* 11.10

Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

Домашнее задание:

- П. 46-47,
- №441 (в-з)

*Устная работа

1. Дано: A(-3;-2;4), B(-4;3;2).
   Найти: │AB│.

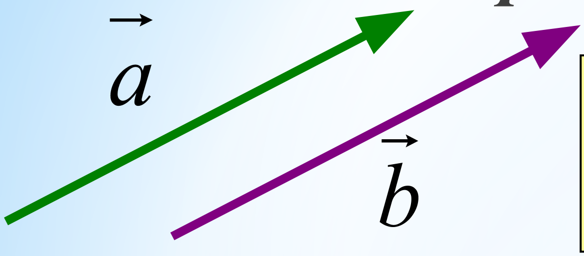
2. Дано: A(2;-3;1), B(4;-5;0), C (5;0;-4), D(7;-2;-3).
Равны ли векторы AB и CD?

3. Коллинеарны ли векторы

AB и CD, если A(1;-3;4),
B(5;1;-2), C(2;0;14), D(4;-2;2)?

*Повторение:

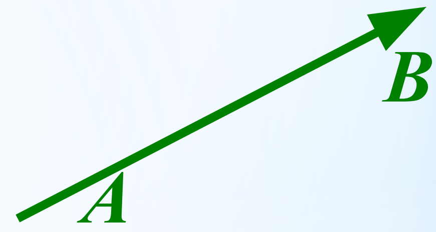
Какие векторы называются равными?



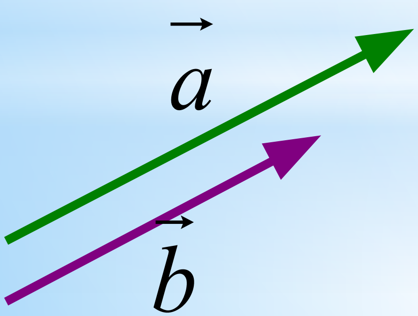
$$\vec{a}=\vec{b},\ \text{если}\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|;\ \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$$

- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$



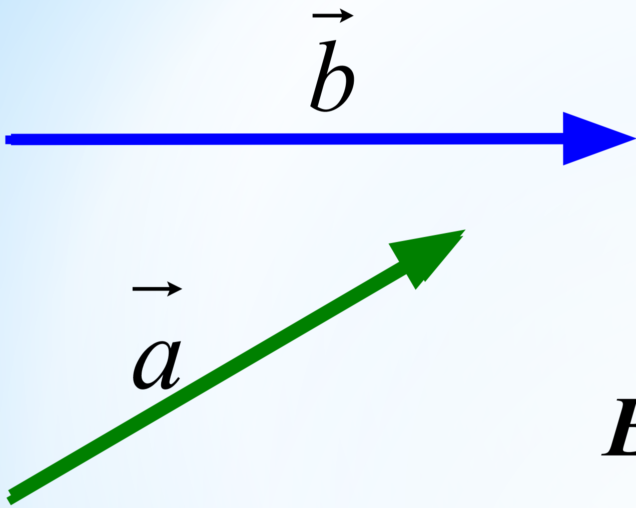
- ***Какие векторы называются коллинеарными?***



$$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\quad \textbf{или}\quad \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$$

