Инверсия

Выполнил: Патрина В. А.,
учитель математики
Средней общеобразовательной школы № 50 ОАО «РЖД»

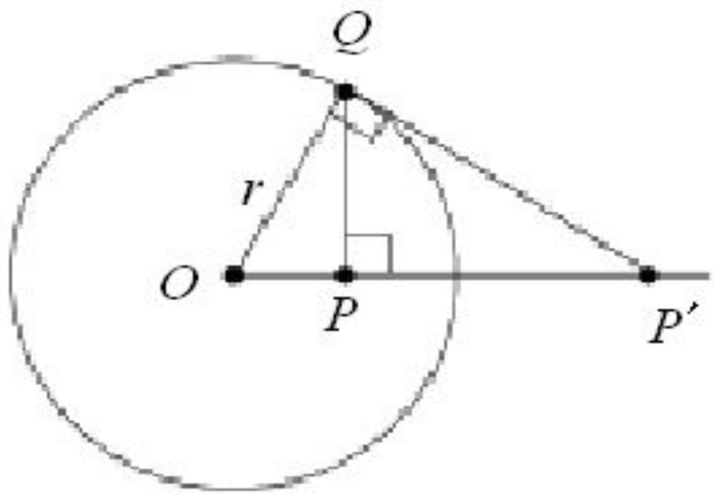
Цели:

- Выяснить что такое инверсия;
- Увидеть как она применяется при решении задач на построение;
- Как выполнить такое построение;
- Дать определение инверсии, её свойств;
- Рассмотреть построения с помощью инверсии.

Инверсия

-(относительно данной окружности) точечное преобразование плоскости самой в себя, при котором каждой точке ставится в соответствие точка ′, лежащая на луче и удовлетворяющая условию

$|OP| \cdot |OP'| = r^2$,



Свойства инверсии

- Внутренние точки окружности инверсии преобразуются во внешние и наоборот (поэтому говорят также о зеркальном отображении относительно окружности); точки самой окружности инверсии остаются неподвижными, то есть преобразуются сами в себя.
- Преобразование, обратное для данной инверсии, есть также инверсия, то есть если точка P переходит при инверсии в точку P', то одновременно, обратно, точка P' переходит в точку P.

Свойства инверсии

- а) Окружности, не проходящие через *O*, преобразуются в окружности, не проходящие через *O*.

  б) Окружности, проходящие через *O*, преобразуются в прямые, не проходящие через *O*.

  в) Прямые, не проходящие через *O*, преобразуются в окружности, проходящие через *O*; прямые, проходящие через *O*, преобразуются сами в себя.

Свойства инверсии

- Прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии, причём касательная к этой окружности в центре инверсии параллельна данной прямой.
- Прямые, параллельные и не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности, касающиеся друг друга в центре инверсии и обратно.
- Инверсия есть конформное преобразование, то есть при инверсии угол между двумя кривыми в точке их пересечения сохраняется.
- При этом, если углы рассматривать как ориентированные, то ориентация углов при применении инверсии изменяется на противоположную.

Свойства инверсии

- Как бы ни были расположены в плоскости две произвольные окружности, или окружность и прямая, или две параллельные прямые, всегда можно их преобразовать друг в друга при помощи инверсии, если к инверсии причислить его предельный случай – симметрию относительно прямой.
- 8. Всякую окружность (или прямую) можно при помощи инверсии преобразовать саму в себя так, чтобы две фиксированные точки этой окружности (или прямой) переходили друг в друга.
- При инверсии плоскость, проходящая через центр инверсии (без центра инверсии), преобразуется в себя.

Свойства инверсии

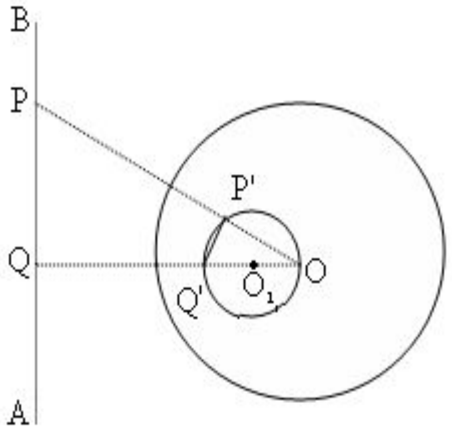
- а) Ортогональные траектории эллиптического пучка окружностей, пересекающихся попарно в точках *A* и *B*, образуют гиперболический пучок окружностей, имеющий точки *A* и *B* предельными точками и прямую *AB* линией центров.

