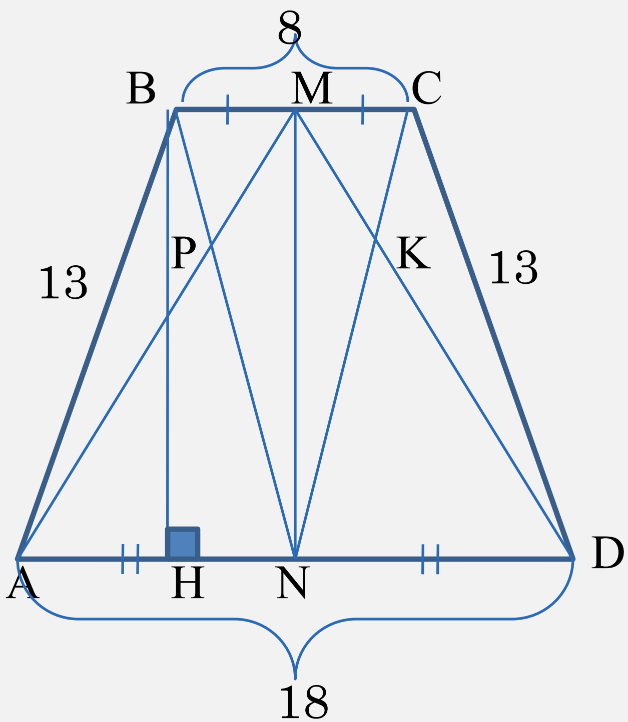
Вычитая из равных площадей S_{BPM}

приходим к тому, что $S_{ABP} = S_{MNP}$

Аналогично доказываем, что $S_{DCK} = S_{MNK}$

$$S_{PMKN} = S_{MNK} + S_{MNP} = S_{ABP} + S_{DCK}$$

b) Найдите площадь четырехугольника PMKN, если известно, что BC = 8, AD = 18, AB=CD=13.



$\Delta BPM \sim \Delta NPA$

$$\frac{PM}{PA} = \frac{BM}{NA} = \frac{4}{9} \qquad \frac{PM}{AM} = \frac{4}{13}$$

$\Delta PMK \sim \Delta AMD$

$$\frac{PK}{AD} = \frac{PM}{AM} = \frac{4}{13}$$

$$PK = \frac{4}{13}AD = \frac{4}{13} \cdot 18 = \frac{72}{13}$$

$$AH = \frac{18-8}{2} = 5 \qquad BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$BH = MN = 12$$

$$S_{PMKN} = \frac{1}{2}MN \cdot PK = \frac{432}{13}$$

Ответ: $\frac{432}{13}$

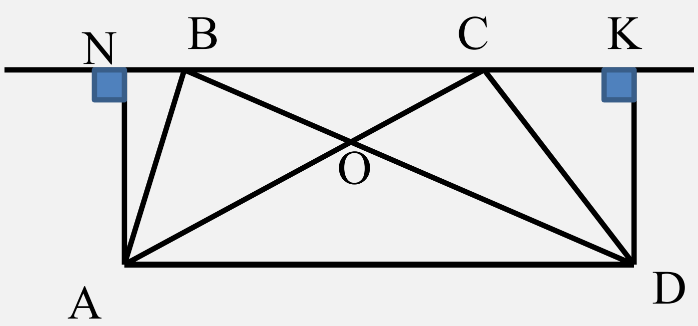
Задача №5.

В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны.

a) Докажите, что точки A и D одинаково удалены от прямой BC.
b) Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что AB=13, BC = 10, CD=15, DA = 24.

Решение.

a)



Опустим перпендикуляры из точек A, D на прямую BC: $AN \perp BC$, $DK \perp BC$

Надо доказать, что AN=DK.

Рассмотрим ΔABC и ΔBCD

Δ ABC можно разбить на два треугольника: Δ AOB и ΔBOC

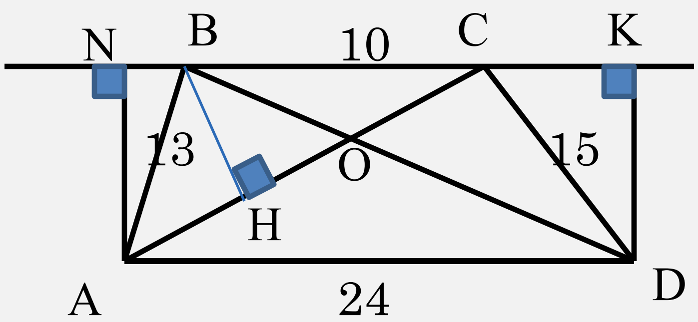
Δ BCD можно разбить на два треугольника: Δ COD и ΔBOC

По свойству площадей: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} = S_{COD} + S_{BOC} = S_{BCD}$

$S_{AOB} = S_{COD}$ (по условию)

$$S_{ABC} = S_{BCD} = \frac{BC \cdot AN}{2} = \frac{BC \cdot DK}{2} \Rightarrow AN = DK$$

b) Найдите S∆AOB, если известно, что AB=13, BC = 10, CD=15, DA = 24.



