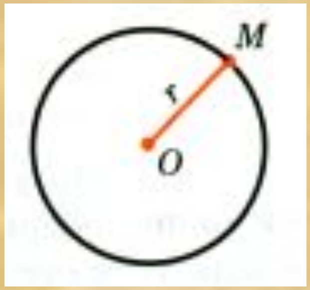
Окружности в задачах

Выполнила: Шишкина Полина.

Итак, что же такое окружность?

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки – центра окружности.



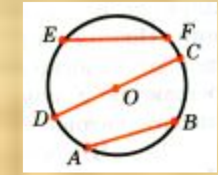
Содержание

- История окружности
- Основные определения
- Некоторые теоремы
- Метрические соотношения в окружности

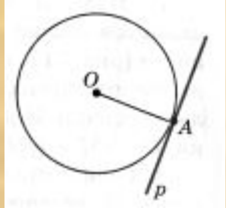
- Окружность - одна из древнейших геометрических фигур.
- Согласно Аристотелю, небесная материя, из которой состоят планеты и звезды, как самая совершенная, должна двигаться по самой совершенной линии – окружности.
- Ещё вавилоняне и древние индийцы считали самым важным элементом окружности *радиус*. Слово это – латинское и означает «луч».
- Термин «радиус» впервые встречается в «Геометрии» Рамуса, затем у Ф. Виета. Термин «радиус» становится общепринятым в конце XVII в.

- Уже в латинской рукописи XI в. «Искусство геометрии» Боэция встречается термин «полудиаметр». Его употребляли также Фибоначчи и Неморарий (XIII в.), Региомонтан (XV в.) и Тарталья (XVI в.).
- Термин «хорда» (от греческого «хорде» - струна) был введен в современном смысле европейскими учеными XII – XIII вв.
- Тот факт, что диаметр делит круг и окружность на две равные части, был известен ещё в древности задолго до Фалеса Милетского.
- Теоремы о зависимости между хордами и расстоянием их от центра изложены в III книге «Начал» Евклида.

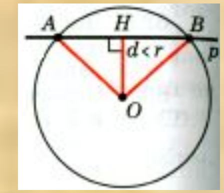
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее *хордой* (AB). Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* (d).



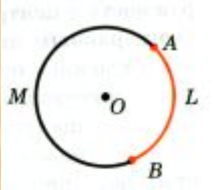
Прямая, проведенная из точки, расположенной вне окружности, и имеющая только одну, общую с окружностью точку, называется *касательной* к этой окружности.



Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется *секущей*.

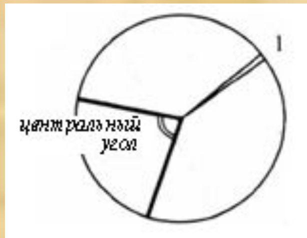


Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой окружности* (АВ).



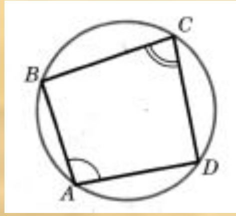
Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*.

Центральный угол – угол, вершина которого лежит в центре окружности. Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги (выраженной в радианах или градусах).

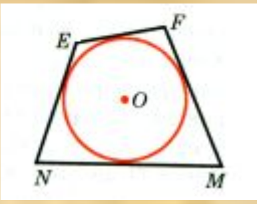


Вписанный угол – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Окружность, пересекающая вершины многоугольника, называется *описанной окружностью* этого многоугольника.

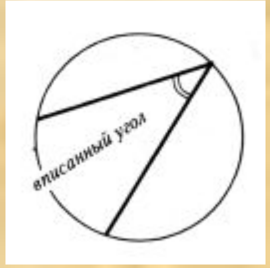


Окружность, касающаяся сторон многоугольника, называется *вписанной окружностью* этого многоугольника.



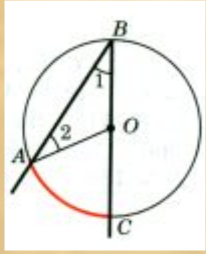
Теорема 1

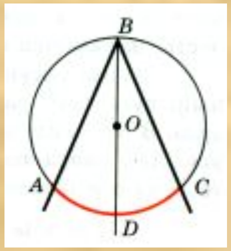
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

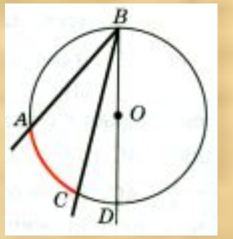


Доказательство

Рассмотрим три возможных случая расположения луча ВО относительно угла АВС.