  б) Ортогональные траектории параболического пучка окружностей образуют также параболический пучок окружностей с тем же центром пучка и с линией центров, перпендикулярной к линии центров данного пучка.

  в) Ортогональные траектории гиперболического пучка окружностей с предельными точками *A* и *B* образуют эллиптический пучок окружностей, попарно пересекающихся в точках *A* и *B*.

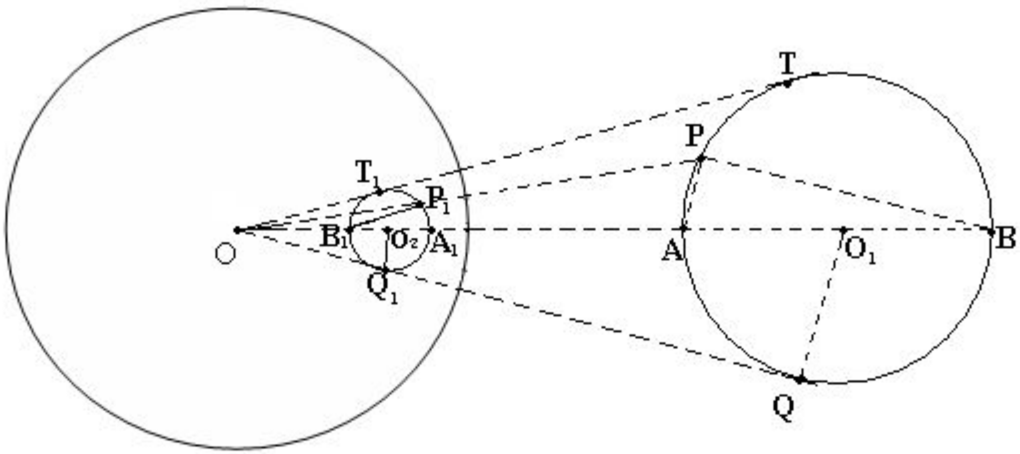
Теоремы инверсии

- Теорема 1. Если две кривые пересекаются в точке *P*, то инверсные им кривые пересекаются в точке *P1*, инверсной точке *P*.
- Теорема 2. Прямая, проходящая через центр инверсии *O*, сама себе инверсна.
- Теорема 3 . Кривая, инверсна данной прямой , не проходящей через центр инверсии, есть окружность, проходящая через центр инверсии , причем всегда .



Свойства инверсии

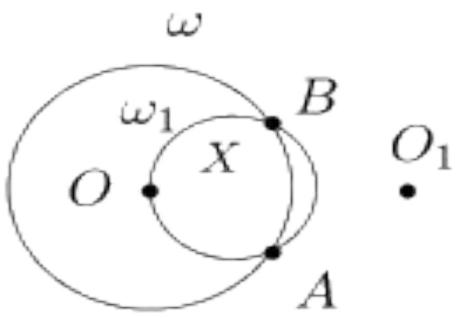
- Теорема 4 . Кривая, инверсна данной окружности (O1; R), не проходящей через центр инверсии, есть так же окружность. Центр инверсии является при этом центром подобия этих окружностей.

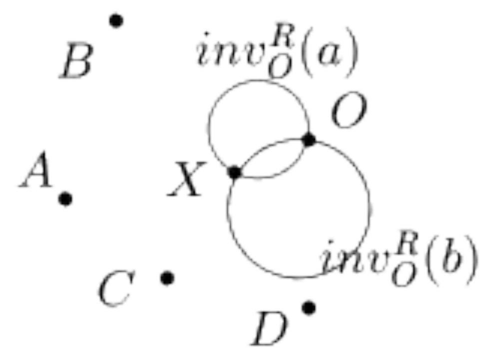


Практическое применение инверсии

- **Теорема Мора-Маскерони.**

Все построения, выполненные с помощь циркуля и линейки, могут быть проделаны только с помощью циркуля (при этом мы считаем прямую построенной, если найдены хотя бы две точки этой прямой).