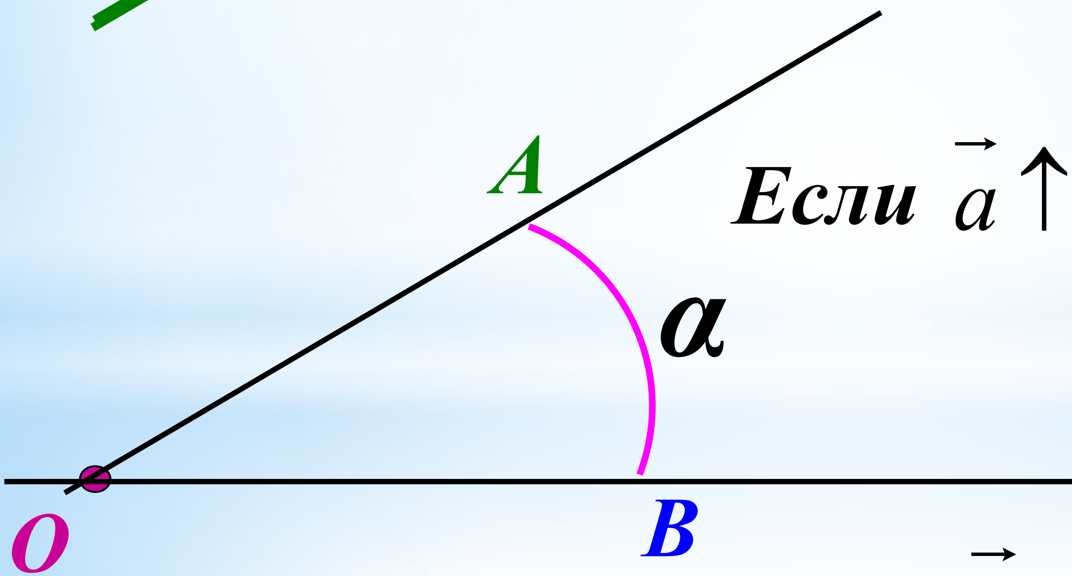
$$\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}\qquad \begin{cases} x_1=\lambda\cdot x_2\\ y_1=\lambda\cdot y_2\\ z_1=\lambda\cdot z_2\end{cases}$$

*Угол между векторами.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \alpha$$

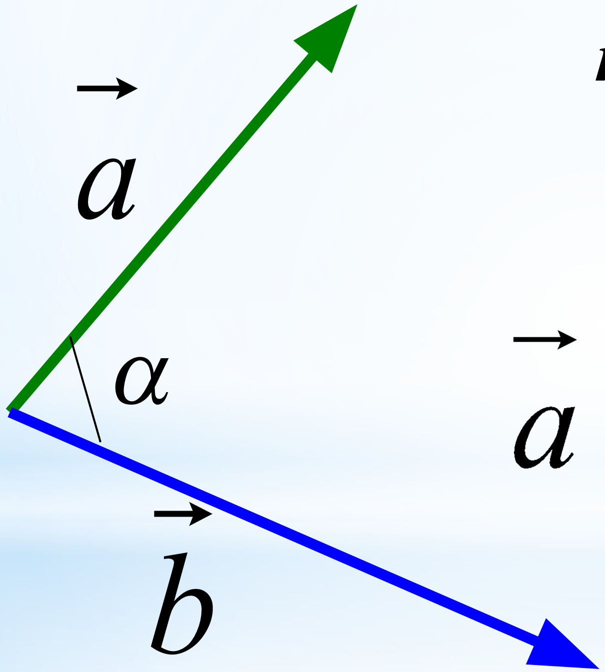


Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 0^0$

Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 180^0$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 90^0$

*Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

*

Вспомним планиметрию…

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$***, то*** $\cos 90^0=0\Rightarrow\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$***, то*** $\cos 180^0=-1\Rightarrow\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

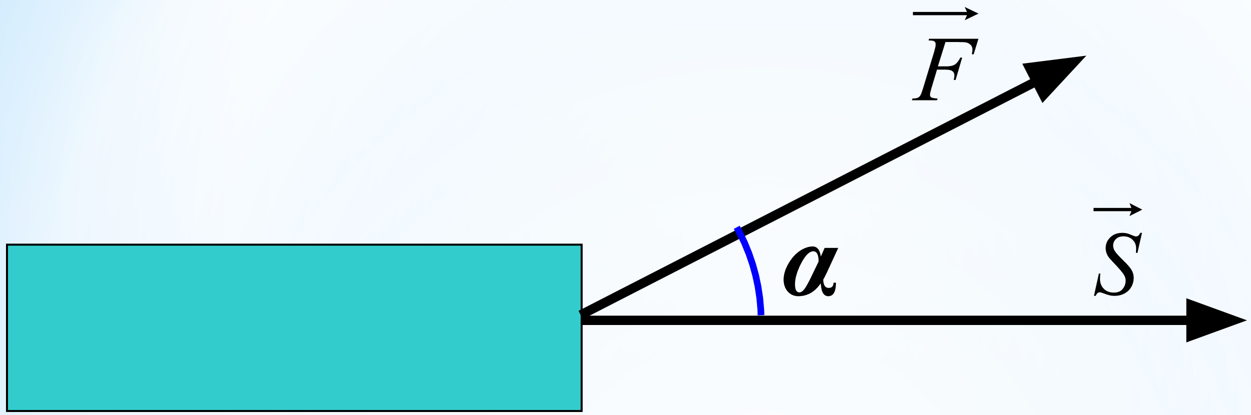
Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$***, то*** $\cos 0^0=1\Rightarrow\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Если $\vec{a}=\vec{b}$***, то*** $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2=\vec{a}^2}$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