ANKD - прямоугольник

ABCD - трапеция

Пусть NB = x, NK=AD = 24, тогда

CK = NK-NB-BC = 14-x

∆ANB: $AN^2 = AB^2 - NB^2 = 169 - x^2$

∆DKC: $DK^2 = CD^2 - CK^2 = 225 - (14 - x)^2$

Так как AN =DK, то приравняем правые части: $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2, x = 5$

AN = 12. $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$

$\Delta BOC \sim \Delta AOD \Rightarrow \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{5}{12}$

Проведем BH⊥AC. ∆AOB и ∆BOC имеют одинаковую высоту ⇒ $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{OC}{AO} = \frac{5}{12}$

Пусть $S_{BOC} = 5y, y > 0, S_{AOB} = 12y$

$S_{BOC} + S_{AOB} = S_{ABC}$ $12y + 5y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{17}$ $S_{AOB} = 12 \cdot \frac{60}{17} = \frac{720}{17}$.

Ответ: $\frac{720}{17}$.

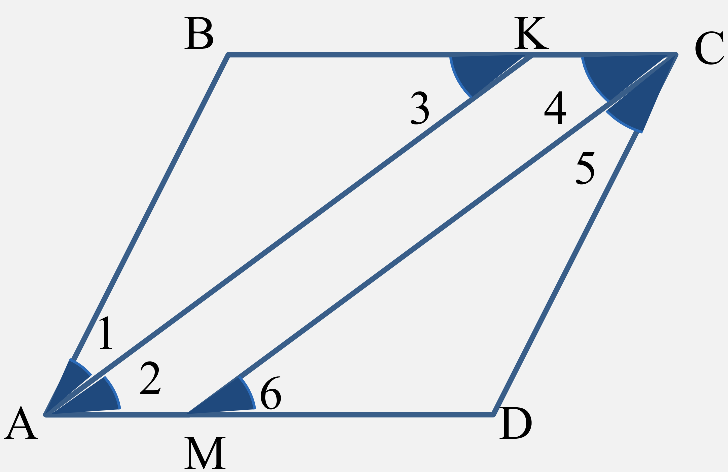
Задача №6

В четырехугольнике ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M, а биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Известно, что AKCM – параллелограмм.

a) Докажите, что ABCD – параллелограмм.
b) Найдите площадь четырехугольника ABCD, если BK = 3, AM = 2, а угол между диагоналями AC и BD равен 60^0.

Решение.

а)



По условию ∠1=∠2, ∠4=∠5

AKCM – параллелограмм , BC ‖ AD,
∠2=∠4 (противоположные углы),
∠3=∠4 (соответственные углы при параллельных прямых AK, CM.

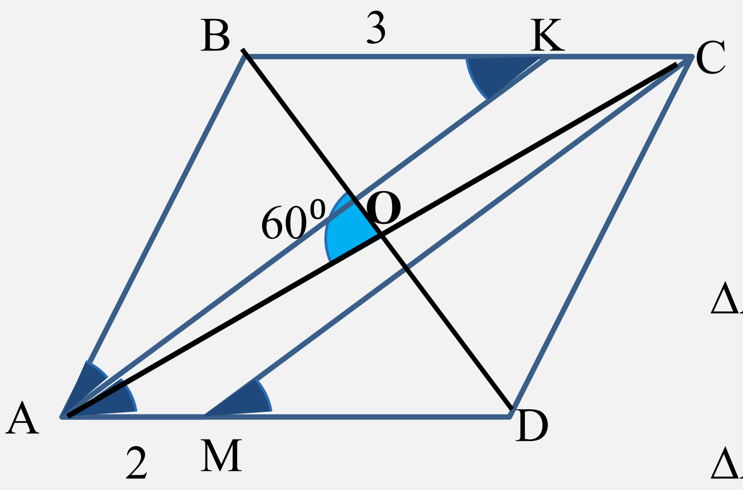
∠1=∠2=∠3=∠4=∠5=∠6.

KC = AM, AK=CM

ΔABK = ΔCDM (по второму признаку)⇒BK = MD.