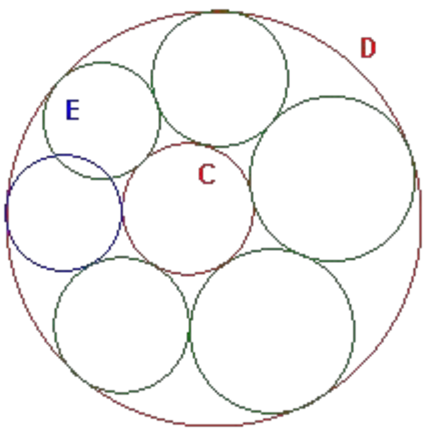


Практическое применение инверсии

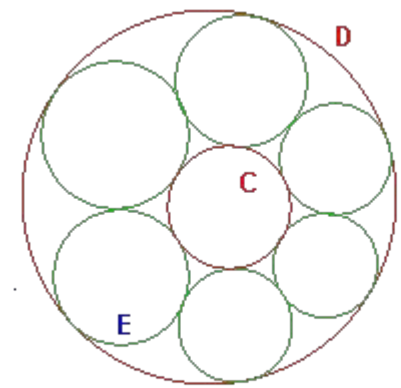
- **Применение при решении задач вычислительной геометрии**

Цепочки Штейнера

Случай пересечения



Случай касания



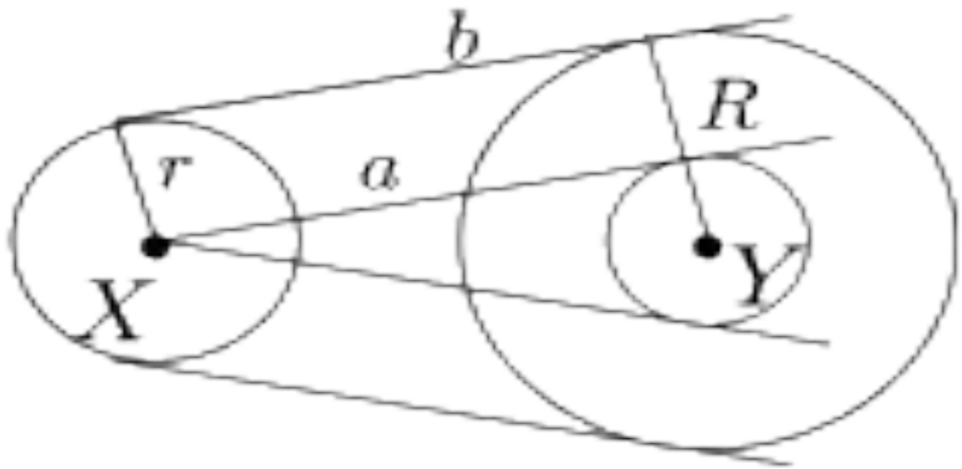
Практическое применение инверсии

С этой цепочкой связано так называемое **утверждение Штейнера** (Steiner's porism): если существует хотя бы одна цепочка Штейнера (т.е. существует соответствующее положение стартовой касающейся окружности, приводящее к цепочке Штейнера), то при любом другом выборе стартовой касающейся окружности также будет получаться цепочка Штейнера, причём число окружностей в ней будет таким же.