1) 

2) 

3) 

1. Луч ВО совпадает с одной из сторон угла АВС, например, со стороной ВС.

$\angle$AOC – внешний для равнобедренного треугольника АВО, $\angle$ 1 и $\angle$ 2 при основании равнобедренного треугольника равны, значит

$\angle$ AOC = $\angle$1+$\angle$2 = 2$\angle$1.

Следовательно,

2$\angle$1 = дуге AC или $\angle$ABC = $\angle$1 = половине дуги AC.

2. Луч ВО делит угол АВС на два угла.

Луч ВО пересекает дугу АС в некоторой точке D. Точка D разделяет дугу АС на две дуги: АD и DC. По доказанному в п.1

$\angle$ABD = половине дуги AD и $\angle$DBC = половине дуги DC.

Складывая попарно, получаем:

$\angle$ABD + $\angle$DBC = половине дуги AD +половина дуги DC,

или$\angle$ABC = половине дуги AC.

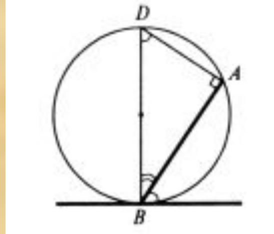
3. Луч ВО не делит угол АВС на два угла и не совпадает со стороной этого угла.

По доказанному в п.1 $\angle$ABD = половине дуги AD. По аналогии $\angle$ CBD = половине дуги CD. Вычтем одно равенство из другого

$\angle$ABD – $\angle$ CBD = половине дуги AD – половина дуги CD,

или $\angle$ABC = половине дуги AC.

Теорема 2
Угол, образованный касательной и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между сторонами этого угла.

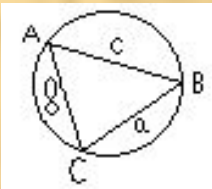


Доказательство
BD перпендикулярен к касательной, угол ABD дополняет до 90˚ угол между хордой AB и касательной. $\angle$BAD прямой. Значит, $\angle$ADB также дополняет до 90˚$\angle$ ABD. Таким образом, рассматриваемый угол равен $\angle$ADB и измеряется половиной указанной дуги.

Теорема 3

Если R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, то выполняются равенства

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$$



Доказательство

Пусть в треугольнике ABC AB = c, BC = a, CA = в. Докажем, что

$$\frac{c}{\sin\angle C} = \frac{в}{\sin\angle B} = \frac{a}{\sin\angle A}$$

По теореме о площади треугольника S = $\frac{1}{2}$ aв sin C, S = $\frac{1}{2}$ вс sin A, S = $\frac{1}{2}$ са sin B.

Из первых двух равенств получаем $\frac{1}{2}$ ав sin C = $\frac{1}{2}$ вс sin A, откуда $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$.

Из второго и из третьего равенств следует $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{в}{\sin\angle B}$.

Итак, $\dfrac{c}{\sin\angle C} = \dfrac{в}{\sin\angle B} = \dfrac{a}{\sin\angle A}$

Теперь докажем, что $\dfrac{BC}{\sin\angle A}$ = 2R, или BC = 2R sin A

Проведем диаметр BA_1 и рассмотрим треугольник A_1BC.

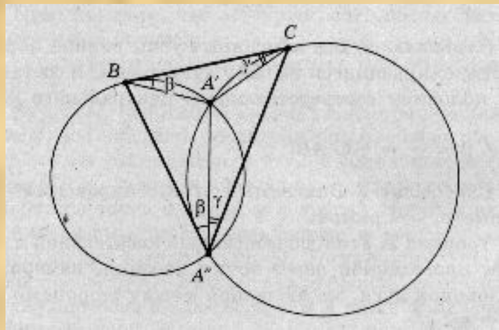
1) Угол С этого треугольника прямой, поэтому $BC = BA_1 \sin A_1$, но $\sin A_1 = \sin A$. Действительно, если точка A_1 лежит на дуге ВС, то $\angle A_1 = \angle A$, значит $\sin A_1 = \sin A$. Следовательно, $BC = BA_1 \sin A$, или BC = 2R sin A.

