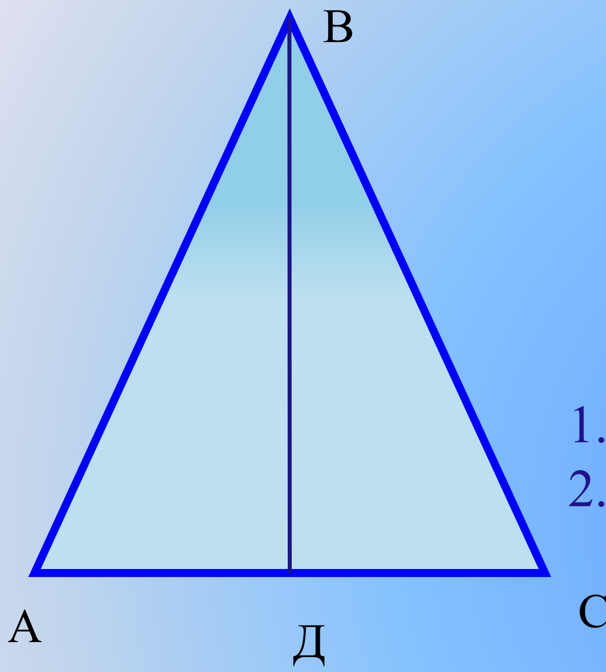
ТРЕУГОЛЬНИКИ
(элементы, площади)

Треугольник – это простейшая фигура: три стороны и три вершины. Математики называют его двумерным симплексом. «Симплекс» по-латыни означает простейший. Именно в силу своей простоты треугольник явился основой многих измерений.

Учитель математики МАОУ СОШ № 22
г. Тамбова Склярова Светлана Александровна

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Треугольник, у которого две стороны равны, называется *равнобедренным.*
Равные стороны называются боковыми сторонами (АВ = ВС), а третья сторона – основанием (АС).

Свойства

1. Углы при основании равны ($\angle$А = $\angle$С).
2. Медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают (ВД).

Признаки

Треугольник равнобедренный, если

два угла равны

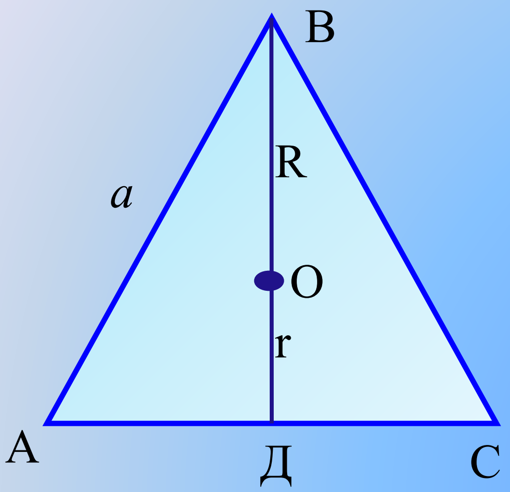
медиана является высотой

высота является биссектрисой

медиана является биссектрисой

проверь себя

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним (правильным)*.

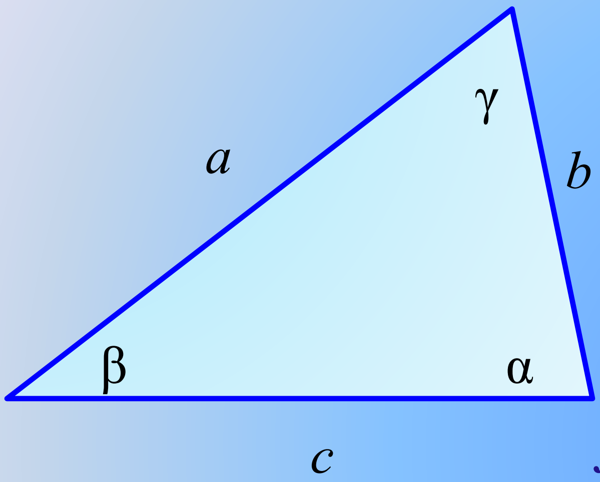
Свойства

1. Все углы равны ($\angle A = \angle B = \angle C$).
2. Каждая медиана совпадает с биссектрисой и высотой, проведёнными из той же вершины (ВД).
3. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

$$ОД = r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad OB = R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad R = 2r$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \qquad R = \frac{2}{3}h \qquad r = \frac{1}{3}h$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ



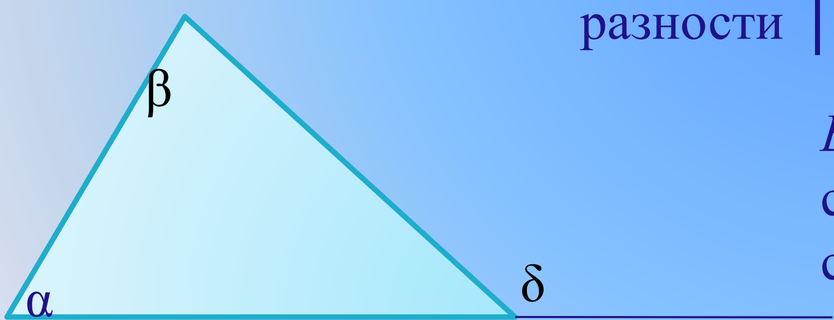
Сумма *углов* треугольника равна 180^0

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

Против *большей* стороны в треугольнике лежит *больший* угол $a > b \leftrightarrow \alpha > \beta$

проверь себя

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности $|a - b| < c < a + b$

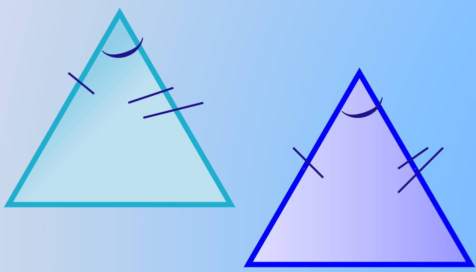


Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним $\delta = \alpha + \beta$

проверь себя

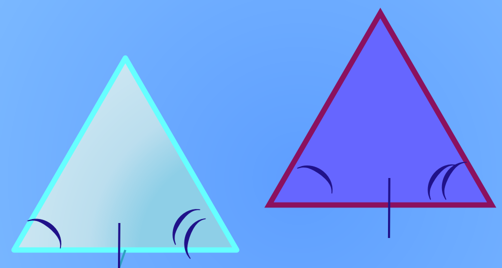
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

I признак



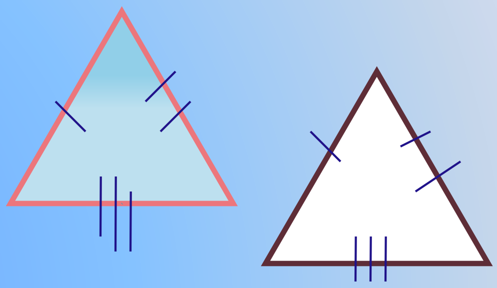
По двум сторонам
и углу между
ними

II признак



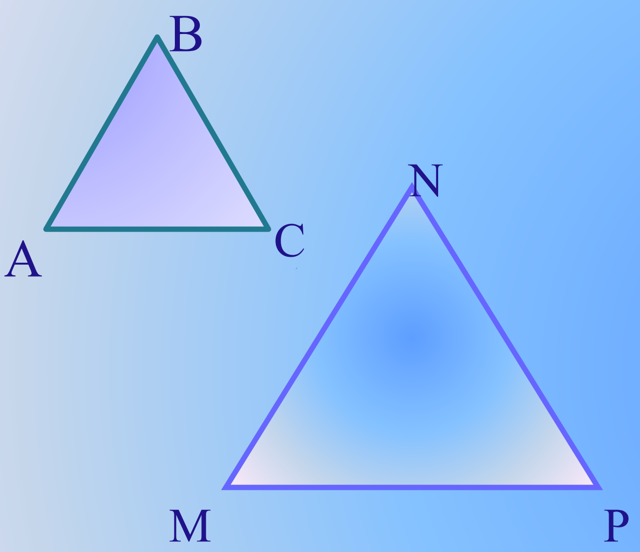
По одной стороне
и двум прилежащим
к ней углам