Практическое применение инверсии

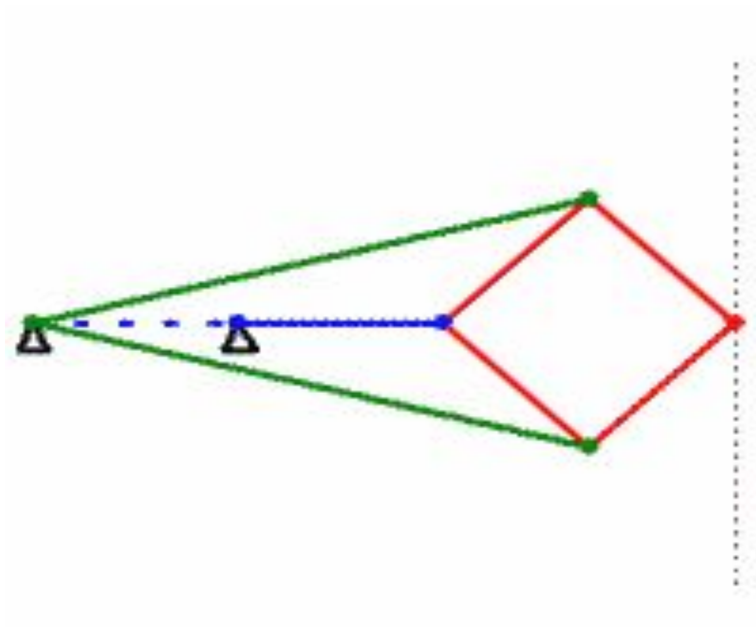
Задача Аполлония

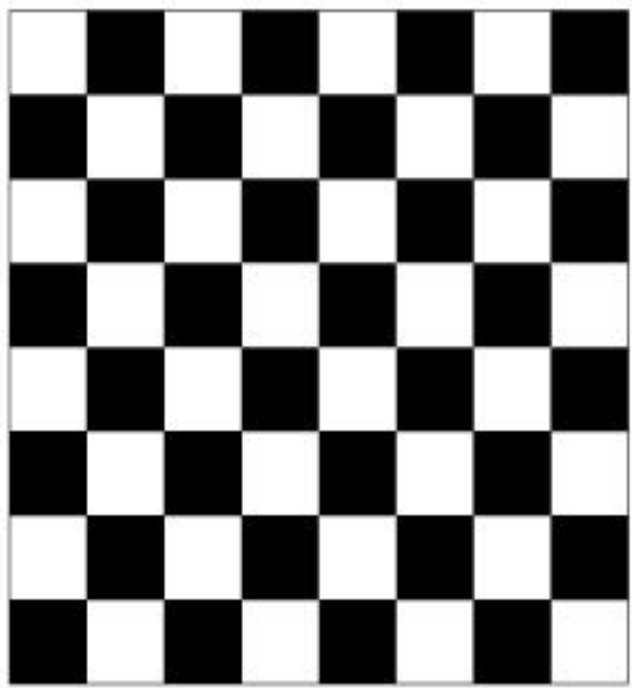
Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

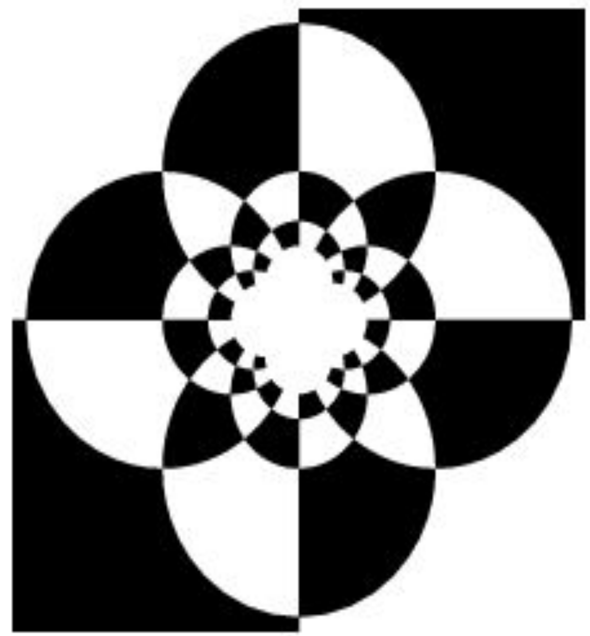


Практическое применение инверсии

Применение в технике: прямило Липкина-Поселье







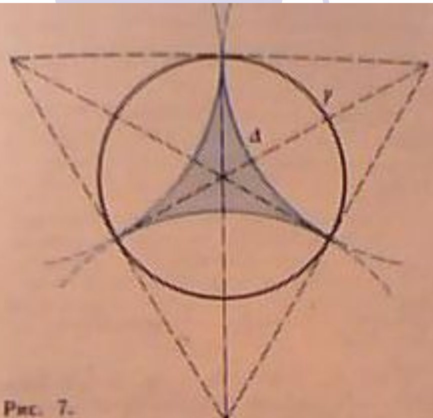


Рис. 7.

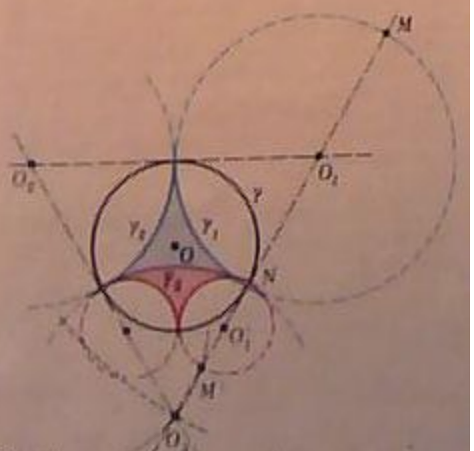


Рис. 8. а)

Спасибо за внимание!