2) Точки А1 и С совпадают, $\dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{AC}{\sin\angle B}$. Угол В прямой, так как опирается на угол в 90º, значит $\dfrac{BC}{\sin\angle A}$ = AC (sin 90 = 1), а AC = диаметру = 2R.
Следовательно, BC = 2R sin A.

Теперь попробуем решить задачу, используя данную теорему.

Задача

Две окружности радиусов 5 и 7 проходят через вершину А треугольника АВС и касаются стороны ВС в точках В и С соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника АВС.



Решение

Рассмотрим две окружности с радиусами $R_1 = 5$ и $R_2 = 7$ с общей касательной ВС. По условию окружности имеют общую точку А. Тогда либо они касаются, и тогда треугольник АВС определен однозначно, либо пересекаются в двух точках А′ и А″.

Покажем, что во втором случае радиусы окружностей, описанных около треугольников А′ВС и А″ВС равны.

Пусть R′ и R″ - соответственно их радиусы, угол А′ВС = β, угол А′СВ = γ.

Рассмотрим треугольник А′ВС. Получаем,

$\angle$ ВА′С = 180º - β - γ ,

$$\frac{A^1B}{\sin\gamma} = \frac{A^1C}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin(180-\beta-\gamma)} = 2R',$$

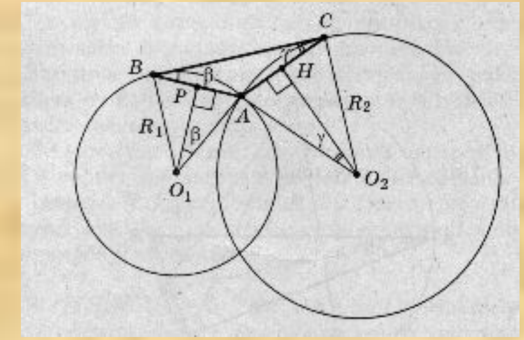
то есть $\dfrac{BC}{\sin(\beta+\gamma)}$ = 2R′.

Рассмотрим треугольник A′′BC. Так как $\angle$ A′BC - угол между хордой A′B и касательной BC, A′A′′B опирается на хорду A′B, то
$\angle$ A′A′′B= $\angle$ A′BC = β .
Аналогично, $\angle$ A′A′′C = $\angle$ A′CB = γ .
Таким образом, $\angle$ BA′′C = β + γ . Из треугольника A′′BC получаем,
$\dfrac{BC}{\sin(\beta+\gamma)}$ = 2R′′.

Следовательно R′ = R′′ = $\dfrac{1}{2}\ \dfrac{BC}{\sin(\beta+\gamma)}$.

Таким образом, для решения задачи достаточно рассмотреть один случай, когда точка A совпадает, например, с точкой A′. Радиус R описанной около треугольника ABC окружности удовлетворяет равенствам

R = $\dfrac{AB}{2\sin\beta}$, R = $\dfrac{AC}{2\sin\gamma}$, то есть R² = $\dfrac{AB}{2\sin\beta}\cdot\dfrac{AC}{2\sin\gamma}$.



Рассмотрим равнобедренный треугольник AO_1B. Центральный угол AO_1B, опирающийся на хорду AB, в два раза больше угла между этой хордой и касательной, то есть $\angle AO_1B = 2\beta$. Проведем высоту O_1P, перпендикулярную AB, которая является также и биссектрисой угла AO_1B. Тогда в прямоугольнике треугольнике O_1BP

$\angle BO_1P = \beta$, $BP = AP = \frac{AB}{2}$,

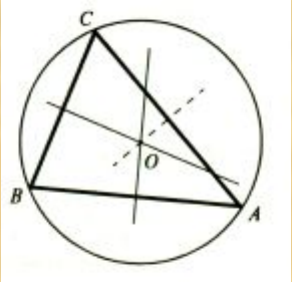
$\sin\beta = \frac{AP}{O_1A} = \frac{AB}{2R_1}$, то есть $\frac{AB}{2\sin\beta} = R_1$, аналогично $\frac{AC}{2\sin\gamma} = R_2$.