*Пример применения скалярного произведение векторов в физике.



Если $\left(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}}\right) = \alpha$, ***то***

$$A = \underbrace{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha}_{}$$

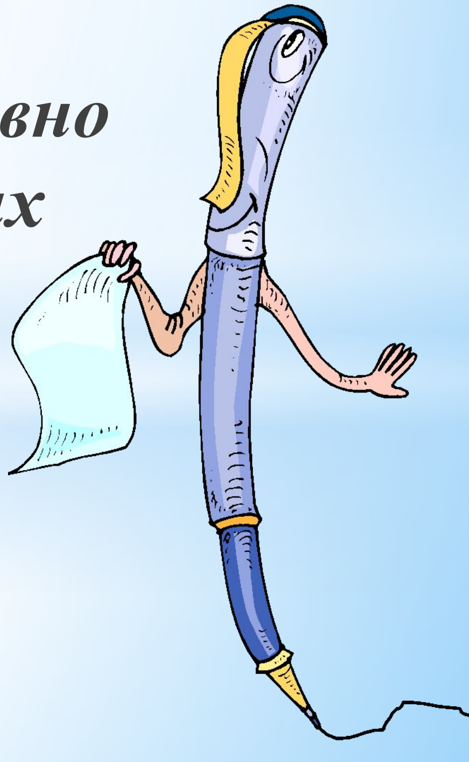
Скалярное произведение векторов.

* Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.



$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

*Решение задач.

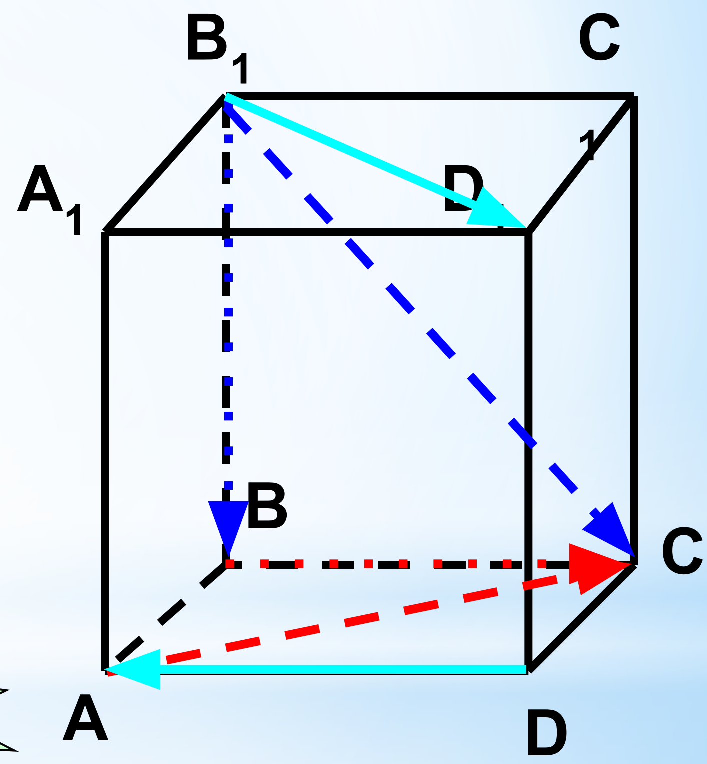
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ 45^0

