

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Расстояние, точка, прямая, **плоскость**,
Множество.

$\alpha, \beta, \chi, \dots$ обозначения плоскостей.

M – все точки пространства

АКСИОМЫ

Аксиома 1.

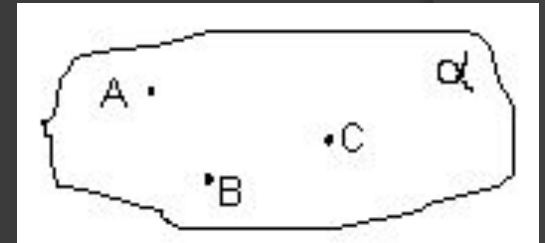
В пространстве существуют плоскости.

Через каждые три точки пространства проходит плоскость.

1) $\exists \alpha \subset M$ и $\exists \beta \subset M$;

2) $\forall \{A, B, C\} \subset M \exists \alpha \mid \{A, B, C\}$

$\subset \alpha$
Вопросы



1) Зачем первая часть аксиомы при наличии второй?

Каким утверждением ее можно было заменить?

2) Является ли множество M конечным или бесконечным?

3) Верно ли, что через каждые одну или две точки пространства проходит плоскость?

4) Докажите, что в пространстве через каждые две точки проходит прямая.

Следует ли отсюда, что прямые в пространстве можно обозначать (AB) , (CD) , ..., как в планиметрии?

Аксиома 2.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечением является прямая.

$$C \in \alpha, C \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta =$$

c

Почему $C \in c$?

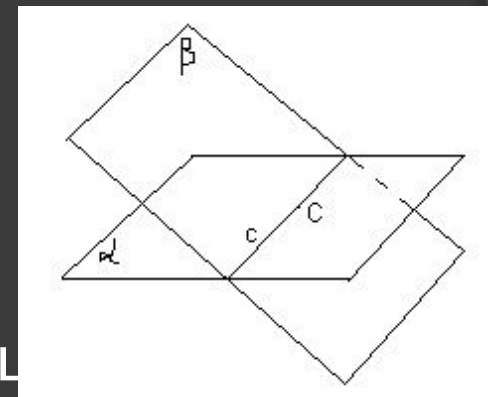
Определение.

Две различные плоскости, имеющие общую точку, называются **пересекающимися**.

1) Докажите, что $\forall \alpha$

$\exists X \notin \alpha$

2) Докажите существование пересекающихся плоскостей



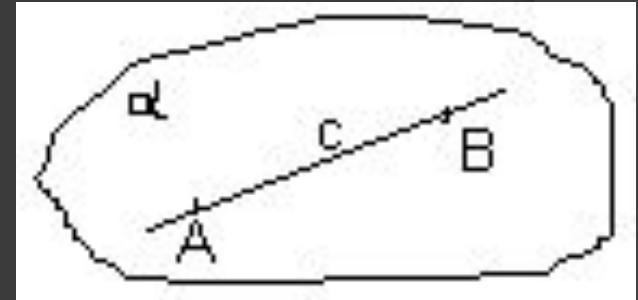
Определение.

Сечением фигуры F плоскостью alpha называется их пересечение.

Аксиома 3.

Если прямая проходит через две точки, лежащие в данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.

$$A \in \alpha, B \in \alpha \text{ и } A \in c, B \in c \Rightarrow c \subset \alpha$$



Сколько общих точек могут иметь плоскость и прямая, не лежащая в ней?

Определение.

Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку, называются **пересекающимися**.

Докажите их существование

Аксиома 4.

Расстояние между двумя точками пространства не зависит от того, на какой из плоскостей, содержащих эти точки оно измерено.

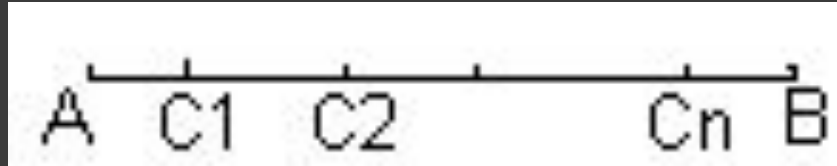
$$\forall A \in M, B \in M$$

$$\exists ! |AB|$$

Почему потребовалась такая аксиома?

Расстояние

$F: \{\text{отрезков}\} \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую следующим свойствам



1. $\exists [AB] \mid F([AB]) = 1.$

2. $[AB] = [CD] \Rightarrow F([AB]) = F([CD]).$

3. Если точки C_1, C_2, \dots, C_n таковы, что взятые в этом порядке, они разбивают $[AB]$ на отрезки, не имеющие общих внутренних точек,
то $F([AB]) = F([AC_1]) + F([C_1C_2]) + \dots + F([C_nB]).$

Как называется такой вид определения?