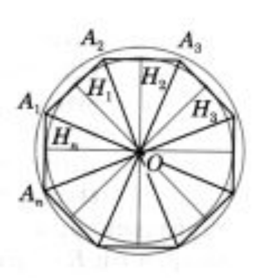
Таким образом, $R^2 = R1 \cdot R2$, $R = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{35}$

Ответ: $\sqrt{35}$.

Теорема 4

Центр описанной около треугольника окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.





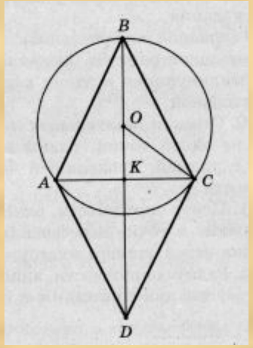
Доказательство

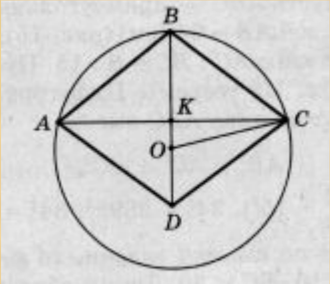
Серединный перпендикуляр к отрезку представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от его концов. Поэтому, если мы проведем два серединных перпендикуляра к сторонам AB и BC треугольника ABC, то точка их пересечения (а они обязательно пересекутся, так как перпендикуляры к не параллельным прямым пересекаются) будет равноудалена от вершин A и B, а также от B и C. Таким образом, получившаяся точка O равноудалена от всех трех вершин треугольника, и окружность с центром в O и радиусом OA проходит через все вершины треугольника и является описанной окружностью. Понятно, что через O проходит и серединный перпендикуляр к AC.

Теперь попробуем решить задачу, используя данную теорему.

Задача

Радиус окружности, проходящей через три вершины ромба, равен $\sqrt{2}$, а длина диагонали ромба, проходящей через центр окружности, равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь ромба.

1) 

2) 

Решение

Пусть O – центр окружности, проходящей через вершины A, B и C ромба ABCD, O принадлежит BD, K – точка пересечения диагоналей ромба ABCD.

В общем случае возможны два варианта:

1) угол ABC – острый, и тогда точка O лежит внутри треугольника ABC, то есть между точками B и K;

2) угол ABC тупой, и тогда точка O лежит вне треугольника ABC, то есть точка K лежит между точками B и O.

Тогда в обоих случаях, так как ABCD – ромб, то его диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам:

BK = KD = $\frac{BD}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

AK = KC = $\frac{AC}{2}$.

OB = OC = $\sqrt{2}$ (радиусы окружности). Так как по условию BK > OB, то возможен только первый случай. Таким образом,

OK = KB – OB = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника OKC получаем

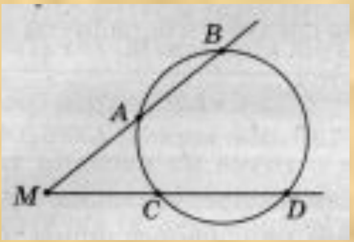
KC² = OC² - OK², KC = $\frac{\sqrt{6}}{2}$, AC = $\sqrt{6}$.

$$S_{ABCD} = \frac{AC*BD}{2} = 3\sqrt{3}.$$

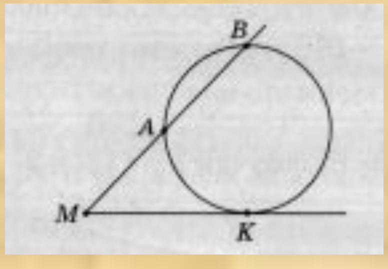
Ответ: $3\sqrt{3}$.

Метрические соотношения в окружности

Теорема 5 (о секущих)
Если через точку M вне окружности провести две секущие, то произведения длин секущих на их внешние части будут равны: MA · MB = MC · MD.
Данную теорему примем без доказательства.



