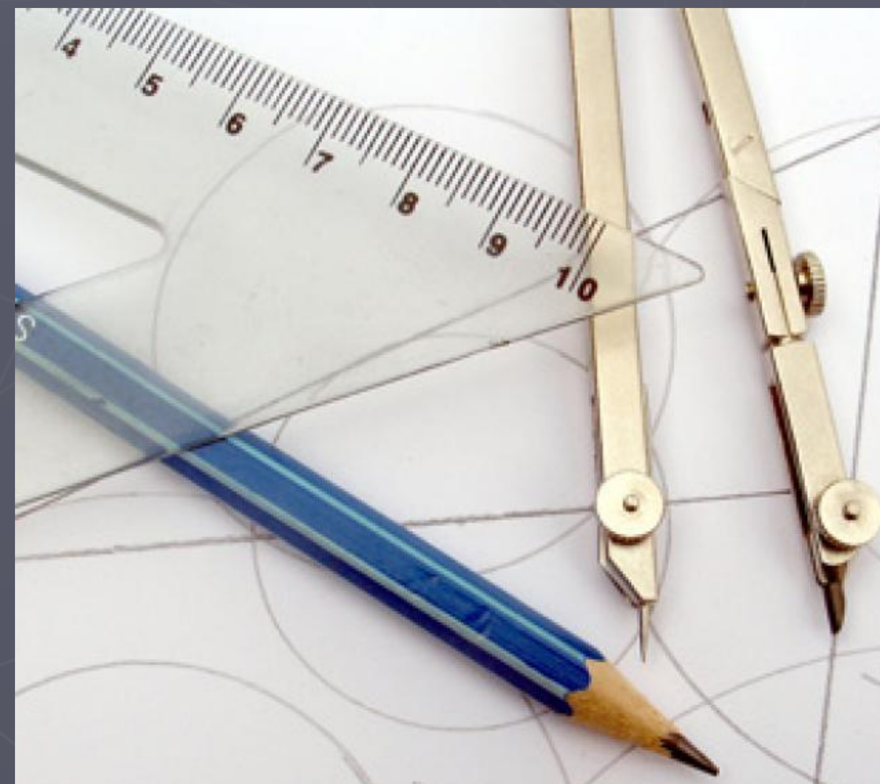
Геометрическое решение негеометрических задач

Г.Новосибирск МБОУ Гимназия№4
Учитель высшей квалификационной категории Баринова Л.Л

Содержание

- Системы уравнений.
- Тригонометрия.
- Взаимосвязанные иррациональности.
- Экстремумы.



Системы уравнений

Природа написана на языке математики.

Галилей.

