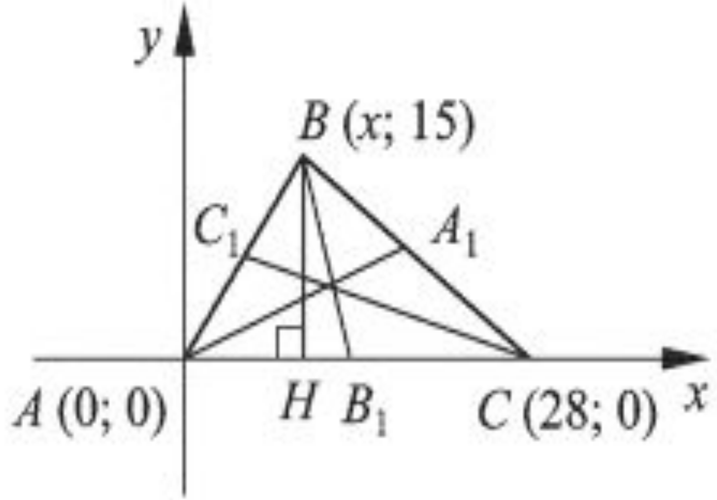
Метод координат

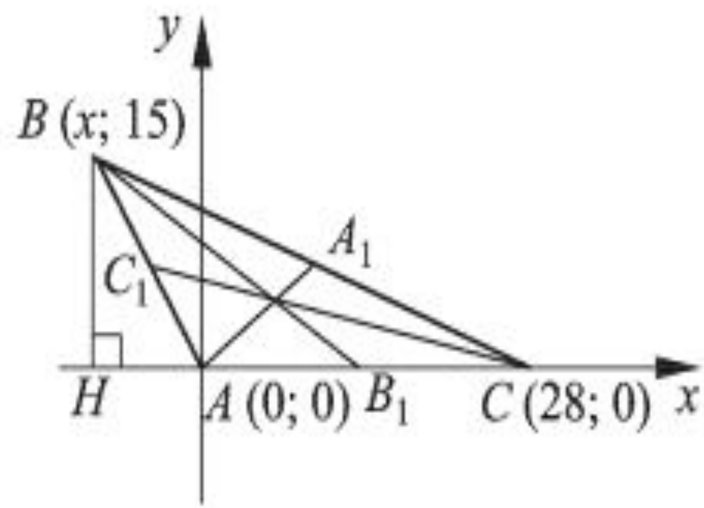
Учитель математики:
МКОУ Кидышевская СОШ
Зыбалова Е.А.

- Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а высота, проведенная к большей стороне, равна 15 см. Найдите медианы треугольника.
- Решение: Пусть в $\Delta ABC: AB = 17$ см, $AC = 28$ см, $BH = 15$ см .
- 1) Введем прямоугольную систему координат (возможны 2 случая расположения):(умение оптимально выбирать систему координат)

Задача №1.



а



б

2) Тогда вершины имеют следующие координаты:

2) Тогда вершины имеют следующие координаты: $A(0;0);\ B(x;15);\ C(28;0).$

(умение определять координаты заданных точек)

$H \in AC => x > 0$

а) если точка

$AC => x < 0$

б) Н лежит на продолжении

3) Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем:

$AB = \sqrt{x^2 + 15^2}$ $\qquad \sqrt{x^2 + 15^2} = 17$

$AB = 17$ $\qquad x^2 = 64$

$$x_1 = 8; \quad x_2 = -8$$

Таким образом, точка B имеет координаты:

а) (8;15); б) (-8;15)

(умение находить расстояние между двумя точками; умение выполнять алгебраические преобразования)

4) Пусть точки $A_1(x_1; y_1)$, $B_1(x_2; y_2)$, $C_1(x_3; y_3)$ – середины сторон BC, CA и AB.