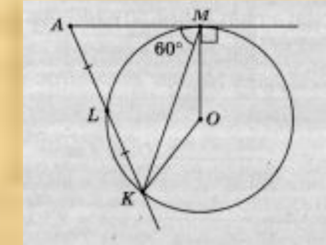
Теорема 6 (о секущей и касательной)
Если через точку M вне окружности провести секущую и касательную, то произведение длины секущей на её внешнюю часть будет равно квадрату длины касательной: $MA \cdot MB = MK^2$.
Данную теорему примем без доказательства.



Решим несколько задач, используя данные теоремы.

Задача 1

Из точки А проведены к окружности радиуса 2 касательная АМ (М – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках К и L. Известно, что L – середина отрезка АК, угол АМК = 60º. Найдите площадь треугольника АМК.



Решение

Заметим, что угол КМО = углу АМО – угол АМК, угол КМО = 90 – 60 = 30º.

Рассмотрим треугольник МОК:

МО = ОК = 2,

Угол ОКМ = углу КМО = 30º, угол МОК = 120º.

По теореме синусов $\dfrac{KO}{\sin 30^\circ} = \dfrac{MK}{\sin 120^\circ}$, откуда получим

МК = $\dfrac{KO\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}$ = 2 $\sqrt{3}$.

Пусть х – длины отрезков AL и LK. По теореме о касательной и секущей AL · LK = AM².

Или x · 2x = AM².

Следовательно, AM = x $\sqrt{2}$

Из теоремы косинусов для треугольника АМК:

$AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2AM \cdot MK \cos 60^\circ$,

$(2x)^2 = (x\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2x\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$,

или

$x^2 + \sqrt{6}\,x - 6 = 0.$

Тогда

$x_1 = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{30}}{2}$, $x_2 = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{30}}{2}$.

По смыслу задачи $x > 0$, $x = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2} \cdot AM = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}$.

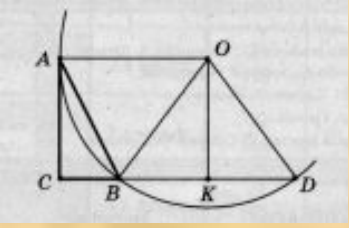
Вычислим теперь площадь треугольника АМК:

$S = \frac{1}{2}\ AM \cdot MK \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2} \cdot 2\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5(\sqrt{15}-\sqrt{3})$.

Ответ: $1{,}5(\sqrt{15}-\sqrt{3})$.

Задача 2

Через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой) проведена окружность, касающаяся стороны AC и пересекающая продолжение стороны BC в точке D. Найдите радиус окружности, если известно, что AB = 3 см и CD = 3,2см.



Решение

Обозначим искомый радиус через R. Из точки O опустим перпендикуляр OK на продолжение стороны CB. По свойству касательной AC перпендикулярен к OA, AOKC – прямоугольник и CK = AO = R, KD = CD - R.

Так как OK перпендикулярен к BD, то BK = KD,

CB = CK – BK = R – (CD – R) = 2R – CD.

Следовательно, R = $\frac{CB}{2}$ + 1,6.

Найдем CB. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC получаем $AC^2 = AB^2 - CB^2$. По теореме об отрезках касательной и секущей, проведенных к окружности из одной точки, получаем $AC^2 = CB \cdot CD$.

Таким образом, $AB^2 - CB^2 = CB \cdot CD$, $9 - CB^2 = 3{,}2 \cdot CB$. Решая квадратное уравнение и учитывая, что $CB > 0$, получаем $CB = 1{,}8$. Следовательно, $R = \frac{1{,}8}{2} + 1{,}6 = 2{,}5$.

Ответ: 2,5 см.

Литература

1) Атанасян Л. С. «Геометрия», Москва, «Просвещение», 2003 год
2) Глейзер Г. И. «История математики в школе», Москва, «Просвещение», 1964 год
3) «Математика в школе» № 43 статья Малковой Н. «Углы, связанные с окружностью», 2003 год
4) «Математика в школе» № 19 статья Прокофьева А., Соколовой Т. «Окружности в задачах», 2005 год
5) Савин А. П. «Я познаю мир – математика», Москва, «Астрель», 2002 год
6) Шарыгин И. Ф. «Геометрия», Москва, «Дрофа», 1997 год
7) «Энциклопедия для детей – математика», Москва, «Аванта+», 1999 год
8) Ресурсы интернета