Задача 1

Условие

Для положительных x, y, z из условий

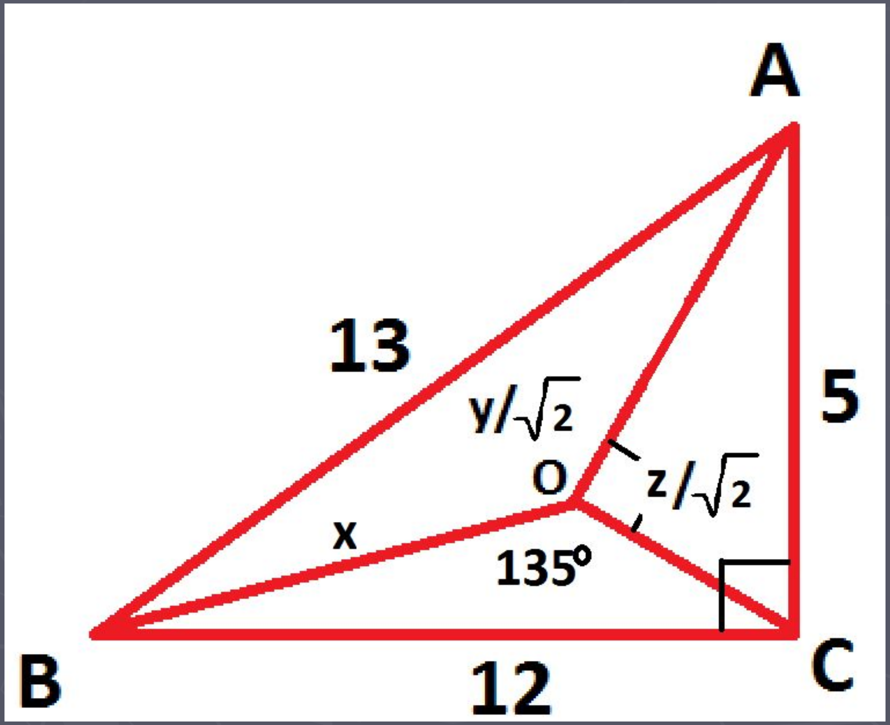
$y^2+z^2=50$,

$x^2+xy+y^2/2=169$,

$x^2+xz+z^2/2=144$,

не находя значений x, y, z вычислите значение выражения $xy+yz+xz$.

Решение



$$y^2/2+z^2/2=25$$
$$x^2+xy+y^2/2=169$$
$$x^2+xz+z^2/2=144$$

Решение

$S_{AOB}=1/2*xy/\sqrt{2}*\sin 135°=1/4xy$

$S_{AOC}=1/2*y/\sqrt{2}*z/\sqrt{2} =1/4yz$

$S_{BOC}=1/2*x*z/\sqrt{2}*\sin 135°=1/4xz$

$S_{ABC}=1/2*5*12=30$

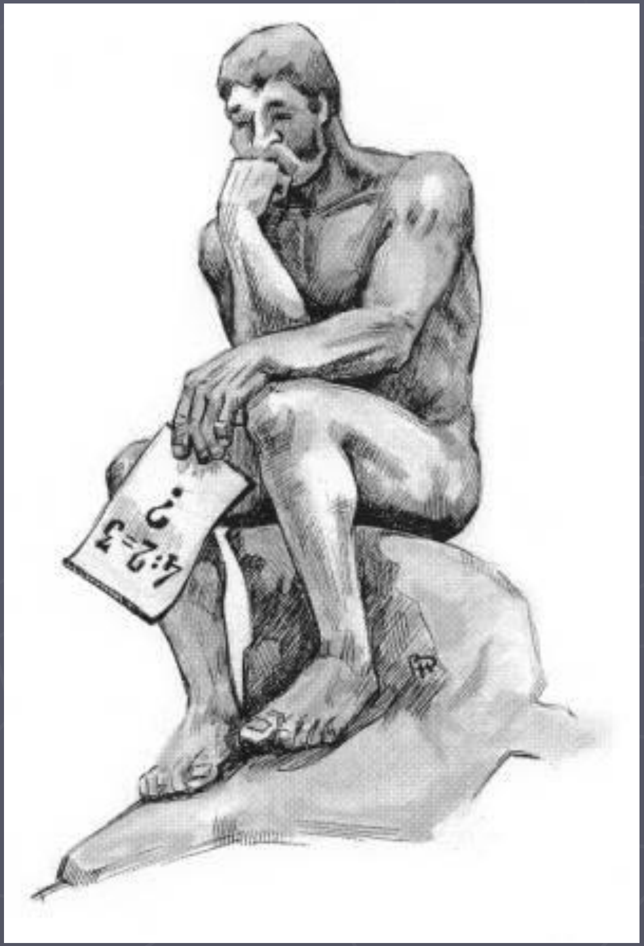
Заметим, что значение выражения $xy+yz+xz=120$ равно учетверенной площади треугольника ABC. Итак, $xy+yz+xz=120$.

Ответ:120.

Тригонометрия

Арифметические знаки – это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры – это нарисованные фигуры.