1) Из одной точки одновременно разных направлениях вылетели три вороны со скоростями 1, 2 и 3 метра в секунду.

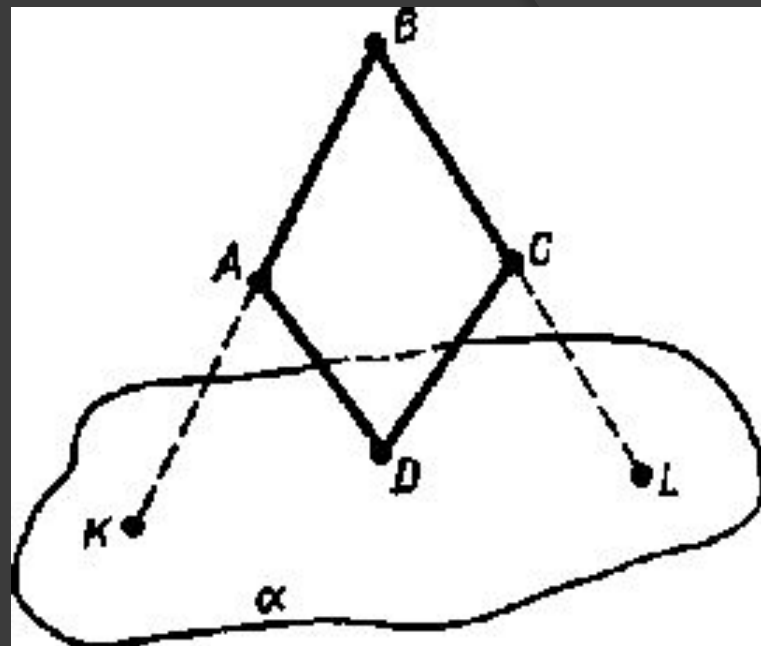
В какой момент после вылета они окажутся в одной плоскости?

2) Как на гладком столе проверить качество изготовления линейки?

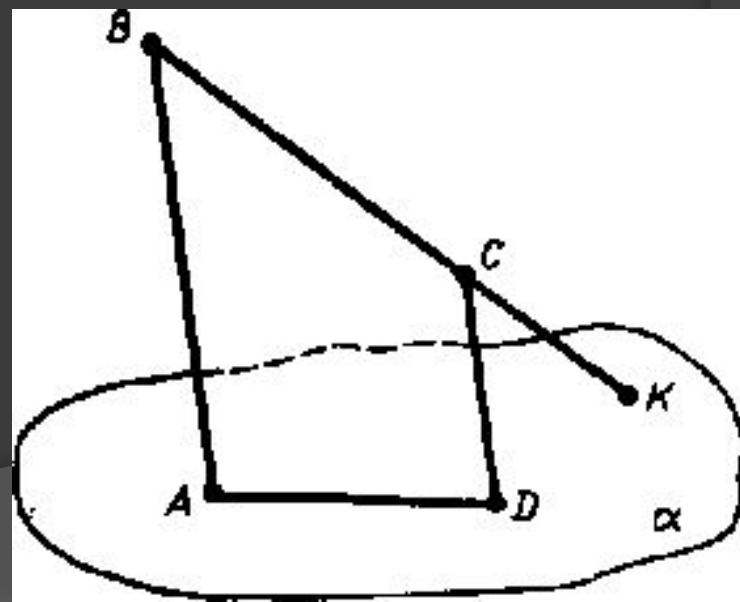
На чем основан ваш способ проверки?

Как решить обратную задачу?

Ученик нарисовал
четыреугольник $ABCD$
Точка D лежит в плоскости α
Прямая AB пересекает
плоскость α в точке K ,
прямая BC пересекает
плоскость α в точке L . Есть ли
ошибка на рисунке?



Ученик нарисовал четырехугольник $ABCD$
Прямая AD лежит в плоскости α ,
прямая BC пересекает плоскость
 α в точке K .
Есть ли ошибка на рисунке?



Аксиома 5

Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства.

Концы ломаной, состоящей из двух отрезков, лежат по разные стороны от данной плоскости. Докажите, что она пересекает эту плоскость. Обобщите это утверждение

Имеется n плоскостей.

Имеют ли они все общую точку, если:

- а) каждые две из них имеют общую точку;
- б) каждые три из них имеют общую точку?

1) Дано: $\alpha \cap \beta = c$; $a \subset \alpha$; $a \cap c = K$.

Доказать: $a \cap \beta = K$.

2) Запишите и докажите обратное утверждение

3) Докажите, что три попарно пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости.

Дано: $a \cap b = C$; $a \cap c = B$; $b \cap c = A$.

Доказать: $\exists \alpha \mid \{a, b, c\} \subset \alpha$