III признак



По трём сторонам

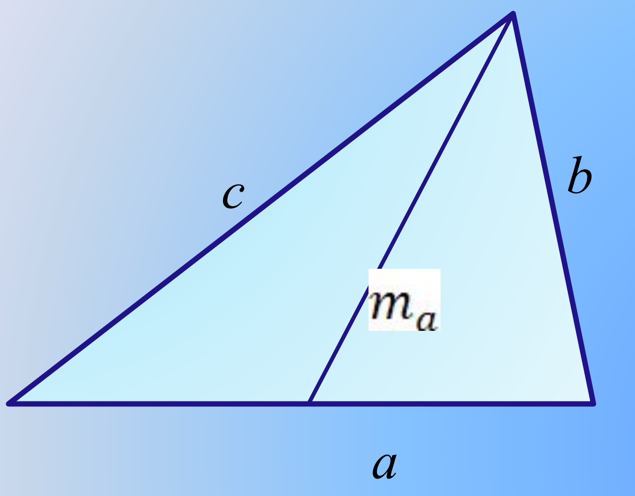
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

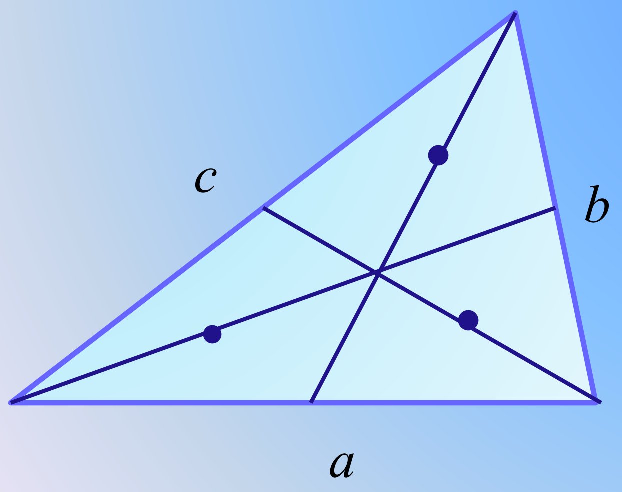


$\Delta ABC \infty \Delta MNP$

1. $\angle A = \angle M \qquad \angle B = \angle N$
2. $\angle A = \angle M \qquad \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP}$
3. $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP}$

МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА





Медианой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника.

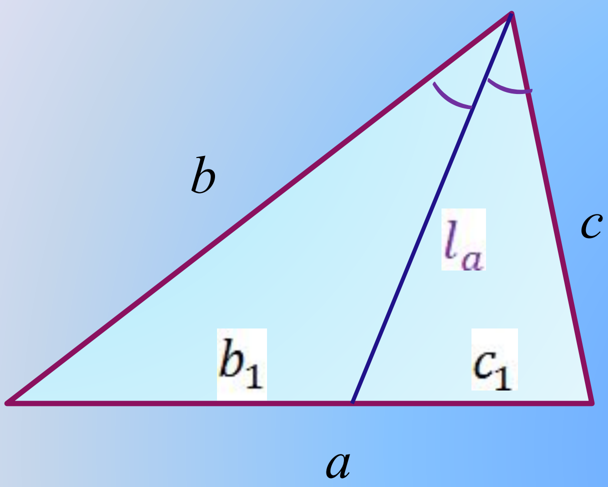
Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).

Три медианы пересекаются в одной точке, которая всегда находится внутри треугольника (центр масс треугольника).

Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА



Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне.

Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам: $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$

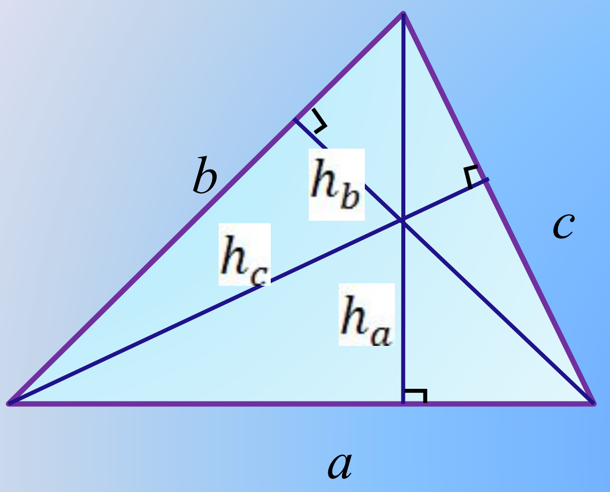
Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая всегда лежит внутри треугольника. Эта точка является центром вписанной окружности.