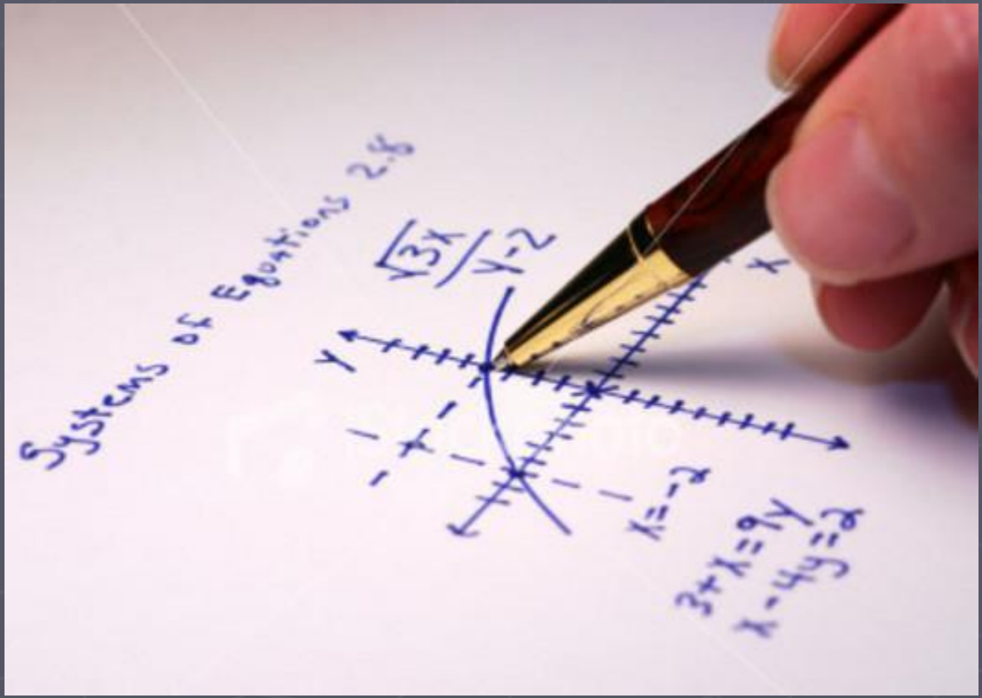
Д. Гильберт



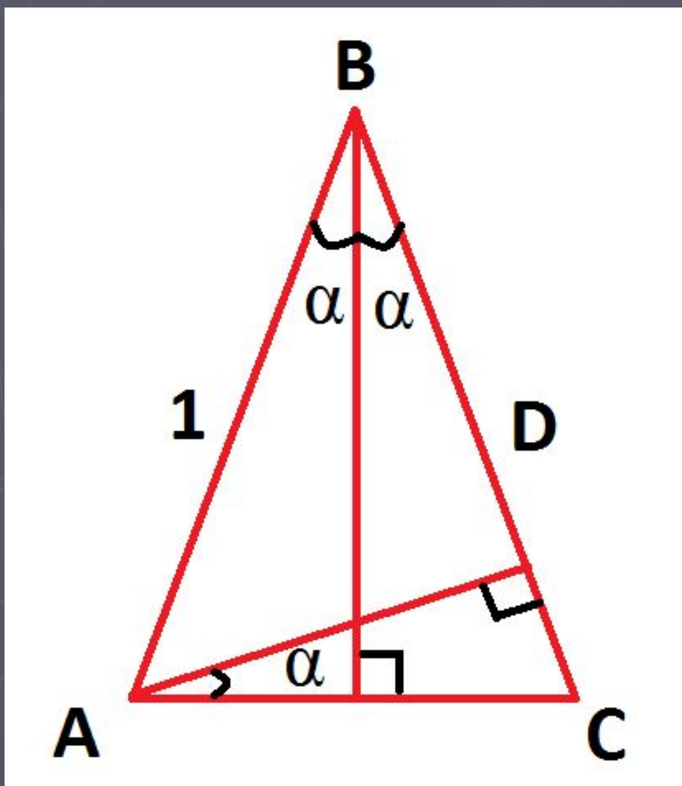
Задача 2

Докажите, что $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha * \cos\alpha$

(формула синуса двойного угла).