Итак, AD=BC, AD‖BC (∠2=∠3), а значит, ABCD – параллелограмм (по признаку параллелограмма)

b) Найдите площадь четырехугольника ABCD, если BK = 3, AM = 2, а угол между диагоналями AC и BD равен 60 ^{0}.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot sinO$$

BK = AB =3, AM=KC=2, AD =5

ΔABO: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 60^0$

$$9 = AO^2 + BO^2 - AO \cdot BO \quad (1)$$

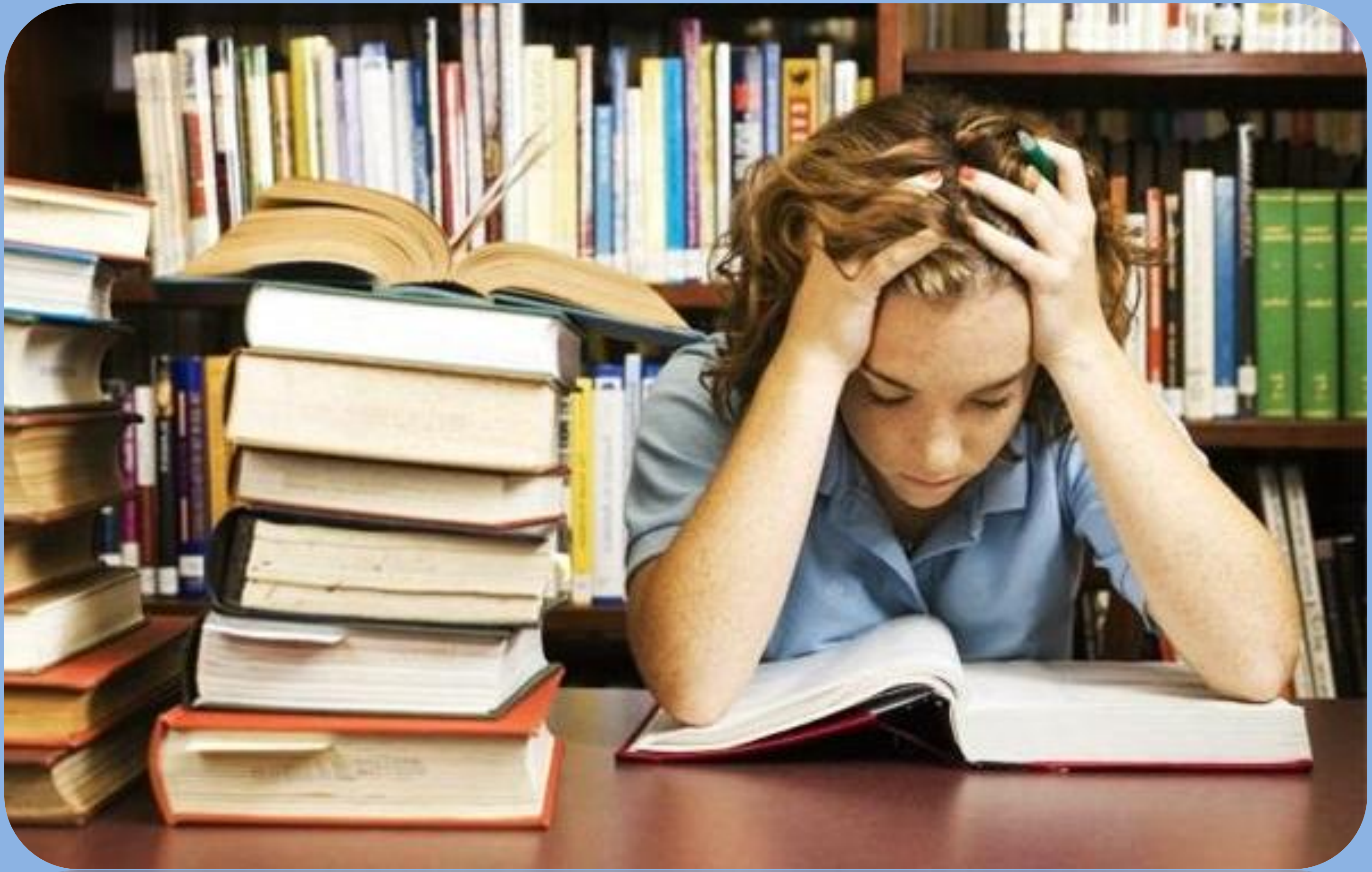
ΔADO: $AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cos 120^0$

$$25 = AO^2 + OD^2 + AO \cdot OD \quad (2)$$

(2) – (1): $16 = 2(AO \cdot OB)$ $\Rightarrow 32 = AC \cdot BD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot sinO = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \sin 60^0 = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Ответ: $8\sqrt{3}.$



Спасибо за сотрудничество!