$$l_a^2 = bc - b_1 c_1$$

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

проверь себя

ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

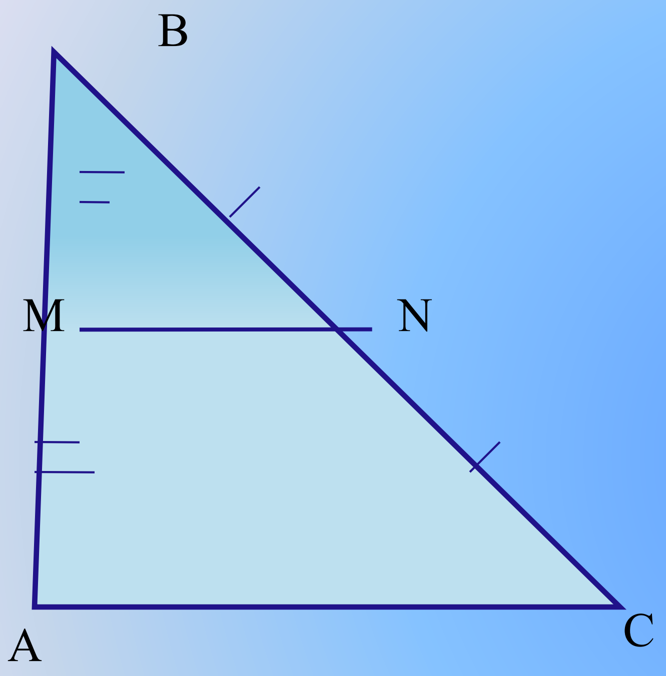


Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой , содержащей противолежащую сторону треугольника.
Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром.

Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника. Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла. Ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

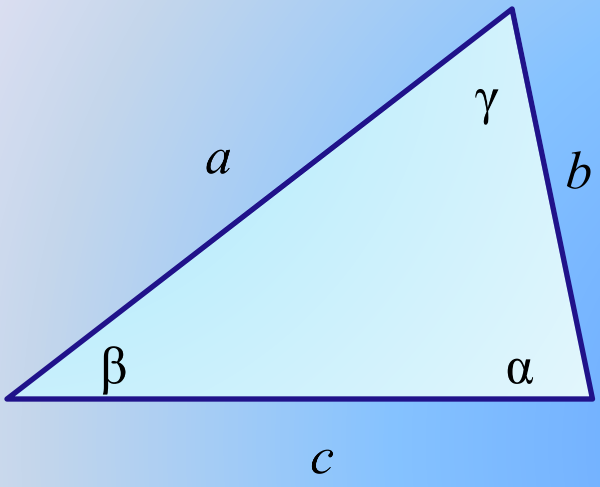


Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна её половине:

$MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}$ AC.

Она отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$

ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ И СИНУСОВ



Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены *a, b, c,* а величины противолежащих им углов

α, ,β, γ,

справедливы две теоремы.

Теорема косинусов:

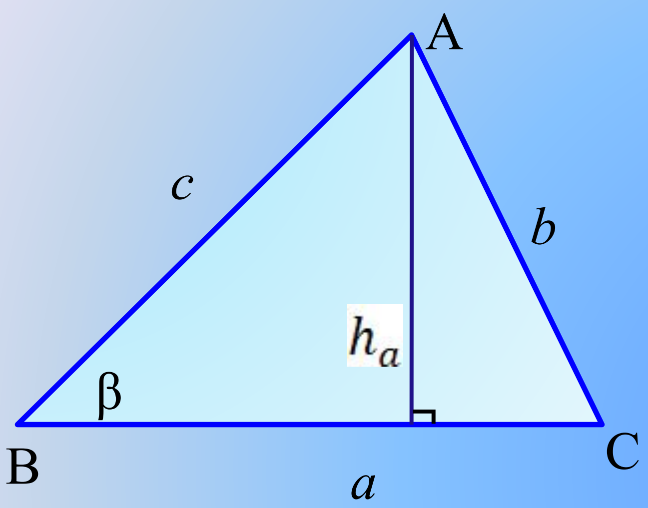
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