В случае а) получаем:

$$x_1 = \frac{8 + 28}{2} = 18; \qquad y_1 = \frac{15 + 0}{2} = 7{,}5$$

$$x_2 = \frac{0 + 28}{2} = 14; \qquad y_2 = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

$$x_3 = \frac{0 + 8}{2} = 4; \qquad y_3 = \frac{0 + 15}{2} = 7{,}5$$

В случае б):

$$x_1 = \frac{-8+28}{2} = 10; \qquad y_1 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5$$

$$x_2 = \frac{0+28}{2} = 14; \qquad y_2 = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$x_3 = \frac{0-8}{2} = -4; \qquad y_3 = \frac{0+15}{2} = 7{,}5$$

(умение находить координаты середины отрезка)

5) Найдем медианы $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ по формуле расстояния между двумя точками:

В случае а):

$$AA_1 = \sqrt{(18-0)^2 + (7{,}5-0)^2} = 19{,}5 \text{ см}$$

$$BB_1 = \sqrt{(14-8)^2 + (0-15)^2} = 3\sqrt{29} \text{ см}$$

$$CC_1 = \sqrt{(4-28)^2 + (7{,}5-0)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{281} \text{ см}$$

В случае б):

$$AA_1 = \sqrt{(10-0)^2 + (7{,}5-0)^2} = 12{,}5 \text{ см}$$

$$BB_1 = \sqrt{(14+8)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{709} \text{ см}$$

$$CC_1 = \sqrt{(-4-28)^2 + (7{,}5-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4321} \text{ см}$$

(умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами; умение выполнять алгебраические преобразования).

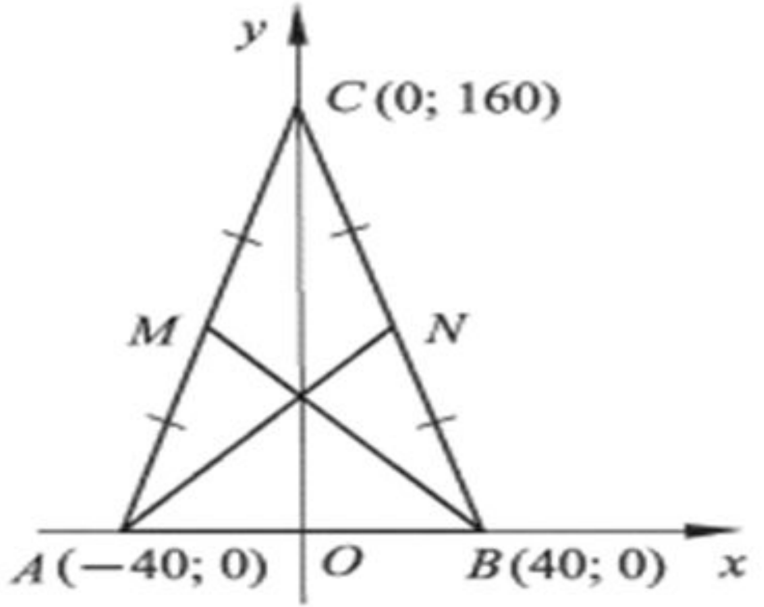
Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы.

Задача №2.

Решение.

Пусть в

ΔABC: $AC = BC$, $AB = 80$ см, $CO = 160$ см, $AO = OB$.



1) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $O(0;0)$. (умение оптимально выбирать систему координат)

2) Тогда вершины A, B, C имеют следующие координаты: $A(-40;0); B(40;0); C(0;160)$

(умение определять координаты заданных точек).