Решение



Рассмотрим ∆ABC (AB=BC=1),

угол ABC=2α, высоты AD и BE.

AD=sin2α, AE=EC=sinα,

BE=cosα/

Так как ∆ABC~ ∆CAD, то AB/AC=BE/AD, т.е. 1/2sinα=cosα/sin2α,

Sin2α=2sinα*cosα.

Взаимосвязанные иррациональности

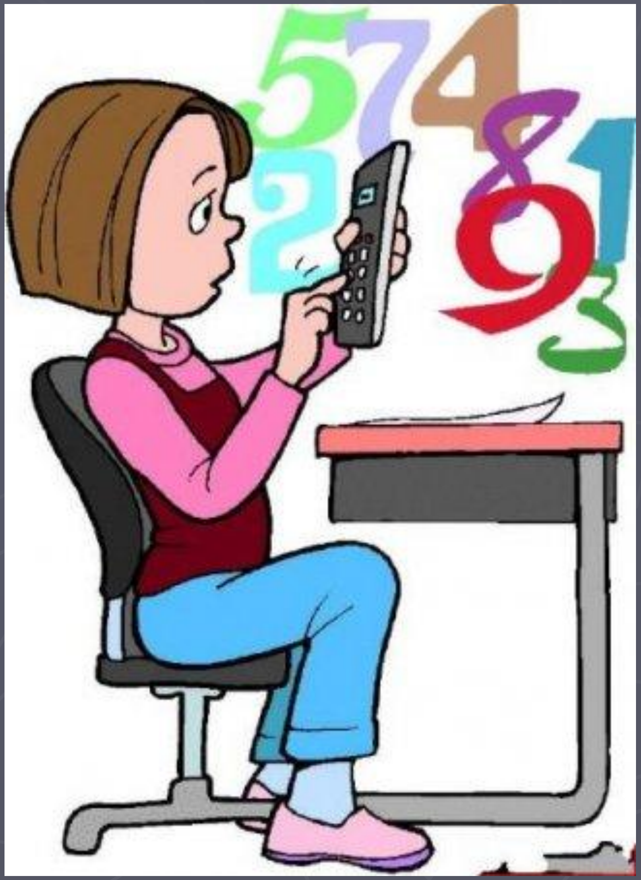
Математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит.

М.Ломоносов

Задача 3

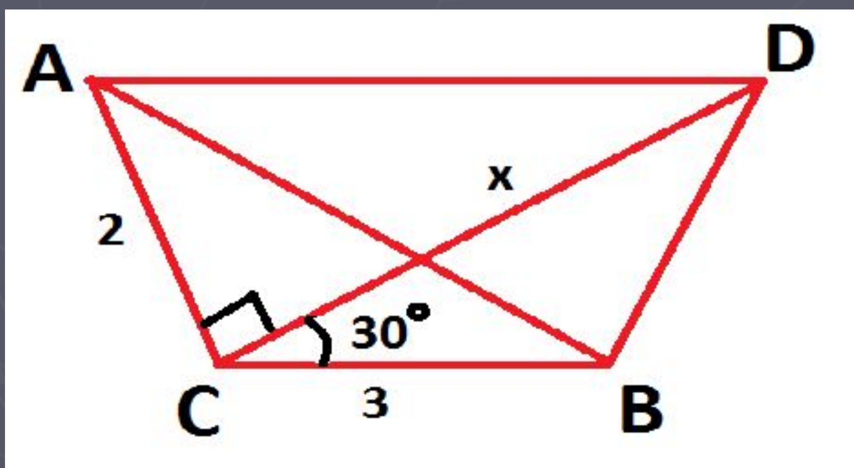
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}$$



В природе все подлежит измерению,
все может быть сосчитано.
Н.Лобачевский

Решение



ΔADC (AC=2, CD=x, угол ACD=90°) и

ΔBCD (BC=3, CD=x, угол BCD=30°).