б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ 45^0

в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$ 135^0



*№ 443 (г)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

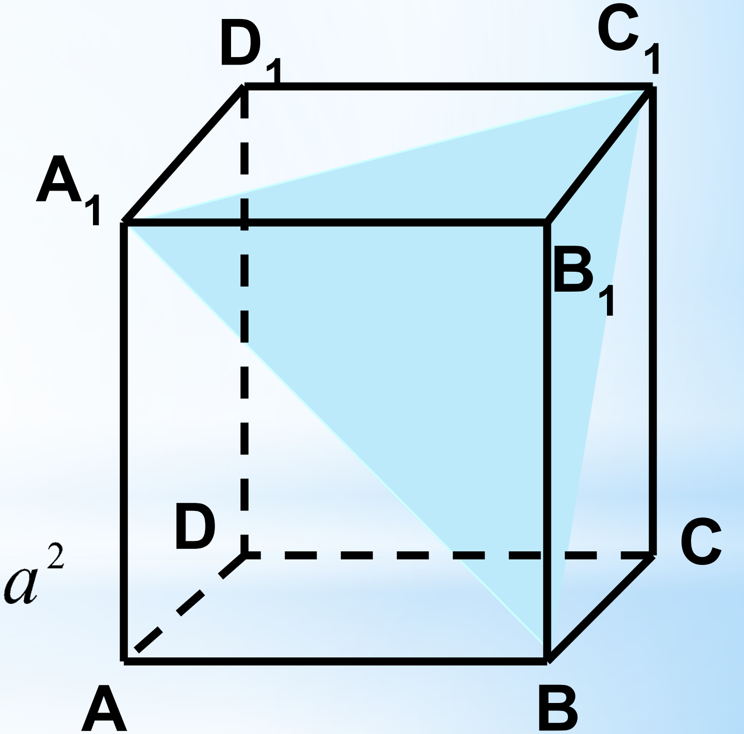
1 способ:

ΔBA_1C_1 – правильный

$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{BA_1} \hat{\ } \overrightarrow{BC_1}\right) = 60^0$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^0 = a^2$



Ответ: a^2

*№ 443 (г)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

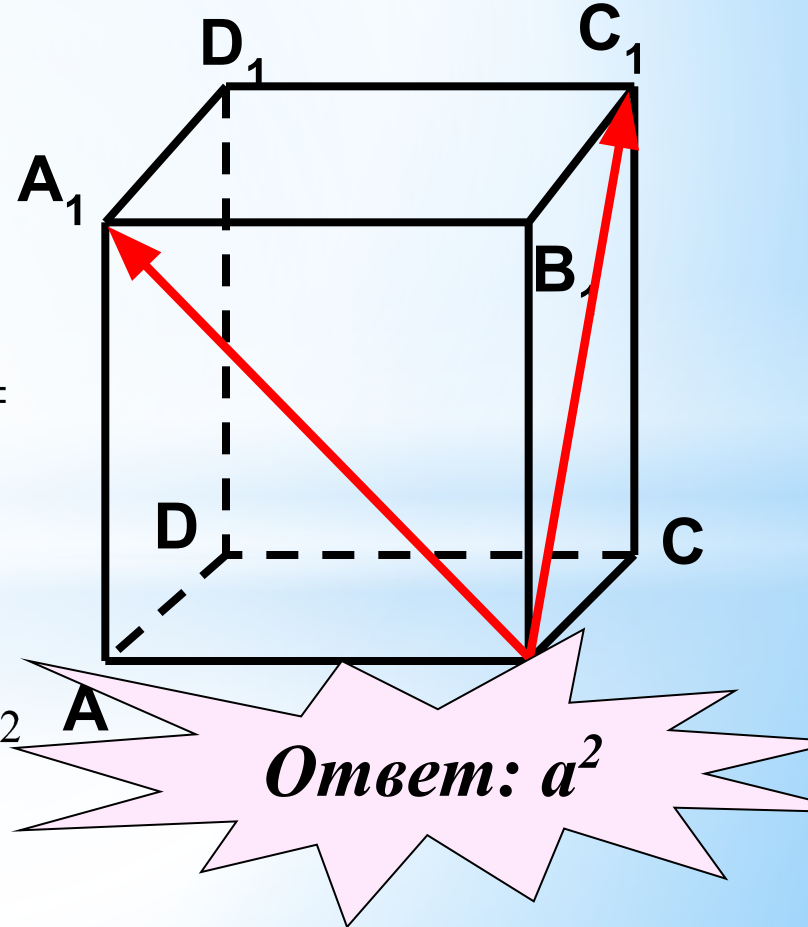
Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