3) Обозначим середины сторон AC и BC через M и N. Найдем их координаты.

$$M = \left(\frac{0-40}{2}; \frac{160}{2}\right) = (-20; 80)$$

$$N = \left(\frac{40-0}{2}; \frac{160}{2}\right) = (20; 80)$$

(умение находить координаты середины отрезка)

4) Найдем медианы AN и BM по формуле нахождения расстояния между двумя точками:

$$AN = \sqrt{(20+40)^2 + (80-0)^2} \text{ см} = 100 \text{ см}$$

$$BM = \sqrt{(-20-40)^2 + (80-0)^2} \text{ см} = 100 \text{ см}$$

(умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами)

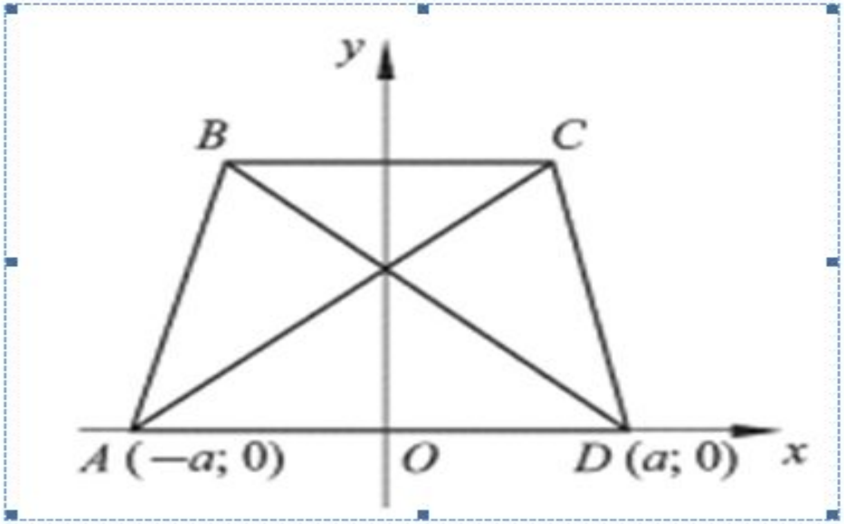
Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задача №3.

Решение:

Пусть $\square ABCD -$ равнобедренная трапеция. $AD = 2a,\ BC = 2b$

1) Введем прямоугольную систему координат так, чтобы основание AD лежало на оси абсцисс; точка $O -$ середина AD. Тогда Oy делит BC пополам.



(умение оптимально выбирать систему координат)

2) Тогда вершины трапеции имеют следующие координаты:

$A(-a;0),\ B(-b;h),\ C(b;h),\ D(a;0)$

(умение определять координаты заданных точек).

3) Найдем AC и BD по формуле нахождения расстояния между двумя точками:

$AC = \sqrt{(b+a)^2 + h^2}$ => $AC = BD$.

$BD = \sqrt{(a+b)^2 + (-h)^2}$ что и требовалось доказать.

(умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами).

4) Докажем обратное утверждение: если диагонали трапеции равны, то трапеция – равнобедреннная.

Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали равны: $AC = BD$ и пусть $AD = 2a$.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы основание AD лежало на оси абсцисс; точка O – середина AD.

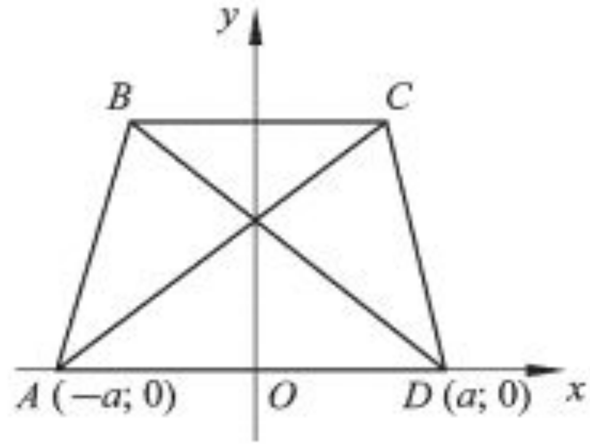
(умение оптимально выбирать систему координат).

Тогда вершины A и D имеют координаты: $A(-a; 0)$, $D(a; 0)$, а вершины

B и C: $B(b; h)$, $C(c; h)$, причем $b < c$, h – высота трапеции.

(умение определять координаты заданных точек).