Из ΔADC $AD=\sqrt{x^2+4}$ (по теореме Пифагора), а из

ΔBCD $DB=\sqrt{x^2+9-3x\sqrt{3}}$(по теореме косинусов)

Min f(x)=min(AD+DB)=AB

Из ΔABC

$AB=\sqrt{2^2+3^2-2*2*3*\cos 120°}=\sqrt{19}$ (по теореме косинусов).

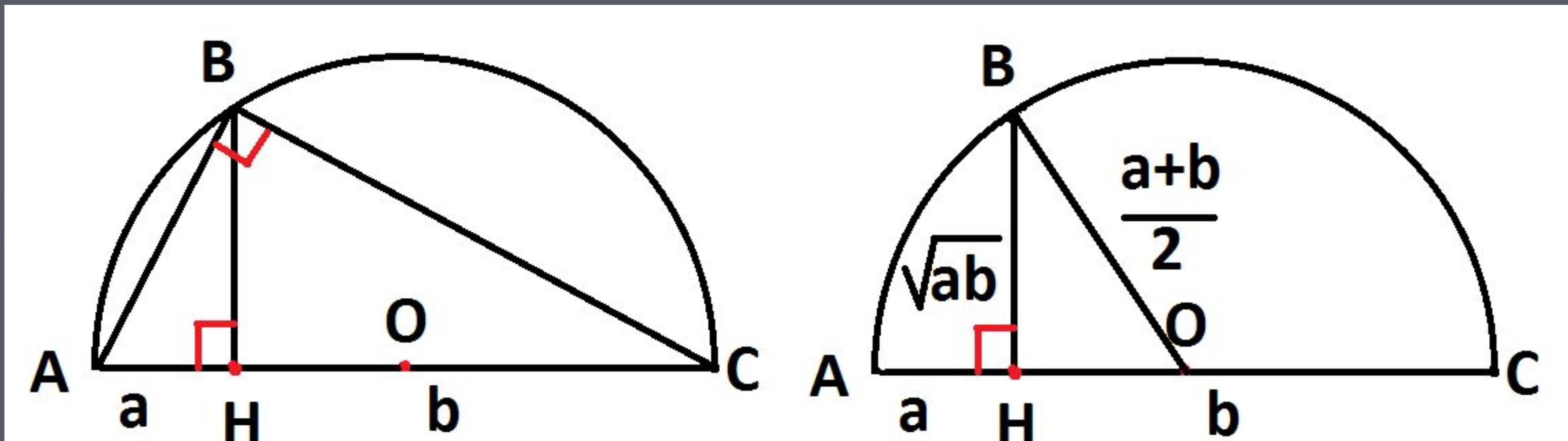
Ответ:$\sqrt{19}$

Об экстремумах

И нет движенья – ни вперед, ни назад, ни вверх и ни вниз.

Т. Элиот

Подсказка



$BH=\sqrt{ab}$ – среднее геометрическое

$BO=(a+b)/2$ – среднее арифметическое

$\sqrt{ab} \le (a+b)/2$

$2\sqrt{a+b} \le a+b$

Задача 4

Условие

При каком значении аргумента x функция f(x) принимает наименьшее значение? Вычислите min f(x).