где R - радиус описанной окружности

ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены *a, b, c,* а высота h_a

площади вычисляются по формулам:

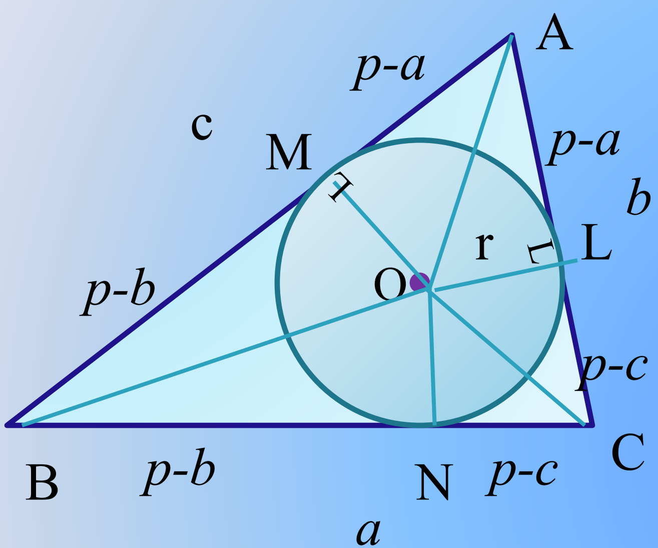
S = $\frac{1}{2} a h_a$ S = $\frac{1}{2} ac \sin\beta$

S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p = $\frac{a+b+c}{2}$ (формула Герона)

S = pr , где r – радиус вписанной окружности

S = $\frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности

ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



В любой треугольник можно *вписать окружность.*

Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.

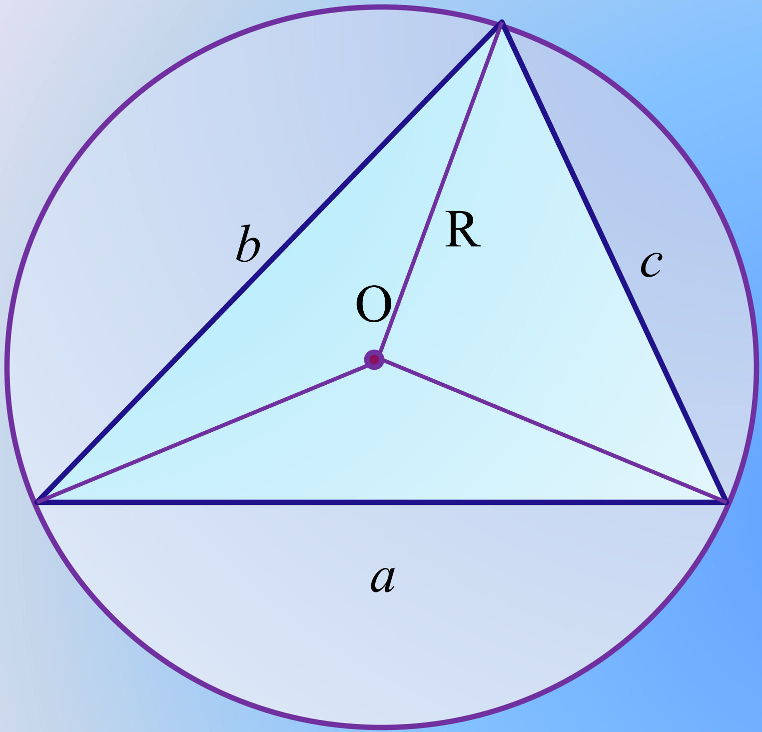
$r = \frac{S}{p}$, где S площадь треугольника, а

$p = \frac{a+b+c}{2}$

$BN = BM = p - b$ $\quad AM = AL = p - a$ $\quad CN = CL = p - c$

$\angle BOC = \frac{\angle A}{2} + 90^0$ $\quad \angle BOA = \frac{\angle C}{2} + 90^0$ $\quad \angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90^0$

ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



Около любого треугольника можно *описать окружность*.
Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

$R = \frac{abc}{4S}$, где S площадь треугольника