5) По условию $AC = BD \ (AC^2 = BD^2)$, т.е



$(c+a)^2 + h^2 = (b-a)^2 + h^2$ => $(c+a)^2 - (b-a)^2 = 0$

Разложим на множители: $(c-b+2a)(c+b) = 0$

Так как $b < c; \ a > 0 \ =>$ первый сомножитель положительный => $c + b = 0 \ => \ b = -c$

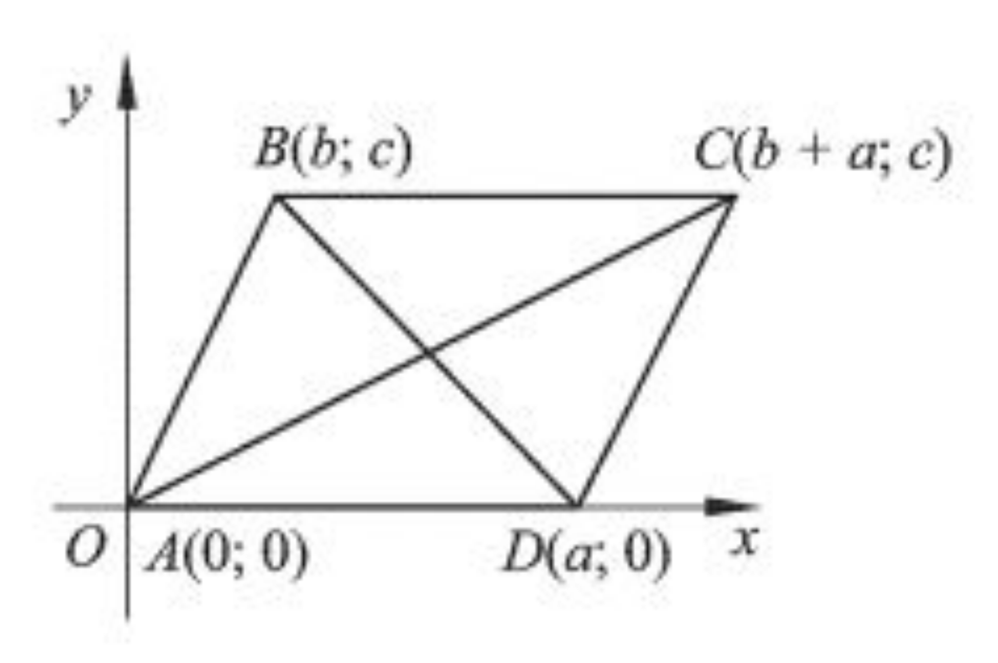
(умение переводить задачу с геометрического на аналитический язык; умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами; умение выполнять алгебраические преобразования).

6) Найдем AB и CD по формуле нахождения расстояния между двумя точками, заданными координатами, используя координаты $A(-a;0),\ D(-c;h),\ C(c;h),\ D(a;0)$.

$AB = \sqrt{(a-c)^2 + h^2}$; => $AB = CD$ => трапеция $ABCD -$ равнобедренная

$CD = \sqrt{(a-c)^2 + h^2}$ что и требовалось доказать.

Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником.



Задача

Решение: Пусть в параллелограмме ABCD диагонали равны: $AC = BD$ и пусть $AD = BC = a.$

1) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0;0).$

(умение оптимально выбирать систему координат)

2) Тогда вершины параллелограмма имеют следующие координаты:

$$A(0;0),\ B(b;c),\ C(b+a;c),\ D(a;0),$$

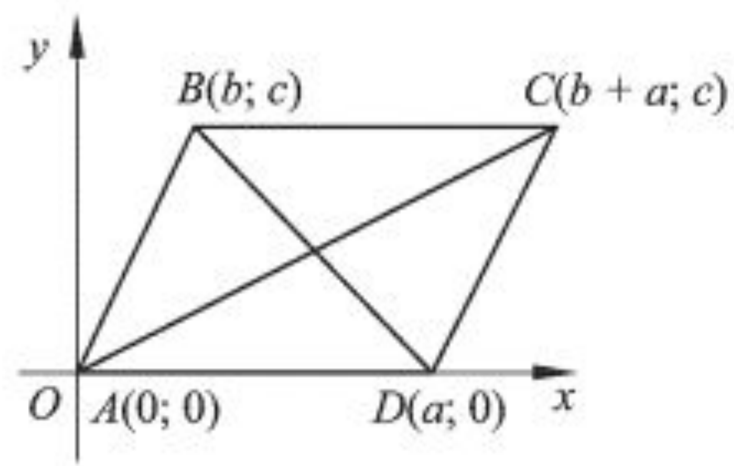
где b,c – некоторые числа.

(умение определять координаты заданных точек)

3) Найдем AC и BD по формуле нахождения расстояния между двумя точками:

$$AC^2 = (a+b)^2 + c^2$$

$$BD^2 = (a-b)^2 + c^2$$



4) Так как по условию $AC = BD$ => $AC^2 = BD^2$

Запишем данное условие в координатах:

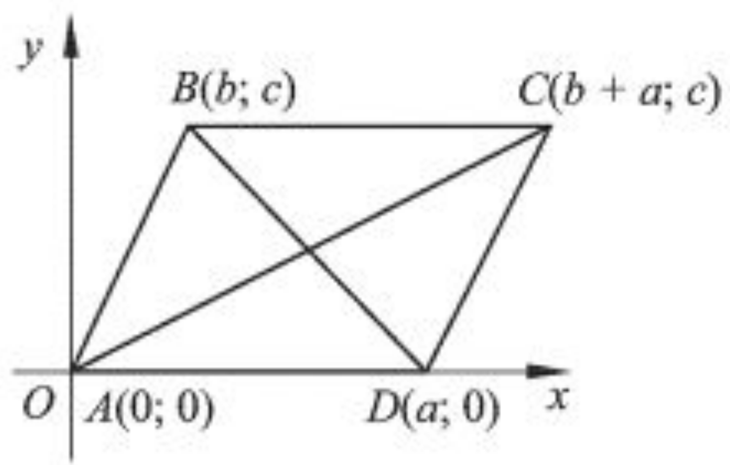
$$(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2$$

(умение переводить задачу с геометрического на аналитический язык; умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами)

5) Раскрывая скобки, получаем $ab = 0$, а так как $a \neq 0 \;\; => \;\; b = 0$

(умение выполнять алгебраические преобразования)

Итак, вершина B имеет координаты $(0; c)$, т.е. вершина B лежит на оси ординат => $\angle BAD = 90^\circ \;\; =>$ параллелограмм ABCD – прямоугольник.



Итак, компонентами умения применять координатный метод в конкретных ситуациях являются следующие умения:

1) умение оптимально выбирать систему координат

2) умение определять координаты заданных точек

3) умение строить точку по заданным координатам

4) умение переводить задачу с геометрического на аналитический язык и наоборот

5) умение вычислять расстояние между двумя точками, заданными координатами

6) умение определять координаты середины отрезка

7) умение выполнять преобразования алгебраических выражений (раскрытие скобок, выделение полного квадрата)

8) умение составлять уравнения заданных фигур

9) умение видеть за уравнением конкретный геометрический образ.

Длина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	x, y - координаты вектора
Координаты середины отрезка AB	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$A(x_1; y_1)$ - начало отрезка $B(x_2; y_2)$ - конец отрезка
Расстояние между двумя точками A и B.	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$A(x_1; y_1),\ B(x_2; y_2)$ - соответствующие точки
Уравнение окружности	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	r – радиус окружности; x_0, y_0 – координаты центра окружности
Уравнение прямой	$ax + by + c = 0$	$a = 2(x_1 - x_2)$ $b = 2(y_1 - y_2)$ $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$ x_1, x_2, y_1, y_2 - координаты соответствующих точек