$$f(x)=\frac{5x^2+4x+20}{2x}, \quad x>0.$$

Решение

$$\frac{5x^2+4x+20}{2x}=\frac{1}{2}\left(5x+\frac{20}{x}\right)+2$$

$$\frac{1}{2}\left(5x+\frac{20}{x}\right)+2\geq\frac{1}{2}*2\sqrt{5x*\frac{20}{x}}+2$$

$$\frac{5x^2+4x+20}{2x}=12$$

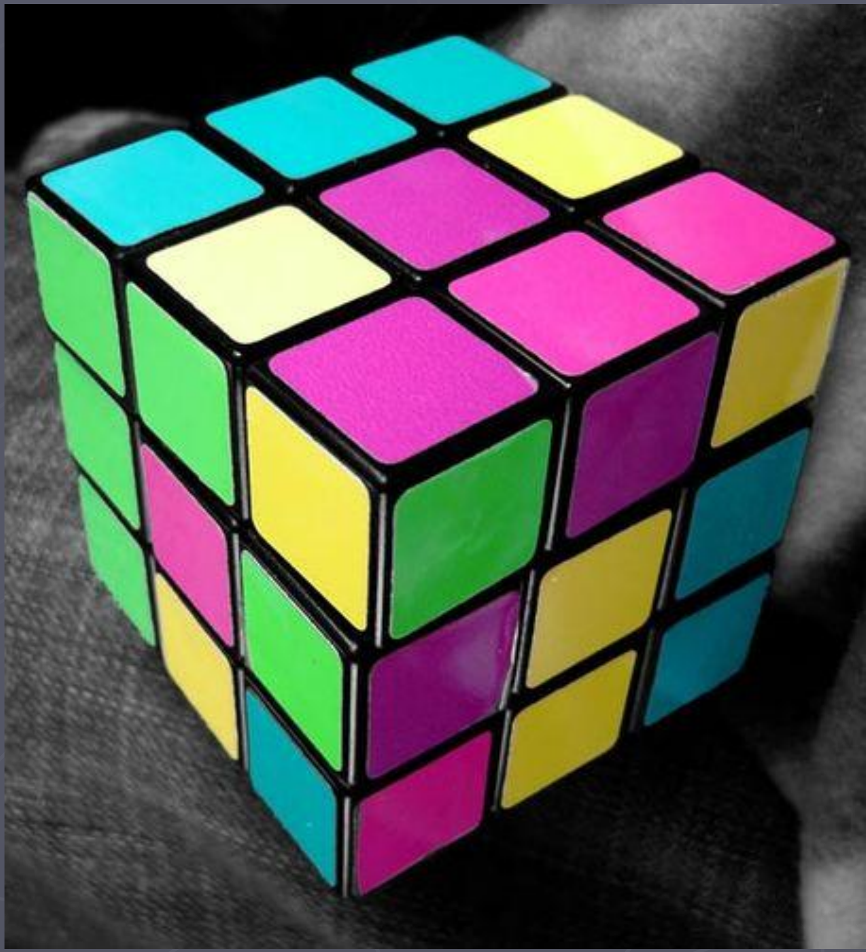
X=2

Ответ: min f(x)=f(2)=12.

Задача 5

Доказать, что:

- из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат;
- из всех прямоугольников с заданной площадью наименьший периметр имеет квадрат.



Доказательство

Пусть одна из сторон равна x, тогда при заданном периметре P=4a вторая сторона равна 2a-x.

$S(x)=(2a-x)x$

$$(2a-x)x \le \left(\frac{2a-x-x}{2}\right)^2, \quad ((2a-x+x)/2)^2=a^2$$

$(2a-x)x=a^2 \iff x^2-2xa+a^2=0 \iff x=a$

Max $S(x)=a^2$ при $x=a$.

Доказательство

2)Пусть сторона прямоугольника равна x, тогда при заданной площади $S(x)=a^2$ другая его сторона равна a^2/x.

$P(x)=2(a^2/x+x)$

$$2(a^2/x+x) \geq 2*2\sqrt{x*\frac{a^2}{x}},\quad 2*2\sqrt{x*\frac{a^2}{x}}=4a$$

$2(x+a^2/x)=4a \Leftrightarrow x^2-4ax+a^2=0 \Leftrightarrow x=a$

Min $P(x)=4a$ при $x=a$.

Что и требовалось доказать.

Терпенье и труд все перетрут.
Поговорка