2 способ:

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$
$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} - ?}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}\right) =$$
$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$
$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$
$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^0 = a^2$$



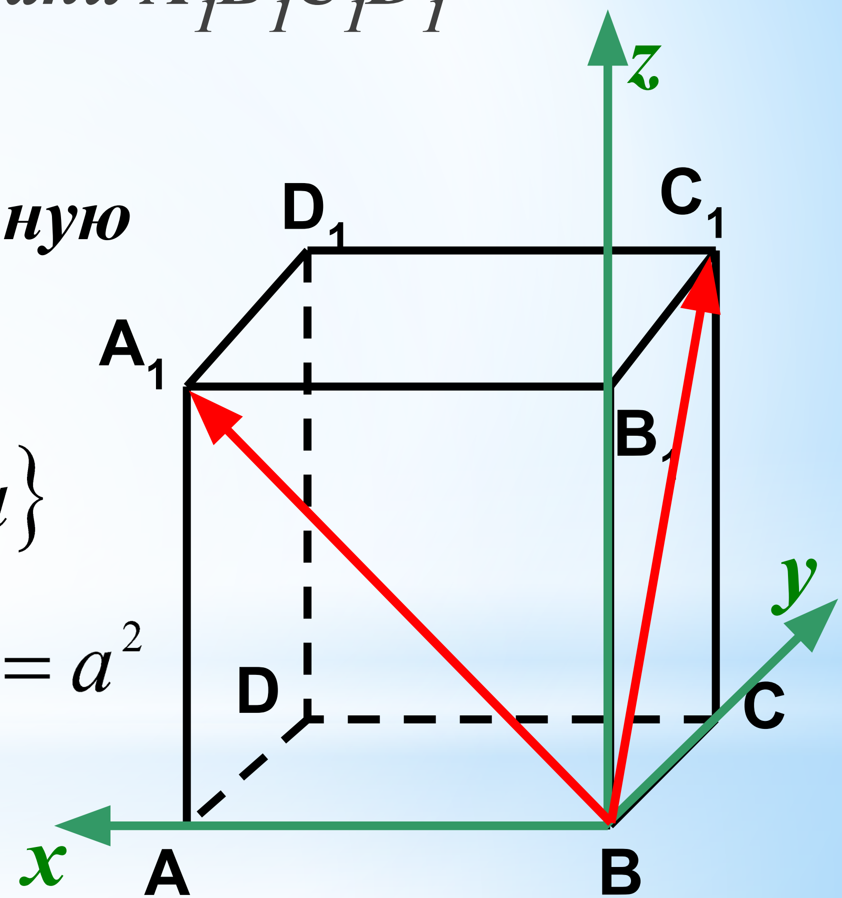
№ 443 (г)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

3 способ: **Введем прямоугольную систему координат.**



$\overrightarrow{BA_1}\{a;0;a\}$ $\overrightarrow{BC_1}\{0;a;a\}$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$

Ответ: a^2

Решаем по рядам:

*№ 443

1 – а) a^2

2 – б) $-2a^2$

3 – в) 0

Дополнительная задача:

Вычислите угол между вектором a и координатным вектором i.

$$\vec{a}\{2;1;2\}$$